

УДК 550.831+838

Ю. Дубовенко, канд. фіз.-мат. наук

**ПОЧАТКОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ СКЛАДНОГО ЩІЛЬНІСНОГО КОНТАКТУ***(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук І.М. Корчагіним)*

*Запропоновані аналітичні моделі гравітаційного поля та горизонтально-шаруватого геологічного середовища з кількома густинними межами розділу шарів під поверхнею. Модель поля отримана з рівняння сили тяжіння, що випливає з розгляду плоского нормального потенціалу сили тяжіння у локальному околі точки вимірювань. Введено нову модель середовища – клас Чорного контактних поверхонь. Подано нову схему визначення початкового наближення густинного контакту і його асимптот у багатшаровому геологічному середовищі за допомогою кількох 'контактних' алгоритмів.*

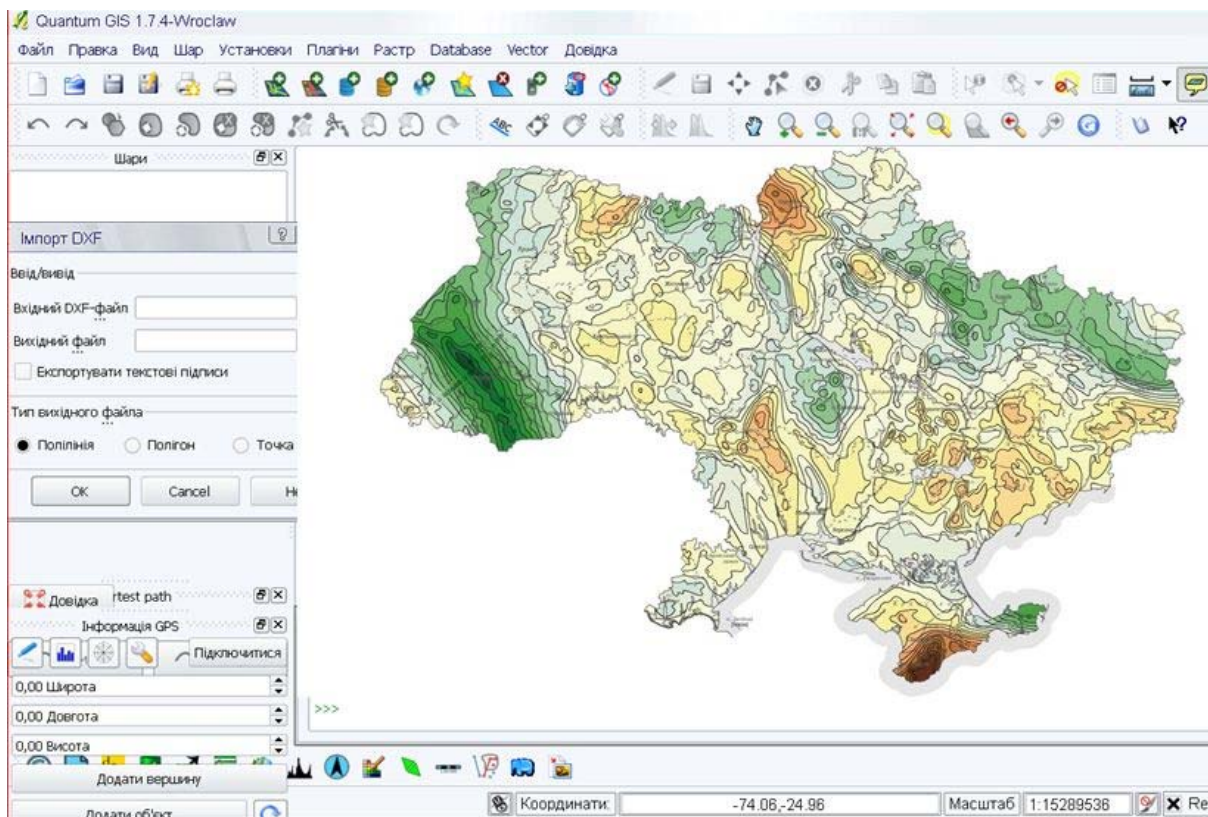
*There are offered analytical models for the gravity field and for the horizontally layered geological media with a several density interfaces beneath the surface. The gravity model is acquired from the gravity equation, derived from 2-D normal gravity potential view in a local neighborhood of the points measured. A new media model added – a Chorny contact surfaces class. A new scheme for definition is given for the starting approximation of density interface and its asymptotes in the multilayered geological media by means of several 'contact' algorithms.*

*"Основний напрям наукового прогресу – створення загальних математичних моделей в геології, геофізиці і надалі – створення геолого-математических теорій..." (М.М. Елланський, 2003, www.mmell.narod.ru)*

**Вступ.** Нині чималі зусилля геофізиків спрямовані на переінтерпретацію картографічного матеріалу, отриманого за даними зйомок 30-річної давності, вважаючи на різке обмеження обсягу геологорозвідки. Проте, через підвищені вимоги до точності і ефективності інтерпретації, така переобробка великих обсягів геофізичних даних потребує нових підходів до чисельного обґрунтування методів, використаних при підготовці і обробці подібного картографічного матеріалу. Цілком логічно об'єднати розвинені на попередньому етапі розвитку геофізики математичні конструкції із сучасним інтерактивним програмним забезпеченням, щоб комплексно вирішити проблеми оцифрування, візуалізації і тлумачення геофізичних даних. Проблему тлума-

чення даних, найважливіша для застосувань (втім, тісно переплетена на рівні первинної обробки із першими двома), вирішують останнім часом у руслі перебудови аналітичної і обчислювальної бази теорії інтерпретації потенціальних полів, яка забезпечує становлення нової парадигми в теорії і практиці інтерпретації.

Сучасні методи обробки геофізичних даних розвиваються із прицілом на створення цифрових аналітичних моделей поля і геологічного середовища і високоточних алгоритмів, орієнтованих на застосування в пакетах ГІС, особливо при відображенні вхідної інформації і результатів її трансформації та зіставленні із апріорною інформацією, також поданою в графічному виді (т. зв. візуальна інтерпретація, рис. 1).



**Рис. 1.** Карта гравітаційних аномалій України в середовищі вільно поширюваної ГІС Quantum GIS

Власне, "пошарова" обробка являє новий етап якісної інтерпретації, в якому можливості подання інформації у вигляді електронного журналу вимірів [13] можна використати для попередньої обробки ін-

формації в середовищі спеціалізованих пакетів загального і спеціального призначення. Як приклад такої попередньої обробки, можна вказати процедури: виділення регіонального фону, наприклад, шляхом міні-

мізації нев'язки між набором даних і деяким поліномом в середовищі Matlab; попередня фільтрація вимірів в середовищі Excel; знаходження особливих точок поля методом зворотної інтерполяції полінома Лагранжа в Maple, редукції поля за допомогою алгоритмів В.М. Страхова, реалізовані в Python, і т.п. Одним із най-

більш вдалих прикладів цифрової якісної інтерпретації можна вважати приклад обробки значень поля сили тяжіння в зв'язці ПЗ MapInfo + CorelDraw (рис. 2) [13], що в жодному разі не виключає їх заміни в осяжному майбутньому на open-source аналоги.

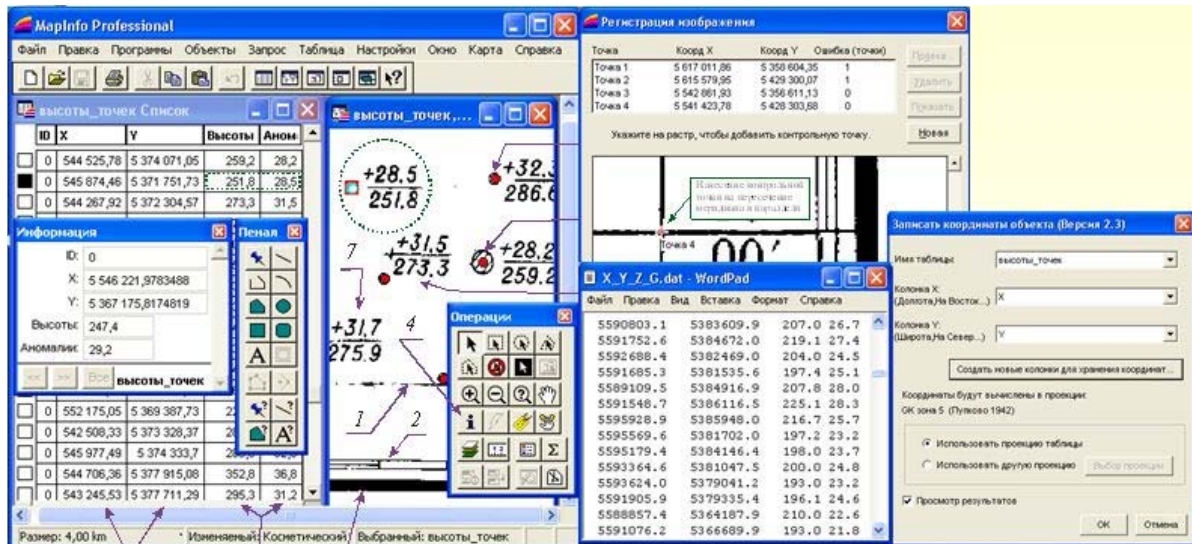


Рис. 2. Попередня обробка гравітаційних аномалій в зв'язці MapInfo + CorelDraw

Проте ми торкнемося іншого напрямку у рамках детермінованого підходу до інтерпретації даних потенціальних полів – розробки аналітичних конструкцій геофізичного поля і геологічного середовища. Щодо математичних конструкцій поля, відсилаємо зацікавлених читачів до праці [12], а серед моделей середовища автору близькі моделі густини типу контакту, одну з яких пропонуємо вашій увазі.

В розробці таких конструкцій заради підвищення точності інтерпретації даних геофізики обов'язково слід врахувати умови адекватності постановок сучасним вимогам до отримання вихідних геофізичних даних і їх обробки. В цілому, суть цих вимог така:

- висока точність і технологічність алгоритмів і програм, їх переносимість;
- адаптація моделей поля до задання початкових вимірів на коротких профілях;
- адаптація моделей середовища до його складного (нелінійного неоднорідного) стану.

Визначення контакту у відомих моделях середовища Страхова, Нумерова, Маловичка [11] замкнена на обчислення різниці ундуляцій деякої теоретичної моделі середовища від деякого опорного її елемента, від якого ці ундуляції не надто сильно ухиляються. Каверза полягає в тому, що при цьому необхідно заздалегідь знати деякі елементи геометрії (глибину, форму, орієнтацію) цього опорного елемента (модельного тіла або контакту), як початкового наближення ітерацій. Від вибору вдалого початкового наближення залежить, в цілому, ефективність будь-якого із існуючих ітераційних алгоритмів [7].

Ми вивели для горизонтально-шаруватого середовища з кількома густинними межами шарів аналітичні моделі поля і геологічного середовища, в яких ці опорні елементи розраховуються в процесі ітерацій. Модель поля є рівнянням сили тяжіння, і отримане з розгляду нормального потенціалу сили тяжіння в локальному околі точки вимірів в двовимірному поданні. Розміри локального околу істотно залежать від розмірів тяжіючої області і точності апроксимації нормальної

складової потенціалу [5].

**Аналітична модель поля.** Нехай у тривимірному необмеженому Евклідовому просторі  $E^{(3)}$  дві області  $G_1$  і  $G_2$  вкладені одна в одну і відстань між їх межами  $\partial G_1$  і  $\partial G_2$  –  $\text{dist}(\partial G_1, \partial G_2) \geq 0$  при  $G_1 \cap G_2 = G_2$ . В області  $G_2$  початок координат і точки області  $G^- = G_1 \cup \bar{G}_2$ ,  $\bar{G}_2 = G_2 \cup \partial G_2$ , позначмо через  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , а точки замкнутої необмеженої області  $\bar{G}^+ = E^{(3)} \setminus G$ ,  $\partial G^+ = \partial G_1$  – через  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , тоді  $\text{dist}(x, \xi) = |x - \xi| = \left( \sum_{i=1}^3 (x_i - \xi_i)^2 \right)^{1/2} = \gamma(x, \xi)$ .

Нехай область  $\bar{G}_2$  заповнена масами з щільністю  $\delta_2(\xi)$ , а область  $G_0 = G_1 \setminus \bar{G}_2$  – масами з щільністю  $\delta_1(\xi)$  (рис. 3). Позначимо через  $\bar{n}(x)$  одиничну нормаль до поверхні  $\partial G^+$ , зовнішню щодо  $G^-$ ; тоді нормальна складова сили тяжіння дорівнює

$$u(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial \bar{n}(x)} = f \int_G \delta(\xi) \frac{\partial \gamma^{-1}(x, \xi)}{\partial \bar{n}(x)} d\xi, \quad (1)$$

де  $\delta(\xi) = \delta_2(\xi) - \delta_1(\xi)$ ,  $\xi \in \bar{G}_2$ ,  $\delta(\xi) = 0$ ,  $\xi \in \bar{G}_0$ ,  $f$  – гравітаційна константа.

Взагалі кажучи, силу тяжіння описує функція

$$u(x) = |\text{grad}V(x)| = f \int_G \delta(\xi) |\text{grad}_x r^{-1}(x, \xi)| d\xi, \quad (2)$$

оскільки значення сили тяжіння – це значення модуля градієнта потенціалу [4], а не складові тяжіння, у тому числі і (1).

Спростимо вираз (1), розглянувши малий локальний окіл  $\Omega$  точки  $X$ . У цьому околі, з відомою долею наближення [5], ділянку  $\partial G = \Omega \cap \partial G^+$  межі  $\partial G^+$  вважаємо "необмеженою" площиною:

$$\partial G = \{x : x_3 = x_3(x_1, x_2) = \text{const}, (x_1, x_2) \in S_0\},$$

де  $S_0 = \Omega \cap \partial G^+$ . Розташували в цій площині прямокутну систему координат так, щоб вісь  $ox_3$  була перпендикулярна до площини, отримуємо

$$\bar{n}(x) \equiv \bar{z}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$\Omega^+ = \Omega \cap G^+, \quad \Omega^- = \Omega \cap G^-, \quad \partial G = \Omega \cap \partial G^+.$$

Нехай в околі  $\Omega^-$  функції  $\delta_1(\xi) = \text{const}$ ,  $\xi \in \bar{G}_2 \subset \Omega^-$ ,  $\delta_2(\xi) = \text{const}$ ,  $\xi \in \Omega^- \cap G_1$ , і  $\delta = \delta_2 - \delta_1$ , а  $\bar{G}_2$  – власна підмножина  $\Omega^-$ . Фактичні розміри області  $\Omega$  залежать, передусім, від розмірів тяжіючої області  $\bar{G}_2$ , що вивчається, і точності апроксимації виразу [5], тобто

$$\left| f \int_{G^-} \delta(\xi_1) \frac{\partial \gamma^{-1}(x_1, \xi_1)}{\partial \bar{n}(x)} d\xi_1 - f \sigma \int_{G^-} \frac{\partial \gamma^{-1}(x_1, \xi_1)}{\partial x_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Якщо  $\varepsilon > 0$  досить мале, то  $\Omega$  вибрана вдало. Межу  $\Omega$  вибираємо досить гладкою, для якої  $\partial G_2 = \{x: x_i = x_i(x_j, x_k), (x_j, x_k) \in \partial S, i, j, k = 1, 2, 3 \cup \partial S_i = \partial G_2; x_i \in C^{(4)}(\partial S)\}$ .

За таких припущень про середовище отримуємо потенціал тяжіння

$$u(x_{1,2,3}) \equiv \frac{\partial V(x_{1,2,3})}{\partial x_3} = k \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sum_{i=1}^3 (\xi_i - x_i)^2}, \quad k = f \sigma \quad (4)$$

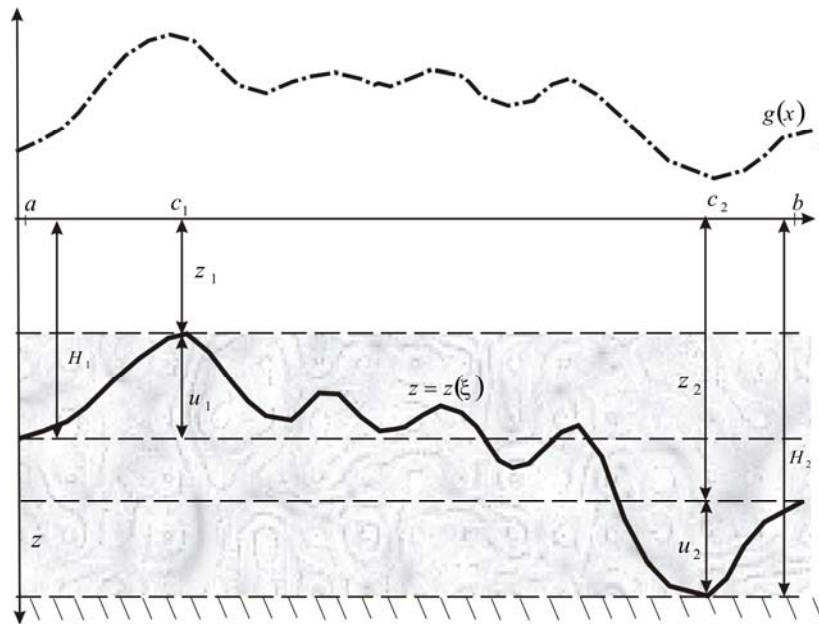


Рис. 3. Модель контактного середовища в класі Чорного

Якщо маси, зосереджені в  $\Omega^-$ , генерують аномалії  $u(x_i)$ , витягнуті, скажімо, уздовж осі  $ox_2$ , їх краще вимірювати по профілях, паралельних  $ox_1$ . Формула (4) малоприматна для обробки таких вимірів. Проінтегруємо вираз (4) по  $\xi_2$  і після ряду аналітичних перетворень отримуємо:

$$u(x_1, x_3) = 2k \iint_S \frac{\xi_3 - x_3}{(\xi_2 - x_1)^2 + (\xi_3 - x_3)^2} d\xi_1 d\xi_3,$$

де  $S$  – проекція  $\bar{G}_2$  на площину  $ox_1x_3$ ,  $k = f \sigma$ . При  $x_3 = 0$ ,  $\xi_3 = \xi_3(\xi_1)$ ,  $a \leq \xi_1 \leq b$  отримуємо модель контакту у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= k \int_a^b d\xi_1 \int_{\xi_3^{(1)}(\xi_1)}^{\xi_3^{(2)}(\xi_1)} \frac{2\xi_3}{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^2} d\xi_3 = \\ &= k \int_a^b \ln \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(2)}(\xi_1)}{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(1)}(\xi_1)} d\xi_1, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\xi_3^{(1)} = \xi_3^{(1)}(\xi_1)$  і  $\xi_3^{(2)} = \xi_3^{(2)}(\xi_1)$ ,  $a \leq \xi_1 \leq b$  – криві, що обмежують знизу і згори тяжіючу плоску область  $S$ .

**Аналітична модель середовища.** Нехай  $G^-$  – горизонтальна смуга, обмежена згори і знизу прямими  $z_1 = h_1$ ,  $z = h_2$ ,  $0 < h_1 < h_2 < +\infty$ , яка розділена на 2 шари із щільністю  $\delta_1$  і  $\delta_2$  нескінченно гладкою кривою  $\partial G^-$ , зірчастою щодо нескінченно віддаленої точки, з асимп-

тотою  $z = h$ ,  $h_1 < h < h_2$ , причому

$$|z(\xi) - h| \leq k |\xi|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad |\xi| > \xi_0, \quad z(\xi) \in \partial G \quad (6)$$

Якщо значення  $h$  і величина стрибка щільності  $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$  відомі, то межа  $\partial G$  розділу шарів за зовнішнім полем відновлюється однозначно. Розв'язок оберненої задачі про контактну поверхню з класу (6) єдиний [8], якщо відомі стрибок щільності  $\Delta\delta$  і скінченна дуга кривої  $z(\xi)$  із (6).

Введемо спеціальне позначення для класу (6)  $Ch^{(1,\beta)}(-\infty, \infty)$  і назовемо його класом Чорного – на честь вітчизняного науковця-геофізика А.В. Чорного, який заклав підвалини чіткого алгоритму дослідження функціональних множин в царині контактних поверхонь. Очевидно, що

$$\begin{aligned} Ch^{(1,\beta)}(-\infty, \infty) &\subset St^{(1,\beta)}(-\infty, \infty), \\ St^{(1,\alpha)}(a, b) &\subset St^{(1,\alpha)}(-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (7)$$

У такій постановці важливою є проблема розділення полів, яка є самостійною задачею і виходить за рамки цієї статті.

Щоб розв'язати нелінійне інтегральне рівняння (5), яке описує контакт, обмежений асимптотами у плоскій області  $G_2$ , його слід тлумачити як функціонал щодо шуканої функції  $x_3(\xi_1)$  на деякому лінеалі. Для цього функціоналу нескладно знайти приріст  $\Delta g(x, z) = g(x, z + h) - g(x, z)$ , отримуючи



$$\Delta g(x, z) = -\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi) d\xi - \int_a^b \left\{ \frac{[(\xi-x)^2 - z^2(\xi)]}{[(\xi-x)^2 + z^2(\xi)]^2} + \frac{2}{3} \left[ -\frac{3\delta z(\xi)}{\{(\xi-x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^2} + \frac{4\delta z(\xi)}{\{(\xi-x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^3} \right] h(\xi) \right\} h^2(\xi) d\xi,$$

де  $\delta z(\xi) = z(\xi) + \theta(\xi) h(\xi)$ . Звідси

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi) d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + z^2(\xi)}{(\xi-x)^2 + [z(\xi) + h(\xi)]^2} d\xi + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z^2(\xi)]^2} h^2(\xi) d\xi + \frac{2}{3} \int_a^b \frac{\delta z(\xi) \{ \delta z^2(\xi) - 3(\xi-x)^2 \}}{\{(\xi-x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^3} h^3(\xi) d\xi. \quad (8)$$

**Відновлення контакту.** На основі (8) можна збудувати кілька способів відновлення контакту  $x_3(\xi_1)$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , за заданим полем  $g(x)$ ,  $c \leq x \leq d$ ,  $[a, b] \subset [c, d]$ ,  $\text{mes}[a, b] < \text{mes}[c, d]$ .

**Спосіб Ньютона.** Вважаючи відомими  $a, b, H$ , в результаті розкладу (14) в ряд по  $x_3(\xi_1)$ , та подальших перетворень знаходимо  $\Delta z(\xi) = z_{n+1}(\xi) - z_n(\xi)$

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} z_{n+1}(\xi) d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} d\xi - g(x) + \int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} g(\xi) d\xi \geq (1-c) \ln \frac{(1-c)^2 + H^2}{(1-c)^2 + z_n^2} + c \ln \frac{c^2 + H^2}{c^2 + z_n^2} + 2H \arctg \frac{H}{H^2 - c(1-c)} - 2z_n \arctg \frac{z_n}{z_n^2 - c(1-c)}. \quad (9)$$

**Альтернатива.** Якщо вираз (8) записати точною до  $h^2(\xi)$  та  $h^3(\xi)$ , то після ряду перетворень отримаємо, відповідно, способи "контакт 1" та "контакт 2"

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x). \quad (10)$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)]^2} h_n^2(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Рівняння (9-11) можна вирішувати ітеративно, якщо задано  $z_0(\xi) : z_1(\xi) = z_0(\xi) + h_0(\xi)$ .

Проте можна одночасно визначати не лише контакт  $z = z(\xi)$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , але і "асимптоту"  $H = \text{const}$ , модифікувавши дещо вказані вище способи.

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} \Delta z_n(\xi) d\xi - \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} \Delta H_n d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H_n^2}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} d\xi - g(x). \quad (12)$$

$$f'(z_n) \neq 0 \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x). \quad (13)$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} \tau_{n+1} d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) - \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - H_n^2}{[(\xi-x)^2 + H_n^2]^2} \tau_n^2 d\xi + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)]^2} h^2(\xi) d\xi. \quad (14)$$

**Початкове наближення контакту.** Нехай крива  $g(x)$ ,  $c \leq x \leq d$  має на  $[c, d]$  кілька екстремумів у точках  $c_i \in [c, d]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Оскільки ми поклали  $\delta > 0$ , то кожному екстремуму відповідає однойменний екстремум  $z = z(\xi)$ ,  $a \leq \xi \leq b$ . Визначимо в множині  $\{\text{extr } g(x)\}$  найбільший і найменший екстремуми (най-

більший максимум  $z_s$  і найменший мінімум  $z_i$ ), тобто  $g_s = g(c_i) = \sup_{[c, d]} \{\text{extr } g(x)\}$ ,  $g_i = g(c_j) = \inf_{[c, d]} \{\text{extr } g(x)\}$ .

Позначимо через  $z_s = z(c_i) = \sup_{[c, d]} \{\text{extr } z(\xi)\}$ ,  $z_i = z(c_j) = \inf_{[c, d]} \{\text{extr } z(\xi)\}$  відповідні екстремуми  $z$ . Тут

абсциси  $g_s$  і  $z_s$  ( $g_i$  і  $z_i$ ) співпадають, що не завжди вірно, але в даному разі так. Початкове наближення контакту можна задавати, щонайменше, двома способами (Oz спрямована вгору)

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + \Delta g(\xi, H_0), \quad a \leq \xi \leq b, \quad (15)$$

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + k_0 \Delta g(\xi), \quad a \leq \xi \leq b, \quad (16)$$

де  $H_0 > 0$  – константа, що задається, – "асимптота" функції  $z_0$  на лівому кінці проміжку  $[a, b]$ ,  $\Delta g(\xi) = g(\xi) - g(a)$ ,  $\Delta g(\xi, H_0)$  – аналітично продовжене значення  $\Delta g(\xi)$  на рівні  $-H_0$ ,  $k_0 = k(H_0)$  – коефіцієнт, що підлягає визначенню.

Визначення  $k_0$  у підсумку зводиться до визначення початкових  $z_s$  і  $z_i$  при заданих  $H$ ,  $g_s$  і  $g_i$ :

$$g_s \geq (1-c) \ln \frac{(1-c)^2 + H^2}{(1-c)^2 + z_s^2} + c \ln \frac{c^2 + H^2}{c^2 + z_s^2} + 2H \arctg \frac{H}{H^2 - c(1-c)} - 2z_s \arctg \frac{z_s}{z_s^2 - c(1-c)}. \quad (17)$$

$$g_i \leq (1-c_j) \ln \frac{(1-c_j)^2 + H^2}{(1-c_j)^2 + z_i^2} + c_j \ln \frac{c_j^2 + H^2}{c_j^2 + z_i^2} + 2H \arctg \frac{H}{H^2 - c_j(1-c_j)} - 2z_i \arctg \frac{z_i}{z_i^2 - c_j(1-c_j)}. \quad (18)$$

Утворимо функцію

$$f(z) = (1-c) \ln[(1-c)^2 + z^2] + c \ln(c^2 + z^2) + 2z \arctg \frac{z}{z^2 - c(1-c)} - (1-c) \ln[(1-c)^2 + H^2] - c \ln(c^2 + H^2) - 2H \arctg \frac{H}{H^2 - c(1-c)} + g. \quad (19)$$

Наближення  $z_n$  якогось із значень  $z_s$  і  $z_i$  визначимо за схемою Чебишева [1]:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f''(z_n) f^2(z_n)}{2f'^3(z_n)}. \quad (20)$$

Процес (20) при вдалому виборі  $z_n$  швидко збігається: 3-4 ітерації для отримання  $z^{(0)}$  з точністю до  $10^{-7}$ , що узгоджується з результатами, отриманими в [1].

Обчисливши таким чином для кожного заданого значення  $H_i^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , лівої "асимптоти" шуканої кривої  $z = z(\xi)$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , значення параметрів  $z_s^{(i)}$ ,  $z_i^{(i)}$ ,  $H_i^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , визначимо

$$u^{(i)} = z_s^{(i)} - H_i^+, \quad u_{(i)} = z_i^{(i)} - H_i^-, \quad \Delta H_i = H_i^+ - H_i^-,$$

$\delta g = g(b) - g(a)$ ,  $\delta g_{\max} = g_s - g(a)$ ,  $\delta g_{\min} = g_i - g(a)$ , і знайдемо шукані коефіцієнти

$$k_0^{(i)} = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^e k_j^{(i)},$$

$$\text{де } k_1^{(i)} = \frac{|u^{(i)}|}{|\delta g_{\max}|}, \quad k_2^{(i)} = \frac{|u_{(i)}|}{|\delta g_{\min}|}, \quad k_3 = \frac{|\Delta H|}{|\delta g|}.$$

Відшукування початкових наближень на конкретних моделях контактів буде матеріалом наступної статті.

**Висновки.** Введено в науковий обіг нові аналітичні конструкції для обчислення складних контактів у вигляді виразів (17), (18). Для їх обчислення запропоновано процес простих ітерацій (20). При чисельному моделюванні вказані вище конструкції виявляють кращу збіжність при обчисленні за способом Ньютона (20) порівняно із класичними прикладами [3], але їх практична ефективність вимагає перевірки на підготовленому матеріалі польових гравіметрових знімачів..

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. – М., 1960. – С. 140–143; 2. Гласко В.Б., Страхов В.Н. Проблема единственности в некоторых обратных задачах геофизики // Проблемы матем. физики и вычисл. математики. – М., 1977. – С. 95–107; 3. Гравиразведка: Справочник геофизика. Москва, 1990; 4. Дубовенко Ю.И. Задача Алексидзе для восстановления потенциала силы тягіння // Геофиз. журн. – 2009. – 31, № 6. – С. 132–139; 5. Дубовенко Ю.И. Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций // Там же. – 2011. – 33,

№ 1. – С. 136–146; 6. Остромильський А.Х. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // ЖВМ и МФ. – 1970. – 10, № 2. – С. 352–361; 7. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К., 1978; 8. Страхов В.Н. К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1974. – № 6. – С. 39–60; 9. Филатов В.Г. О единственности решения некоторых обратных задач гравиразведки // Физика Земли. – 1974. – №11. – С. 97–101; 10. Чередищенко В.Г. К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // Докл. АН СССР, сер. Б. – 1978. – 240, №5, с. 1032–1035; 11. Чорний А.В., Дубовенко Ю.И. Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофиз. журн. – 2002. – 24, № 3. – С. 77–92; 12. Якимчик А.И. К вопросу о построении региональных аналитических аппроксимаций элементов аномальных гравитационных полей // Там же. – 2009. – 31, № 1. – С. 121–124; 13. Якимчик А.И. Технология оцифровки карт фактического материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDraw // Там же. – 2010. – 32, № 3. – С. 112–124.

Надійшла до редколегії 24.09.12

УДК 550.3 (519.21)

3. Вижва, доц.

## СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕЙСМІЧНОГО ШУМУ У ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ ЗМІННИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром геол. наук, доц. О.Є. Кошляковим)

*Розглянуто задачу статистичного моделювання випадкових процесів та полів у двовимірній області змінних для впровадження у сейсмологічні дослідження для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Побудовано моделі та сформульовано алгоритми чисельного моделювання реалізацій випадкових процесів та полів на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для генерування адекватних реалізацій шуму сейсмограм у випадках однієї та двох змінних.*

*The problem of random processes and fields in 2D space statistical simulation has been considered for the introducing into seismic research into frequency characteristics of geology environment. Statistical models of random processes and fields and numerical simulation algorithms have been developed on the basis of modified Kotelnikov-Shannon interpolation sums for generating of adequate realizations 1-D and 2-D seismic noise.*

При вивченні явищ і показників, які залежать від просторово-часових координат, часто буває важко, а іноді й зовсім неможливо визначити закономірності їх змінюваності на основі фізичних процесів, які обумовлюють ці явища. Нескладні фізичні методи дають можливість побудувати відносно просту модель загального тренда. При деталізації опису даних спостережень спостерігається різке збільшення числа параметрів. Такі складні детерміновані моделі не дають інформації про характер статистичної залежності всередині масиву даних досліджень, а також про їх просторово-часовий розподіл. Ця інформація складається із закономірностей самого явища та впливу різних зовнішніх чинників на показники вимірювань, які отримано в результаті спостережень. Альтернативний підхід – статистичний опис просторово-часового розподілу даних, який несе в собі інформацію як про сам процес дослідження, так і про параметри зовнішніх впливів [1].

У статті розглянуто задачу вдосконалення алгоритму [8] статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів та полів на площині на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для впровадження в сейсмологічні дослідження з потребами визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками. Побудовано моделі та на основі оцінок похибок середньоквадратичного наближення випадкових процесів і полів, сформульовано та удосконалено алгоритми для чисельного моделювання реалізацій таких процесів та полів, адекватних реалізаціям шуму сейсмограм у випадках однієї та двох змінних.

Реалізації статистичного моделювання випадкових процесів важливо використовувати на практиці для виділення сейсмічного шуму від зовнішнього впливу і для того, щоб отримати відповідні оцінки частотних харак-

теристик геологічного середовища області спостереження. Вказані оцінки необхідно враховувати при будівництві об'єктів різного призначення з метою забезпечення надійності споруд.

Для статистичного моделювання спостережених шумів сейсмограм використовувався метод, розроблений на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для випадкових процесів та випадкових полів у двовимірній області спостережень з обмеженим спектром на регулярній сітці спостережень [2, 3].

Нехай  $\xi(t)$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) – стаціонарний випадковий процес з обмеженим спектром, який задано на рівномірній решітці спостережень. Змінна  $t$  може бути інтерпретована, як час спостереження випадкового процесу. Нехай відомі такі його статистичні характеристики, як математичне сподівання (припустимо, що  $E\xi(t)=0$ ) та дисперсія –  $B(0)$ . Побудовано [2] статистичну модель  $\xi_N(t)$  ( $0 < t < T$ ,  $T$  – довжина інтервала спостереження випадкового процесу) для такого випадкового процесу  $\xi(t)$  вигляду:

$$\xi_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \frac{\sin \alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})}, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – параметр, який визначається за частотою Найквіста;  $N \in \mathbb{N}$  – деяке натуральне число, з яким пов'язана кількість доданків ряду в моделі;  $\{c_k\}$ ,  $k = -N, N$ ; – послідовність гауссівських випадкових величин, які мають такі статистичні характеристики:

$$M_{c_k} = 0; D_{c_k} = E c_k^2 = D_{c_k} = B\left(\frac{k\pi}{\alpha}; \frac{k\pi}{\alpha}\right), \quad k = -N, N \quad (2)$$

де  $\left\{c_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\}$ ,  $k = -N, N$  – послідовність відліків (значень)

випадкового процесу  $\xi(t)$ ,  $B(x, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  – коваріаційна матриця реалізації випадкового процесу  $\xi(t)$ .