

ним розломом. Прикарпаська зона характеризується диференційованим опусканням з утворенням відносно піднятих і опущених ділянок морського дна, а західна — загальним слабким опусканням [2]. У свою чергу, в межах західної зони виділяються дві підзони, розмежовані Одеським глибинним розломом: східна, яка характеризується малою диференціацією сучасних вертикальних рухів, і західна — з відносно великою диференціацією цих рухів, що зумовили утворення серії невеликих субмеридіональних підняттів і прогинів, які віддзеркалюються в рельєфі дна шельфу.

Земна кора в районі о. Зміїний, поблизу якого зареєстровано землетрус 07.05.2008 р. і серію землетрусів 1992 р., має складну блокову будову, обумовлену системою тектонічних розломів. Припіднятий блок фундаменту, до якого відноситься о. Зміїний, є одною з ділянок відносно підняття на фоні загального слабого опускання шельфу північно-західної частини Чорного моря в четвертинний період. Припідняті блоки розділені порівняно вузькими зонами дещо інтенсивнішого опускання. Для цієї зони характерний досить чітко виражений меридіональний план структурних елементів, які проявляються в сучасних рухах. На думку авторів [5], зовнішня частина зони одесько-дунайського шельфу є

ділянкою інтенсивного опускання із значним перекосом у бік глибоководної западини.

**Висновки.** Теорія сейсмології володіє достатньо потужним арсеналом розрахункових методів, проте слід визнати, що найнадійніше параметри прогнозованих струшувань можуть бути визначені лише на основі безпосередніх інструментальних спостережень. На жаль, для виконання цього завдання на території України сейсмологічна мережа є недостатньо густою. З огляду на це актуальним є налагодження надійної роботи сейсмічної станції, розташованої безпосередньо на о. Зміїний. Ця станція дозволить контролювати сейсмічний режим північно-західної частини шельфу Чорного моря, який у світлі останніх даних проявляє сучасну тектонічну і сейсмічну активізацію, доказом якої є землетруси 07.05.2008 р. і 18.02.2009 р.

1. Геология шельфа УССР: Тектоника / В.Б. Соллоуб. — К., 1987.  
 2. Морунов Ю.Г., Калинин А.В., Калинин В.В. и др. Тектоника и история развития северо-западного шельфа Черного моря. — М., 1981.  
 3. Пустовитенко Б.Г., Кульчицкий В.Е., Пустовитенко А.А. Новые данные о сейсмической опасности г. Одесса и Одесской области. — [http://www.seism.org.ua/seism04-02\\_r.html](http://www.seism.org.ua/seism04-02_r.html). 4. Сейсмологический бюллетень Украины за 1992 г. — Симферополь, 1995. 5. Чекунов А.В. Проблемы Черного моря // Геофиз.журн. — 1987. — № 4. — С. 3-25.  
 Надійшла до редколегії 11.03.12

УДК 550.834

В. Роганов, мол. наук. співроб.

### МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук, проф. Г.Т. Продайводою)

*Пропонується стійкий метод обчислення трьохкомпонентних хвильових полів для горизонтально-шаруватого анізотропного середовища з поглинанням на основі використання дельта-операторів, шестивимірного формалізму Строу й матричного методу Хаскела-Томсона.*

*A stable method for calculating three-component three-dimensional fields of reflected and transmitted waves in a horizontally layered anisotropic anelastic medium is derived. It used delta-operators, the six-dimensional Stroh formalism and Haskell-Thomson matrix method.*

**Вступ.** Розрахунок коефіцієнтів відбиття й прохідності для ізотропного горизонтально-шаруватого середовища на основі матричного методу запропонували В. Томсон [5] і Н. Хаскел [3]. А. Строу [4] і С. Кремпін [1] показали, що для анізотропного середовища для цієї мети можна використати шестивимірний формалізм. Однак, матричному методу властива нестабільність, пов'язана з необхідністю розрахунку мінорів погано обумовлених матриць-пропагаторів. І. Данкін [2] показав, як, використовуючи дельта-оператори, збільшити точність розрахунків стосовно до ізотропного середовища. У цій роботі метод дельта-операторів узагальнений для багат шарових анізотропних середовищ із поглинанням і застосований для формування полів відбитих і заломлених хвиль.

**Теорія.** Розглянемо середовище, що складається з півпросторів  $0$  і  $(n+1)$ , між якими знаходяться  $n$  шарів з потужностями  $h_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) і плоскими горизонтальними границями поділу. Позначимо їх щільності й параметри пружності відповідно  $\rho^{(i)}$  й  $\lambda_{mp,nq}^{(i)}$  ( $i=0, \dots, n+1$ ). Півпростори й шари можуть бути анізотропними. Передбачається, що шари перебувають у жорсткому контакті.

Позначимо  $z_i = h_0 + \dots + h_{i-1}$  — глибину залягання верхньої границі  $i$ -го шару. Відповідно до методу Хаскела-Томсона, хвильові поля зсувів-напруг  $\mathbf{f}(z_1)$  і  $\mathbf{f}(z_{n+1})$  на границях між півпросторами зв'язані рівністю

$\mathbf{f}(z_{n+1}) = \mathbf{P}\mathbf{f}(z_1)$ , де  $\mathbf{P} = \exp\{j\omega h_n \mathbf{M}^{(n)}\} \dots \exp\{j\omega h_1 \mathbf{M}^{(1)}\}$  — шестивимірна матриця-пропагатор пачки шарів,

$$\mathbf{M}^{(i)} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(i)} & \mathbf{C}_{33}^{(i-1)} \\ \mathbf{B}^{(i)} & \mathbf{A}^{(i)T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{C}_{33}^{(i-1)-1} (s_1 \mathbf{C}_{31}^{(i)} + s_2 \mathbf{C}_{32}^{(i)}),$$

$$\mathbf{B}^{(i)} = \sum_{p,q=1,2} s_p s_q \left( \mathbf{C}_{p3}^{(i)} \mathbf{C}_{33}^{(i-1)-1} \mathbf{C}_{3q}^{(i)} - \mathbf{C}_{pq}^{(i)} \right) + \rho^{(i)} \mathbf{I}. \quad (1)$$

Якщо позначити  $\mathbf{E}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\alpha^{(i)} \\ s_\alpha^{(i)} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(i)} = \text{diag}\{\exp(j\omega s_\alpha^{(i)} h_i)\}$ , де  $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_\alpha^{(i)} \\ s_\alpha^{(i)} \end{pmatrix}$  — сукупність власних пар матриці  $\mathbf{M}^{(i)}$ , то матрицю  $\mathbf{P}$  можна представити у вигляді  $\mathbf{P} = \mathbf{E}^{(n)} \mathbf{\Lambda}^{(n)} \mathbf{E}^{(n-1)-1} \dots \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{\Lambda}^{(1)} \mathbf{E}^{(1)-1}$ . Отже, амплітуди  $\mathbf{b}^{(0)}$  й  $\mathbf{b}^{(n+1)}$  плоских хвиль різних типів, що поширюються в  $0$ -м і  $(n+1)$ -м півпросторах зв'язані рівністю  $\mathbf{b}^{(n+1)} = \mathbf{Q}\mathbf{b}^{(0)}$ , де  $\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{P} \mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{E}^{(n)} \mathbf{\Lambda}^{(n)} \dots \mathbf{\Lambda}^{(1)} \mathbf{E}^{(1)-1} \mathbf{E}^{(0)}$ .

Представимо матрицю  $\mathbf{Q}$  у блоковому виді, розбивши її на  $3 \times 3$ -підматриці,  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{ij})_{ij=1,2}$ . Вектори амплітуд  $\mathbf{b}^{(0)}$  і  $\mathbf{b}^{(n+1)}$  також розіб'ємо на трикомпонентні підвектори, що відповідають спадним і висхідним хвилям різних типів. У цих позначеннях справедливі рівності:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(n+1)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(0)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(n+1)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(0)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{b}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(i)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(i)} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21}$ ,  $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1}$ ,  
 $\mathbf{S}_{21} = -\mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21}$ ,  $\mathbf{S}_{22} = \mathbf{Q}_{22}^{-1}$ .

Матриця розсіювання  $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_{ij})_{j=1,2}$  містить коефіцієнти проходження й відбиття всіх типів хвиль, що поширюються вгору й вниз. Зокрема матриці  $\mathbf{S}_{11}$  й  $\mathbf{S}_{21}$  містять відповідно коефіцієнти заломлення й відбиття для пачки шарів при падінні плоскої хвилі з верхнього півпростору. Позначимо  $\Delta_{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_m} = \det(q_{ij})$  – мінор порядку  $m$  матриці  $\mathbf{Q}$ . Тут  $1 \leq i_1, j_1 \leq \dots \leq i_m, j_m \leq 6$ ,  $i = i_1, \dots, i_m$ ,  $j = j_1, \dots, j_m$ . Скориставшись співвідношеннями  $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{S}_{21}$ ,  $\mathbf{Q}_{22} \mathbf{S}_{21} = -\mathbf{Q}_{21}$ ,  $\mathbf{S}_{21} = (k_{i+3, j})_{i, j=1, \dots, 3}$ , одержимо формули для коефіцієнтів заломлення й відбиття:

$$k_{ij} = \frac{\Delta_{i456, j456}}{\Delta_{456, 456}}, k_{4j} = -\frac{\Delta_{456, j56}}{\Delta_{456, 456}}, k_{5j} = \frac{\Delta_{456, j46}}{\Delta_{456, 456}},$$

$$k_{6j} = -\frac{\Delta_{456, j45}}{\Delta_{456, 456}}, (1 \leq i, j \leq 3). \quad (3)$$

Слід зазначити, що замість використання матриці  $\mathbf{Q}$  можна скористатися зворотною матрицею  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1} = \Lambda^{(0)-1} \mathbf{E}^{(0)-1} \mathbf{E}^{(1)} \Lambda^{(1)-1} \dots \Lambda^{(n)-1} \mathbf{E}^{(n)-1} \mathbf{E}^{(n+1)} \Lambda^{(n+1)-1}$ , представивши її в блоковому виді  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{ij})_{i, j=1, \dots, 2}$ . Якщо позначити  $\tilde{\Delta}_{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_m}$  мінор порядку  $m$  матриці  $\mathbf{R}$ , то мо-

$$\Delta_k(\mathbf{Q}) = \Delta_k(\Lambda^{(n+1)}) \Delta_k(\mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{E}^{(n)}) \cdot \Delta_k(\Lambda^{(n)}) \dots \Delta_k(\Lambda^{(1)}) \cdot \Delta_k(\mathbf{E}^{(1)-1} \mathbf{E}^{(0)}) \Delta_k(\Lambda^{(0)}), \quad (5)$$

$$\Delta_k(\mathbf{R}) = \Delta_k(\Lambda^{(0)-1}) \Delta_k(\mathbf{E}^{(0)-1} \mathbf{E}^{(1)}) \cdot \Delta_k(\Lambda^{(1)-1}) \dots \Delta_k(\Lambda^{(n-1)}) \cdot \Delta_k(\mathbf{E}^{(n-1)-1} \mathbf{E}^{(n)}) \Delta_k(\Lambda^{(n+1)-1}). \quad (6)$$

Кожна  $\Delta_k$ -матриця з правої частини рівностей (5), (6) обчислюється окремо, а потім вони перемножуються. Точність обчислень підвищується у зв'язку з тим, що погано обумовлені лише матриці  $\Lambda^{(i)}$ . Однак, вони діагональні й при обчисленні їх  $\Delta_k$ -матриць (тобто мінорів матриці  $\Lambda^{(i)}$ ), операцій додавання виконувати не потрібно. Застосування  $\Delta_k$ -оператора до обчислення коефі-

жна показати, що справедливі формули для матриці  $\mathbf{S}_{11}$ , елементами якої є коефіцієнти заломлення, а також формули для коефіцієнтів відбиття ( $4 \leq i \leq 6$ ):

$$\mathbf{S}_{11} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_{123, 123}} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{23, 23} & -\tilde{\Delta}_{13, 23} & \tilde{\Delta}_{12, 23} \\ -\tilde{\Delta}_{23, 13} & \tilde{\Delta}_{13, 13} & -\tilde{\Delta}_{12, 13} \\ \tilde{\Delta}_{23, 12} & -\tilde{\Delta}_{13, 12} & \tilde{\Delta}_{12, 12} \end{pmatrix}, k_{i1} = \frac{\tilde{\Delta}_{23i, 123}}{\tilde{\Delta}_{123, 123}},$$

$$k_{i2} = -\frac{\tilde{\Delta}_{13i, 123}}{\tilde{\Delta}_{123, 123}}, k_{i3} = \frac{\tilde{\Delta}_{12i, 123}}{\tilde{\Delta}_{123, 123}} \quad (4)$$

На жаль, при використанні формул (3), (4) в області кутів і частот, де присутні неоднорідні хвилі, а також при наявності поглинання в шарах, виникають великі помилки. Зниження точності при обчисленні мінорів відбувається у зв'язку з поганою обумовленістю відповідних підматриць.

Для підвищення стабільності розрахунку коефіцієнтів заломлення й відбиття І. Данкін [2] запропонував використати метод  $\Delta_k$  – матриць. У даній статті цей метод узагальнений на шестивимірний формалізм і застосований для анізотропних середовищ. Суть методу полягає в тому, що кожній квадратній матриці розміру  $n \times n$  можна поставити в відповідність квадратну матрицю розміру  $m \times m$  ( $m = C_n^k$ ), елементами якої є всі  $k \times k$ -мінори ( $k \leq n$ ) при довільному, але фіксованому їхньому впорядкуванні. Застосовуючи  $\Delta_k$ -оператор до формул для розрахунку пропегаторів  $\mathbf{Q}$  і  $\mathbf{R}$ , одержимо, що

цієнтів відбиття й заломлення складається в заміні мінорів у формулах (3), (4) на відповідні розраховані елементи матриць  $\Delta_3(\mathbf{Q})$ ,  $\Delta_4(\mathbf{Q})$ ,  $\Delta_2(\mathbf{R})$ ,  $\Delta_3(\mathbf{R})$ .

Дисперсія швидкостей і присутність поглинання враховуються завданням комплексних швидкостей для різних типів хвиль, що поширюються в середовищі, відповідно до формули

$$v(\omega) = v_0 \left( 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)^{-1}, \quad (7)$$

де  $\omega_0$  – центральна частота сигналу,  $v_0$  – швидкість хвилі при частоті  $\omega_0$ ,  $Q$  – добротність. Параметри  $v_0$  і  $Q$  можуть бути різними для різних типів хвиль. Для коректного визначення коефіцієнтів відбиття і заломлення власні вектори  $\mathbf{v}_\alpha^{(i)}$  і власні числа  $s_\alpha^{(i)}$  матриці  $\mathbf{M}^{(i)}$  сортуються відповідно до типу хвилі й напрямку її поширення. Для цього виконується аналіз напрямків векторів

$$\mathbf{u}_\beta(x_p, y_p, z_p, t) = \sum_{s_1, s_2, \omega} \frac{\omega A(\omega) B_\alpha(s_1, s_2) k_{\alpha\beta}}{S_{3\alpha}} \exp[j\omega(s_1 x_p + s_2 y_p + s_3 z_p - t)] \mathbf{a}_{pol}, \quad (8)$$

де  $k_{\alpha\beta}$  – коефіцієнт відбиття або заломлення з матриці розсіювання;  $S_{3\alpha}$  – вертикальна повільність хвилі типу  $\alpha$ ;  $A(\omega)$  – амплітудна характеристика сигналу джерела;  $B_\alpha(s_1, s_2)$  – характеристика спрямованості джерела типу  $\alpha$  як функція горизонтальних повільностей;  $\mathbf{a}_{pol}$  – вектор поляризації хвилі типу  $\beta$ , знайдений у тім півпросторі, де розташований приймач.

групових швидкостей (вгору чи вниз) і знаків уявних частин фазових швидкостей.

Формування поля відбитих або заломлених хвиль типу  $\beta$  при збудженні коливачем джерелом типу  $\alpha$  виконується підсумовуванням по горизонтальним повільностям  $s_1$ ,  $s_2$  і круговим частотам  $\omega$  згідно з формулою:

**Чисельні приклади.** Застосування  $\Delta_k$  – оператора для збільшення точності розрахунку коефіцієнтів відбиття й проходження продемонструємо на прикладі періодичної пачки з 50-ма шарами, які мають потужності  $h = 10$  м. Для даної моделі, шари з непарними номерами є трансверсально-ізотропним середовищем з вертикальною вісю симетрії (VTI), щільністю  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>, описуються швидкостями  $qP$  й  $qSV$ -хвиль  $V_p = 3292$  м/с,  $V_s = 1768$  м/с, параметрами Томсона  $\varepsilon = 0.195$ ,  $\delta = 0.22$  і відповідають

відкладенням аргіліту. Шари з парними номерами моделюють вугільне відкладення зі швидкостями  $V_p = 1967$  м/с,  $V_s = 1311$  м/с. У цих шарах присутні поглинання з добротністю  $Q_p = Q_s = 10$ , а також тріщинуватість із інтенсивностями  $\Delta_N = 0.4$  й  $\Delta_T = 0.2$ , яка розташована в площинах, нахилених під кутом  $45^\circ$  до вертикалі. На рис. 1 зображені графіки, що обмежують області кутів  $\alpha$  падаючої хвилі й частот  $f$  сигналу, для яких абсолютна похибка обчислення коефіцієнта заломлення (1) і коефіцієнта відбиття (2) не перевершують  $10^{-3}$ . Розрахунок виконувався з подвійною точністю (діапазон чисел  $\pm 10^{\pm 308}$  з 15-ю десятковими знаками в дробовій частині) без використання  $\Delta_k$ -операторів. Відзначимо, що коефіцієнти відбиття обчислюються значно точніше. З рисунка видно, приміром, що для частоти  $f = 50$  Гц і кута  $\alpha = 45^\circ$  коефіцієнт заломлення без регуляризації розрахувати не можливо.

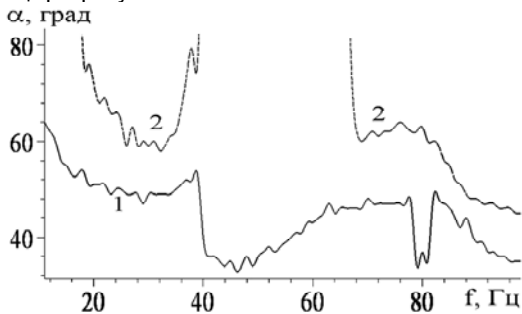


Рис. 1. Залежності граничних значень кутів від частоти на рівні погрішності  $10^{-3}$  при розрахунку: 1 – коефіцієнтів заломлення; 2 – коефіцієнтів відбиття

Наведемо приклад розрахунку трикомпонентного хвильового поля на основі методу Хаскела-Томсона для моделі середовища з двома горизонтальними шарами і порівняємо його з полем, отриманим 2.5D-моделюванням. Шари є трансверсально-ізотропними середовищами з горизонтальними осями симетрії, параметри яких визначаються швидкостями  $qP$  й  $qSV$ -хвиль, щільностями  $\rho$ , параметрами Томсона  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  і азимутами осей симетрії  $\varphi$ :  $V_{p1} = 3000$  м/с,  $V_{s1} = 2000$  м/с,  $\rho_1 = 2200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varepsilon_1 = 0,1$ ,  $\delta_1 = 0,15$ ,  $\gamma_1 = 0,2$ ,  $\varphi_1 = 0^\circ$ ;  $V_{p2} = 3500$  м/с,  $V_{s2} = 2400$  м/с,  $\rho_2 = 2300$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varepsilon_2 = 0,1$ ,  $\delta_2 = -0,1$ ,  $\gamma_2 = 0,2$ ,  $\varphi_2 = 45^\circ$ . Джерело має координати  $(300\text{м}, 0, 0)$  і генерує сигнал Ріккера з частотою  $f = 40$  Гц. Приймачі мають бічний винос  $y = 200$  м і розташовані уздовж лінії, паралельної осі  $OX_1$  від  $x_{300} = 300$  м до  $x_{1000} = 1000$  м. На рис. 2а зображене хвильове поле, розраховане кінцево-різницевою 2.5D-моделюванням. Моделювання по методу Хаскела-Томсона дозволило одержати розділено відбиті  $qP-qP$ ,  $qP-qSH$ ,  $qP-qSV$  – хвилі, компоненти яких зображені відповідно на рис. 2б – рис. 2г. Порівняння методів моделювання 2.5D (рис. 2а) і Хаскела-Томсона (рис. 2б-рис. 2г) показує, що хвильове поле, отримане другим методом більш просте для інтерпретації й, отже, метод Хаскела-Томсона можна використати при аналізі хвильових полів у складних геологічних умовах. На рис. 2б-рис. 2г точками  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  відзначені місця зміни поляризації хвилі. Зміна поляризації при моделюванні по методу Хаскела-Томсона відбувається більш різко в порівнянні з 2.5D-моделюванням.

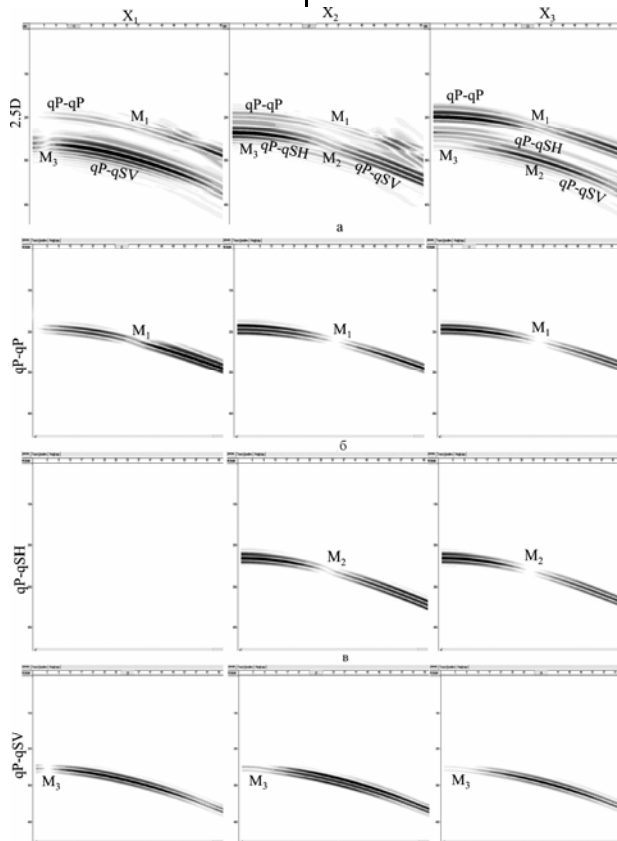


Рис. 2. Моделювання трикомпонентних полів відбитих хвиль різних типів по методу Хаскела-Томсона й порівняння їх з 2.5D-моделюванням: (а) 2.5D-моделювання; (б)  $qP-qP$ -хвилі; (в)  $qP-qSH$ -хвилі; (г)  $qP-qSV$ -хвилі

**Висновки.** Таким чином, розроблено ефективний і стійкий метод формування трикомпонентних просторових полів відбитих і минаючих хвиль для горизонтально-шаруватого анізотропного середовища з поглинанням на основі обчислення матриці розсіювання. Метод дозволяє враховувати інтерференційні явища, пов'язані з тонкошаруватістю, а також одержувати хвильове поле заданого типу на прийомі. Виведено формули для коефіцієнтів відбиття й проходження в термінах матричних мінорів і узагальнений метод  $\Delta_k$ -операторів для випадку анізотропного середовища при використанні шестивимірної формалізму. Застосування  $\Delta_k$ -операторів

при розрахунку коефіцієнтів відбиття й проходження значно підвищило їхню точність. Результати продемонстровані на простих прикладах.

1. Crampin S. The dispersion of surface waves in multilayered anisotropic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. — 1970. — V. 21, № 2. — P. 387-402.
2. Dunkin I.W. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seismol. Soc. Amer. — 1965. — V. 55, № 2. — P. 335-358.
3. Haskell N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bul. Seismol. Soc. Amer.— 1953.— V. 43, № 1. — P. 17-34.
4. Stroh A.N. Steady state problems in anisotropic elasticity // J.Math.Phys. — 1962. — V. 41. — P. 77-103.
5. Thomson W.T. Transmission of classic waves through a stratified solid material // J.Appl. Phys.— 1950.— V. 21, № 1.- P. 89-93.

Надійшла до редколегії 18.10.12

УДК 550.334

Д. Малицький, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук співроб.,  
О. Муйла, канд. фіз.-мат. наук, пров. інж., А. Павлова, асп.

### МАТРИЧНИЙ МЕТОД У ЗАДАЧАХ СЕЙСМОЛОГІЇ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук, проф. Г.Т. Продайводою)

У роботі представлено рішення прямої задачі для поля переміщень на вільній поверхні шаруватого ізотропного середовища з використанням матричного методу. Результати прямої задачі використано для визначення тензора сейсмічного моменту. Показано використання методу матричного пропагатора для анізотропного середовища.

The solution of the direct problem for the displacement field on the free surface of layered isotropic medium using the matrix method is presented. The results of the direct problem are used to determine the seismic moment tensor. The application of the method of matrix propagator for the anisotropic medium is shown.

**Пряма задача.** Розглядається поширення сейсмічних хвиль у вертикально-неоднорідному середовищі, яке моделюється системою однорідних ізотропних  $n$  шарів на  $(n+1)$  півпросторі. Вважаємо, що границі між шарами є паралельні. На кожній границі виконуються умови жорсткого контакту. Хвилі з  $(n+1)$  півпростору не повертаються (умова випромінювання). В однорідному ізотропному шарі на глибині  $H_s$  на деякій уявній границі розміщене джерело, представлене тензором сейсмічного моменту  $M_{ij}$ , який залежить від орієнтації розриву і від енергії в джерелі. Вважаємо, що середовище може бути анізотропним [5, 6].

Використовуючи матричний метод Томсона-Хаскела та інтегральні перетворення Фур'є-Бесселя-Мелліна отримано поле переміщення на вільній поверхні шаруватого середовища в далекій зоні (в циліндричній системі координат), враховуючи умову випромінювання і відсутності напружень на денній поверхні [3]:

$$\begin{pmatrix} u_z^{(0)} \\ u_r^{(0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty k^2 \mathbf{I}_i L^{-1} [M_i \mathbf{g}_i] dk, \\ u_\phi^{(0)} = \sum_{i=5}^6 \int_0^\infty k^2 J_i L^{-1} [M_i \mathbf{g}_{i\phi}] dk \quad (1)$$

де  $\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2$   $\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} g_{iz} \\ g_{ir} \end{pmatrix}$ ,

$J_5 = J_0$ ,  $J_6 = J_1$ ,  $L^{-1}[k\eta]$  – обернене перетворення Лапласа;  $J_1, J_0$  – функції Бесселя,  $k$  – хвильове число;  $\eta$  – змінна Мелліна;  $M_i$ -компоненти сейсмічного тензора.

Для тестування коректності розв'язку прямої задачі використовувались результати групи вчених, які входять до проекту Source Inversion Validation (SIV). Для відомого середовища моделювались синтетичні сейсмограми різними ми методами (рис. 1). Внизу наведено результат, отриманий за даною методикою. На рис. 1 синтетичні сейсмограми отримані за допомогою восьми методів для моделі середовища: дев'ять шарів на півпросторі, коли джерело сейсмічних хвиль розміщено на глибині

10 км, а часова функція у вогнищі є  $\Pi$ -імпульс протяжністю 0,2 с. Порівняльний аналіз синтетичних сейсмограм показує, що запропонована авторами модифікація матричного методу для визначення поля переміщень на вільній поверхні шаруватого півпростору може бути використана для моделювання хвильових полів.

**Обернена задача.** В сучасній сейсмології задачам визначення параметрів вогнища приділяють менше уваги, ніж характеристикам середовища. Однак, вони є важливими для розуміння фізичних процесів у вогнищі, оскільки, неможливо без визначення, інтерпретації та аналізу параметрів вогнища розв'язувати актуальні задачі інженерній сейсмології чи інші проблеми. Тому, розроблення нових методик та алгоритмів для обернених задач сейсмології щодо джерела залишаються актуальними і надзвичайно важливими завданнями. На даний час, не має загального та надійного підходу для вирішення таких задач, тому, що неможливо врахувати всі складні ефекти при моделюванні хвильових процесів під час поширення сейсмічних хвиль в неоднорідних середовищах. Для спрощення цієї проблеми пропонується корисну інформацію про вогнище землетрусу шукати в прямих P і S-хвилях, виділяючи із повного хвильового поля ту частину, яка відповідає за поширення тільки цих хвиль, тобто вектор  $\mathbf{U}_s^{(0)}$ . Дана методика дозволяє розглядати джерело розподіленим в часі та, визначати часову функцію вогнища STF. Отже, сейсмічний тензор у спектральній області знайдемо із рівняння [2]:

$$\mathbf{U}_s^{(0)} = \left( U_s^{(0)p}, U_s^{(0)s}, U_y^{(0)p}, U_y^{(0)s}, U_z^{(0)p}, U_z^{(0)s} \right)^T = \mathbf{K} \cdot \mathbf{M} \quad (2)$$

де матриця  $\mathbf{K}$  містить фізичні параметри середовища, тобто швидкості поширення P та S хвиль, а також густини кожного шару.

Маємо систему шести алгебраїчних рівнянь із шістьма невідомими, що є компонентами тензора сейсмічного моменту  $M_{ij}$  ( $ij=xz, yz, zz, xx, yy, xy$ ). Із нього отримуємо компоненти тензора сейсмічного моменту:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}_s^{(0)}, \quad (3)$$