ГЕОЛОГІЧНА ІНФОРМАТИКА

УДК 550.3 (519.21)

З. Вижва, д-р фіз.-мат. наук, доц.,
E-mail: zoya_vyzhva@ukr.net
К. Федоренко, асп., E-mail: slims_mentol@mail.ru
А. Вижва, асп., E-mail: motomustanger@ukr.net
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Геологічний факультет, вул. Васильківська, 90, м. Київ, 03022, Україна

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕЙСМІЧНОГО ШУМУ В БАГАТОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ ЗМІННИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром геол. наук, с.н.с. М.І. Орлюком)

Робота присвячена подальшій розробці теорії та методів статистичного моделювання випадкових процесів та полів на основі їх спектральних розкладів та модифікованих інтерполяційних рядів Котельникова-Шеннона, а також застосування таких методів у задачах геофізичного моніторингу навколишнього середовища. Розглянуто задачу статистичного моделювання випадкових полів у багатовимірній області змінних (однорідних за часом та однорідних ізотропних за n іншими змінними) при впровадженні у сейсмологічні дослідження для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Побудовано модель та сформульовано алгоритм чисельного моделювання реалізацій таких випадкових полів на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для генерування адекватних реалізацій шуму сейсмограм. В статті вивчаються дійснозначні випадкові поля - однорідні за часом та однорідні ізотропні за просторовими змінними в багатовимірному просторі. Розглядається проблема апроксимації таких випадкових полів випадковими полями з обмеженим спектром. Для випадкових полів з обмеженим спектром встановлено аналог теореми Котельникова-Шеннона. Отримано оцінки середньоквадратичного наближення випадкових полів у просторі моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу та інтерполяційної формули Котельникова-Шеннона. Розроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними в багатовимірному просторі випадкових полів з обмеженим спектром. Наведено теореми про оцінки середньоквадратичної апроксимації однорідних за часом та однорідних ізотропних за n іншими змінними випадкових полів частковими сумами рядів спеціального вигляду, за допомогою яких сформульовано алгоритм чисельного моделювання реалізацій таких випадкових полів. Розглянуто способи проведення спектрального аналізу згенерованих реалізацій шуму сейсмограм. Розроблено універсальні методи статистичного моделювання (методи Монте-Карло) багатопараметричних сейсмологічних даних, які дають можливість вирішити проблеми генерування реалізацій шуму сейсмограм на площині та у тривимірному просторі на сітці необхідної детальності та регулярності.

Ключові слова: статистичне моделювання, спектральний аналіз, сейсмічний шум.

Вступ. У статті розглянуто задачу статистичного моделювання реалізацій випадкових полів із обмеженим спектром, які залежать від часу та задані у багатовимірній області змінних, для впровадження в сейсмологічні дослідження з потребами визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками. Побудовано модель та на основі оцінок похибок середньоквадратичного наближення таких випадкових полів цією моделлю сформульовано алгоритм для чисельного моделювання реалізацій полів, адекватних реалізаціям шуму сейсмограм.

Це є подальшим теоретичним узагальненням вирішених у роботах [4], [5], [6], [7], [8], [9] задач стосовно збільшення розмірності простору змінних, в якому зосереджена область визначення випадкових полів з обмеженим спектром. Такий напрямок узагальнення важливо розвивати у зв'язку з необхідністю використовувати запропоновану методику статистичного моделювання для випадкових полів з обмеженим спектром, які залежать від часу та задані у багатовимірній області змінних, у якій, крім просторових координат, добавляють величину розмірності один або кілька впливових параметрів.

На практиці важливо використовувати реалізації статистичного моделювання таких випадкових полів для виділення сейсмічного шуму, залежного від одного або кількох суттєвих параметрів, від зовнішнього впливу і для того, щоб отримати відповідні оцінки частотних характеристик геологічного середовища тривимірної області спостереження. Вказані оцінки необхідно враховувати при будівництві об'єктів різного призначення з метою забезпечення надійності споруд.

Як видно із джерел інформації (наприклад, [12], [14], [15], [16], [18] та ін.), моделі та алгоритми чисельного моделювання випадкових процесів та полів на основі розкладів в ряди Фур'є, Фур'є-Бесселя та в ряди по синк-функціям (інтерполяційні формули Котельникова-Шеннона) використовуються в геологічних науках порівняно недавно.

В статті розглянуто перспективи застосування побудованих моделей та алгоритмів статистичного моделювання випадкових полів на основі розкладів в модифіковані інтерполяційні ряди Котельникова-Шеннона до задачі дослідження сейсмічного шуму, залежного від одного або кількох важливих параметрів, для потреб визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками у одно-, дво- або тривимірній області спостереження.

1. Модель та алгоритм

При статистичному моделюванні спостережених шумів сейсмограм, які залежать від одного або кількох важливих параметрів, рекомендується використовувати метод, розроблений на основі спектрального розкладу випадкових полів [13] та модифікованої теореми Котельникова-Шеннона для випадкових полів з обмеженим спектром, однорідних за часом та однорідних ізотропних за багатовимірними координатами.

Наведемо розроблену теорію, на основі якої сформульовано та доведено таку теорему.

1.1. Однорідні за часом та однорідні ізотропні за просторовими змінними випадкові поля

Розглядається $\xi(t,x), t\in R, x\in R^n$ – дійснозначне і неперервне в середньому квадратичному однорідне за часом t та однорідне ізотропне за іншими змінними випадкове поле на $R\times R^n$. Для такого поля виконуються наступні умови:

1) $E\xi(t,x)=\text{const}, \forall t\in R, \forall x\in R^n$ (припустимо, що $E\xi(t,x)=0$),

2) $E\xi(t,x)\xi(s,y)=B(t-s,\rho), \forall t,s\in R, \forall x,y\in R^n$,

де $B(\tau,\rho)$ – кореляційна функція, яка залежить від зсуву часу $\tau = t - s$ та відстані між векторами *x* та *y*, тобто від ρ.

Відомо з [13, с. 11], що кореляційна функція випадкового поля $\xi(t,x)$ на $R\times R^n$ має вигляд:

$$B(t-s,\rho)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{i(t-s)u}Y_n(\lambda\rho)\Phi(du,d\lambda), \qquad (1)$$

де $Y_n(z)=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(z)\,z^{-\frac{n-2}{2}}$, а $\Phi(du,d\lambda)$ – просторово-часова спектральна міра на борелівських множинах $(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$, $\mathcal{J}_n(x)$ – функція Бесселя першого роду порядку *n*.

Також у [13, с. 11] наведено наступне твердження про спектральний розклад випадкового поля на $R\times R^n$.

Теорема 1. *Неперервне в середньому квадратичному однорідне за часом, однорідне ізотропне за іншими змінними випадкове поле $\xi(t,x)$ на $R\times R^n$ можна подати у вигляді спектрального розкладу:*

$$\xi(t,\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)=$$

$$=c_n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}S_m^l(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itu}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda\rho)}{(\lambda\rho)^{\frac{n-2}{2}}}Z_m^l(du,d\lambda), \qquad (2)$$

де $(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ – сферичні координати точки x, $S_m^l(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ – ортонормовані сферичні гармоніки степеня m, число $h(m,n)=(2m+n-2)\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\,m!}$ – кількість лінійно незалежних сферичних гармонік степеня n, константа $c_n^2=2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}}$, а $\{Z_m^l(\cdot)\}$ – послідовності дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмножинах Бореля з множини $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ таких, що для будь-яких борелівських множин B_1 і B_2 з $R\times R_+$, $m,p=0,1,\ldots$; $l,q=1,2,\ldots h(m,n)$, виконуються умови:

$$EZ_m^l(B_1)=0,\ EZ_m^l(B_1)Z_p^q(B_2)=\delta_m^p\delta_l^q\Phi(B_1\cap B_2). \qquad (3)$$

При цьому, спектральні міри $Z_m^l(B)$, $m=0,1,\ldots$, $l=1,2,\ldots h(m,n)$, з ймовірністю одиниця однозначно виражаються співвідношенням:

$$Z_m^l([\lambda_1,\lambda_2)\times[\gamma_1,\gamma_2))=$$

$$=l.i.m.\int_{-T}^{T}\int_{0}^{+\infty}\int_{S_n}\frac{e^{-i\lambda_2 t}-e^{-i\lambda_1 t}}{-it}[\varphi_{m,\gamma_2}(\rho)-\varphi_{m,\gamma_1}(\rho)]\times$$

$$\times S_m^l(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\xi(t,\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\,dm_n\,d\rho\,dt \qquad (4)$$

де $m_n(\cdot)$ – міра Лебега на одиничній сфері S_n в R^n, а також:

$$\varphi_{0,\gamma}(\rho)=\frac{1}{c_n}\gamma^{\frac{n}{2}}\rho^{-\frac{n-2}{2}}\mathcal{J}_{\frac{n}{2}}(\gamma\rho),$$

$$\varphi_{m,\gamma}(\rho)=\frac{1}{c_n\rho}\left[(m+n-2)\rho\gamma\mathcal{J}_{m+\frac{n-2}{2}}(\gamma\rho)+S_{\frac{n-2}{2},m+\frac{n-2}{2}-\rho}(\gamma\rho)-\gamma\rho\mathcal{J}_{m+\frac{n}{2}-2}(\gamma\rho)S_{\frac{n}{2},m+\frac{n-2}{2}}(\gamma\rho)+2^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right]$$

(*m*>0), $S_{\mu,\upsilon}(z)$ – функція Ломмеля.

Нехай $C_m^{\nu}(z)$ – многочлени Гегенбауера [2, с. 177], які визначаються генератрисою:

$$\left(1-2zt+t^2\right)^{-\nu}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m^{\nu}(z)t^m,|t|<|z+\sqrt{z^2-1}|.$$

Будемо використовувати наступне твердження з теорії сферичних функцій.

Теорема додавання для сферичних гармонік: *Нехай S_n – одинична сфера в n – вимірному евклідовому просторі, $(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ – сферичні координати точки $x\in S_n$. Для будь-яких двох точок x_1 та x_2 із S_n*

$$\sum_{l=1}^{h(m,n)}S_m^l(x_1)S_m^l(x_2)=\frac{h(m,n)}{\omega_n}\frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\psi)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}, \qquad (5)$$

де $\cos\psi$ *– «кутова» відстань між точками x_1 та x_2, а $\omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ – площа поверхні одиничної сфери S_n, а $C_m^{\nu}(1)=\frac{\Gamma(m+2\nu)}{m!\,\Gamma(2\nu)}$.*■

Отримаємо з виразу (1) за допомогою формули додавання для функцій Бесселя та теореми додавання для сферичних гармонік (5), що кореляційна функція неперервного в середньому квадратичному однорідного за часом, однорідного ізотропного за іншими змінними випадкового поля $\xi(t,x)$ на $R\times R^n$ допускає наступний розклад:

$$B(t-s,\rho)=B(t-s,|x_1-x_2|)=$$

$$=c_n^2\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}S_m^l(\theta_1',\ldots,\theta_{n-2}',\varphi')\times$$

$$\times S_m^l(\theta_1'',\ldots,\theta_{n-2}'',\varphi'')\frac{\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda\rho_1)}{(\lambda\rho_1)^{\frac{n-2}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda\rho_2)}{(\lambda\rho_2)^{\frac{n-2}{2}}}e^{i(t-s)u}\Phi(du,d\lambda) \qquad (6)$$

де $x_1=(\theta_1',\ldots,\theta_{n-2}',\varphi')$, $x_2=(\theta_1'',\ldots,\theta_{n-2}'',\varphi'')$.

Зауважимо, якщо розглянути «звуження» випадкового поля $\xi(t,x)$ на сферу радіуса $r=\rho$, то кореляційна функція такого випадкового процесу має вигляд:

$$E\xi(t,r,\theta_1',\ldots,\theta_{n-2}',\varphi')\xi(s,r,\theta_1'',\ldots,\theta_{n-2}'',\varphi'')=$$

$$=c_n^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}S_m^l(\theta_1',\ldots,\theta_{n-2}',\varphi')\times$$

$$\times S_m^l\left(\theta_1'',\ldots,\theta_{n-2}'',\varphi''\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i(t-s)u}\frac{\mathcal{J}^2_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}}\Phi(du,d\lambda). \quad (7)$$

Звідси випливає, що спектральні коефіцієнти в цьому випадку можна виразити через спектральну функцію таким чином:

$$b_m(t-s,r)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i(t-s)u}\frac{\mathcal{J}^2_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}}\Phi(du,d\lambda). \quad (8)$$

Розглянемо розклад випадкового поля $\xi(t,x)$ в іншому, порівняно із (2), вигляді:

$$\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)=c_n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}S_m^l(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\xi_m^l(t,r), \quad (9)$$

де $\xi_m^l(t,r)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{itu}\frac{\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}}Z_m^l(du,d\lambda), \quad m=0,1,\ldots;$

$l=0,1,\ldots h(m,n)$.

Із припущення, що $E\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)=0$ то $E\xi_m^l(t,r)=0$.

Теорема 2: *Якщо $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ – однорідне за часом, однорідне ізотропне за просторовими змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкове поле на $R\times R^n$, то*

$$E\xi_m^l(t,r)\xi_q^k(s,r)=\delta_m^q\delta_l^k b_m(t-s,r), \quad (10)$$

де δ_l^k – символ Кронеккера. $\{b_m(t-s,r)\}$ – послідовність додатньовизначених ядер на $R\times R_+$, які мають вигляд (8) та задовольняють умову: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}h(m,n)b_m(0,r)<\infty$.

А дисперсія випадкового поля $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ визначається через спектральні коефіцієнти наступним виразом:

$$D\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)=2^{n-2}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}h(m,n)b_m(0,r). \blacksquare \quad (11)$$

Розглянемо часткові випадки, які вивчалися в роботах [6], [7], [9]. При $n=2$ маємо $h(0,2)=1$, $h(m,2)=2$, тоді дисперсія випадкового поля $\xi(t,r,\varphi)$ визначається через спектральні коефіцієнти так:

$$D\xi(t,r,\varphi)=b_0(0,r)+2\sum_{m=1}^{\infty}b_m(0,r),$$

де $b_m(0,r)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\mathcal{J}^2{}_m(\lambda r)\Phi(du,d\lambda)$.

При $n=3$ маємо $h(m,3)=2m+1$, а дисперсія випадкового поля $\xi(t,r,\theta,\varphi)$ визначається через спектральні коефіцієнти *виразом*:

$$D\xi(t,r,\theta,\varphi)=\pi\sum_{m=0}^{\infty}(m+\frac{1}{2})b_m(0,\rho),$$

де $b_m(0,r)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\mathcal{J}^2{}_{\frac{1}{2}+m}(\lambda r)}{\lambda r}\Phi(du,d\lambda)$.

Таким чином, наведений теоремі 2 розклад можна використати для статистичного моделювання гауссівських однорідних за часом, однорідних ізотропних за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкових полів на $R\times R^n$ із заданою спектральною функцією (або кореляційною функцією).

1.2. Однорідні за часом випадкові поля з обмеженим спектром

Випадкове поле $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ на $R\times R^n$ будемо називати полем з обмеженим спектром, якщо всі спектральні міри зосереджені на деякому інтервалі $[-\tilde{\omega},\tilde{\omega}],\tilde{\omega}>0$.

Має місце наступне твердження, яке належить Ю.К.Бєляєву [3].

Лема 1. *Якщо $\xi(t)$ – стаціонарний процес, спектральна функція якого зосереджена на інтервалі $[-\tilde{\omega},\tilde{\omega}]$ і $\omega>\tilde{\omega}$, а*

$$\xi_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}\xi\left(\frac{k\pi}{\omega}\right)\frac{\sin\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}{\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}, \quad (12)$$

то

$$E\,|\,\xi(t)-\xi_N(t)\,|^2\le\frac{\gamma^2(t)}{N^2}\frac{\sigma^2}{\left(1-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2}, \quad (13)$$

де $\sigma^2=D\xi(t)$, $\gamma(t)=\dfrac{4\left(\frac{\omega}{\pi}|t|+1\right)}{\pi}$ (14)

$\blacksquare$

Нехай $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$, $t\in R$, $r\in R_+$, $\theta_i\in[0,\pi]$, $i=1,\ldots,n-2,\varphi\in[0,2\pi]$ – однорідне за часом, однорідне ізотропне за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкове поле на $R\times R^n$ з обмеженим спектром, зосередженим на $[-\tilde{\omega},\tilde{\omega}]$. Нехай також ω – будь-яке число, що $\omega>\tilde{\omega}$.

Позначимо часткову суму:

$$\xi_N(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)=\sum_{k=-N}^{N}\xi\left(\frac{k\pi}{\omega},r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)\frac{\sin\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}{\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}. \quad (15)$$

Тоді має місце наступне твердження:

Теорема 3. *Справедлива наступна нерівність для середньоквадратичного наближення однорідного за часом, однорідного ізотропного за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкового поля $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$, на $R\times R^n$ з обмеженим спектром частковою сумою (15), а саме:*

$$E\,|\,\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)-\xi_N(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\,|^2\le\frac{\gamma^2(t)}{N^2\left(1-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2}2^{n-2}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}h(m,n)\tilde{b}_m(0,r), \quad (16)$$

де $\tilde{b}_m(0,r)=\int\limits_{|t|\le\tilde{\omega}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\mathcal{J}^2{}_{\frac{n-2}{2}+m}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}}\Phi(du,d\lambda)$. (17)

Наслідок. *Для випадкового поля $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ на $R\times R^n$ з обмеженим спектром має місце розклад Котельникова – Шеннона:*

$$\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\omega},r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)\frac{\sin\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}{\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}, \quad (18)$$

де ряд в правій частині (18) збігається в середньому квадратичному, при $\omega>\tilde{\omega}$.

Розклад Котельникова – Шеннона (18) однорідних за часом, однорідних ізотропних за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкових полів на $R\times R^n$ можна використати для статистичного моделювання випадкових полів такого типу. При цьому важливо удосконалити оцінку середньоквадратичного наближення (16) до такого вигляду, щоби можна було її використовувати у алгоритмі для чисельного моделювання реалізацій цих випадкових полів.У наступному пункті в теоремах 4-6 наведено варіанти таких оцінок.

1.3. Статистичне моделювання однорідних за часом, однорідних ізотропних за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкових полів з обмеженим спектром на $R\times R^n$

Наведений вище розклад Котельникова – Шеннона (18) однорідних за часом, однорідних ізотропних за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкових полів з обмеженим спектром на $R\times R^n$ можна використати для чисельного моделювання таких випадкових полів із заданими статистичними характеристиками.

Для побудови моделі гауссівського однорідного за часом, однорідного ізотропного за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкового поля $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ з обмеженим спектром, зосередженим на інтервалі $\left[-\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right]$, що розглядається, використаємо часткову суму розкладу (9) та часткову суму розкладу (18).

Така *модель* має вигляд:

$$\tilde{\xi}_{N,M}\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)=$$
$$=c_n\sum_{k=-N}^{N}\frac{\sin\omega(t-\frac{k\pi}{\omega})}{\omega(t-\frac{k\pi}{\omega})}\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{h(m,n)}S_m^l\left(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)\xi_m^l\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right) \quad (19)$$

де $\xi_m^l\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)$ – послідовність гауссівських випадкових процесів, які при $m,p=0,1,\ldots M;\ k,q=\overline{-N,N};$ $l,s=1,\ldots,h\left(m,n\right)$ задовольняють наступним умовам:

$$E\xi_m^l\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)=0,\ E\xi_m^l\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right)\xi_p^s\left(\frac{q\pi}{\omega},r\right)=$$
$$=\delta_l^s\delta_p^m\tilde{b}_m\left(\frac{(k-q)\pi}{\omega},r\right) \quad (20)$$

Причому, $\left\{\tilde{b}_m\left(t-s,r\right)\right\}$ – послідовність додатньовизначених ядер на $R\times R_+$, які можна обчислити за просторово-часовим спектром $\Phi\left(du,d\lambda\right)$ випадкового поля $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ за виразом (17) та для яких виконується така умова*:* $\sum_{m=0}^{\infty}h(m,n)b_m\left(0,r\right)<\infty.$

Для формулювання алгоритму чисельного моделювання реалізацій гауссівського однорідного за часом, однорідного ізотропного за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ випадкового поля $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ з обмеженим спектром необхідно вказати оцінки середньоквадратичного наближення таких полів моделлю (19). *Такі* вирази *наведено в* наступних теоремах*.*

Теорема 4. *Для середньоквадратичного наближення однорідного за часом, однорідного ізотропного за змінними* $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ *випадкового поля* $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ *на* $R\times R^n$ *з обмеженим спектром частковою сумою* (19) *має місце оцінка:*

$$E\left|\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)-\xi_{N,M}\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)\right|^2\le\tilde{B}\left(0,0\right)+$$
$$+\left(\frac{\gamma^2(t)}{N^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2}-1\right)\frac{(n+M-2)!}{M!\left(n-2\right)!}\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)r^{n-3}}\tilde{\mu}_{3-n}, \quad (21)$$

де

$$\tilde{B}\left(0,0\right)=\int_{-\tilde{\omega}}^{+\tilde{\omega}}\int_{0}^{+\infty}\Phi(du,d\lambda), \quad (22)$$

$$\tilde{\mu}_{3-n}=\int_{-\tilde{\omega}}^{+\tilde{\omega}},\int_{0}^{+\infty}\lambda^{3-n}\Phi\left(du\ d\lambda\right),n\ge3. \quad (23)$$

Враховуючи результати роботи [9], отримано інші оцінки середньоквадратичного наближення випадкового поля моделлю (19) та доведено наступні теореми 5 та 6.

Теорема 5. *Середньоквадратичне наближення однорідного за часом, однорідного ізотропного за змінними* $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ *випадкового поля* $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ *на* $R\times R^n$ *з обмеженим спектром частковою сумою* (19) *можна оцінити таким виразом:*

$$E\left|\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)-\xi_{N,M}\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)\right|^2\le\tilde{B}\left(0,0\right)+$$
$$+\left(\frac{L_0^2(t)\omega^2}{\left(\omega-\nu\right)^2N^2}-1\right)\frac{(n+M-2)!}{M!\left(n-2\right)!}\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)r^{n-3}}\tilde{\mu}_{3-n}, \quad (24)$$

де $\omega>\nu=\sup_{u\in\Lambda}\left|u\right|$ *– будь-яке фіксоване число,* Λ *– це інтервал* $\left[-\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right]$, $\tilde{B}\left(0,0\right)$ *– дисперсія (21),* $\tilde{\mu}_{3-n}$ *– моменти (23),*

$$L_f=\sup_{u\in\Lambda}\sup_{-\infty<t<\infty}\left|e^{itu}\right|, \quad (25)$$

$$L_0\left(t\right)=\frac{2}{1-e^{-\pi}}\left(\frac{2}{\pi}\right)\left|\sin\omega t\right|. \quad (26)$$

Теорема 6. *Середньоквадратичне наближення однорідного за часом, однорідного ізотропного за змінними* $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ *випадкового поля* $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ *на* $R\times R^n$ *з обмеженим спектром частковою сумою* (18) *допускає* наступну *оцінку:*

$$E\left|\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)-\xi_{N,M}\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)\right|^2\le\tilde{B}\left(0,0\right)+$$
$$+\left(\frac{4}{\pi^2(2N-1)}-1\right)\frac{(n+M-2)!}{M!\left(n-2\right)!}\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)r^{n-3}}\tilde{\mu}_{3-n}, \quad (27)$$

де $\tilde{B}\left(0,0\right)$ *– дисперсія* (22), $\tilde{\mu}_{3-n}$ *– моменти* (23).

Далі сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними випадкових полів $\xi\left(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi\right)$ з обмеженим за часом t спектром, а саме:

Алгоритм

1. Вибираємо, відповідно до необхідної точності ε>0, натуральні числа N та M для моделі (19) за допомогою однієї з наступних нерівностей:

$$\tilde{B}(0,0)+\left(\frac{\gamma^2(t)}{N^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2}-1\right)\frac{(n+M-2)!}{M!(n-2)!}\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)r^{n-3}}\tilde{\mu}_{3-n}<\varepsilon, \quad (28)$$

$$\tilde{B}(0,0)+\left(\frac{L_0^2(t)\omega^2}{(\omega-\nu)^2N^2}-1\right)\frac{(n+M-2)!}{M!(n-2)!}\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)r^{n-3}}\tilde{\mu}_{3-n}<\varepsilon, \quad (29)$$

$$\tilde{B}(0,0)+\left(\frac{4}{\pi^2(2N-1)}-1\right)\frac{(n+M-2)!}{M!(n-2)!}\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)r^{n-3}}\tilde{\mu}_{3-n}<\varepsilon, \quad (30)$$

де r – полярний радіус, ω – будь-яке фіксоване число, яке задовольняє умові: $\omega>\nu=\sup_{u\in\Lambda}|u|$, $\tilde{B}(0,0)$ – дисперсія (22), $\tilde{\mu}_{3-n}$ – моменти (23),функції $\gamma(t)$ – (14), $L_0(t)$ – (26) та L_f – (25).

2. Моделюємо послідовності гауссівських випадкових процесів (r – фіксований полярний радіус) $\xi_m^l\left(\frac{k\pi}{\omega},r\right), m=0,1,\ldots M;\ k=\overline{-N,N}; l=1,\ldots,h(m,n)$, які задовольняютьумовам (20).

3. Обчислюємо вираз (18) у заданій точці $(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\in[-T,T]\times A^n, A^n\subset R^n$ підставляючи в нього обчислені за попередніми пунктами 1 та 2 величини N та M і послідовності значень гауссівських випадкових величин.

4. Перевіряємо згенеровану за п. 3 реалізацію випадкового поля $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ у точках сітки в області спостереження на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння відповідних статистичних характеристик.

2. Практичне використання моделі поля із просторово-часовою кореляційною функцією

Для практичного використання розробленого алгоритму та моделі (18) чисельного моделювання реалізацій дійснозначних однорідних за часом t, однорідних ізотропних за змінними $r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi$ на $R\times R^n$ випадкових полів $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$, що мають обмежений спектр, та просторово-часову кореляційну функцію $B_z(\tau,\rho)$, можна скористатись різними підходами [10]. При цьому потрібно врахувати, що моделі просторово-часової кореляційної структури підрозділяють на два види: перший, що враховує розподіл на просторову та часову компоненти та другий – такий, що цього розподілу не передбачає. В роботі [7] наведено приклад застосування та моделі, які мають на даний час найбільше поширення у застосуванні, а саме: метрична модель, лінійна модель, модель добутку просторово-часової коваріації, модель добутку-суми.

Також можна використовувати інший підхід до моделювання просторово-часової кореляції, який дозволяє отримати класи нерозділених просторово-часових стаціонарних коваріаційних функцій. Цей підхід базується на використанні частотного представлення коваріаційної функції.

Приклад практичного використання в сейсмології розробленого алгоритму та моделі чисельного моделювання реалізацій дійснозначних однорідних за часом t, однорідних ізотропних за двовимірними змінними випадкових полів з обмеженим спектром із просторово-часовою кореляційною функцією $B_z(\tau,\rho)$ за методом, який розділяє просторову та часову компоненти за правилом добутку-суми розглянуто у роботі [6].

Змодельовано масиви значень реалізацій випадкового процесу $\xi(t,\rho,\varphi)$ (ρ,φ – фіксовані), що імітують сейсмограми шуму для кожного пункту спостереження на кожній із компонент: EW, NS, та Z. Вони дають можливість отримати важливі відомості про коливальні властивості ґрунту на території будівельних і експлуатаційних майданчиків. Знання цих властивостей необхідні для сейсмостійкого проектування нових будинків і споруд, та забезпечення сейсмостійкості уже існуючих, з метою уникнення небезпечних резонансних ефектів. В модельних сейсмограмах шуму методом статистичного усереднення відфільтровані випадкові збурення, які виникли внаслідок дії випадкових зовнішніх чинників. До таких збурень належать, наприклад, коливання, викликані рухом потяга або важкого автомобіля тощо. Результати змодельованих масивів значень сейсмограм шуму статистичними методами перевірено на адекватність реальним сейсмограмам із пунктів спостережень.

Методом статистичного моделювання випадкових полів можна також вирішити важливу проблему моделювання імітованої *реалізації* вихідної сейсмограми шуму для уявного пункту спостереження, розміщеного між реальними пунктами спостереження, або на невеликій відстані від них. При цьому всі параметри, крім часу t, в $\xi(t,r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)$ фіксуються і проводиться спектральний аналіз реалізації випадкового процесу. Амплітудний та фазовий спектри такої реалізації *шуму* можуть використовуватися для отримання частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками, які описують його здатність, змінювати (збільшувати або зменшувати) амплітуди сейсмічних коливань при землетрусах [1, 8]. Чисельне моделювання частотних характеристик ґрунтової товщі, в ряді випадків, може суттєво зменшити вартість робіт з сейсмічного мікрорайонування будівельних майданчиків за рахунок скорочення кількості пунктів інструментальних спостережень за землетрусами, вибухами і мікросейсмами.

3. Спектральний аналіз згенерованого шуму

Оцінки частотних характеристик геологічного середовища багатовимірної області спостереження (наприклад, під будівельними майданчиками) можна отримати шляхом розрахунку та побудови амплітудного та фазового спектрів шумів в сейсмограмах пунктів спостережень у такій області, вважаючи всі аргументи, крім часу, фіксованими [4]. Розрахунки амплітудного та фазового спектрів можна проводити прямим способом [1, с. 179], тобто методом періодограм. Далі, на основі цих результатів потрібно будувати спектральне відношення земної кори, яке не залежить від спектра падаючих сейсмічних хвиль, а визначається виключно будовою геологічного середовища під досліджуваним пунктом.

Спектральні методи, які використовують частоту в якості незалежного параметра, дозволяють отримати інформацію про будову і фільтруючі властивості верхньої частини земної кори, оскільки будь-яке середовище є фільтром, який, завдяки резонансним ефектам та реверберації, сприяє збільшенню амплітуди коливань на одних частотах і зменшує амплітуди – на інших [1, с. 270]. Вміння моделювати ефекти, що залежать від амплітудних і фазових частотних характеристик геологічного середовища, яке знаходиться під різними пунктами будівельних і експлуатаційних майданчиків, дозволяє вивчати особливості геологічних розрізів і передбачати місця, в яких можливе значне зростання інтенсивності сейсмічних струшувань, пов'язане з резонансними ефектами і інтерференційними вузлами поля коливань.

Серед багатьох способів виключення впливу різноманітних факторів, від яких залежить форма спектра сейсмічних коливань при землетрусах, вибухах і мікросейсмах, крім обумовлених впливом лише верхньої частини розрізу земної кори, слід відзначити спосіб, який базується на використанні відношень вертикальної компоненти спектрів $|S_Z(\omega)|$ до горизонтальної $|S_N(\omega)|$. Сектри необхідно обчислювати для однієї і тієї ж хвилі. Таке відношення називається спектральним відношенням земної кори $T(\omega)$.

$$|S_Z(\omega)|/|S_N(\omega)| = T(\omega)$$

Відношення $T(\omega)$ не залежить від спектра падаючих сейсмічних хвиль, а визначається виключно будовою геологічного середовища під досліджуваним пунктом. На рисунках 1,а та 1,б наведено графіки амплітудних спектрів $|S(\omega)|$ вихідної змодельованої реалізації шуму для уявного пункту спостереження на компонентах коливань Z та NS відповідно, а на рисунку 1,в – графік передавального відношення $T(\omega)$ земної кори, побудовані за відношенням амплітудного згладженого спектру сейсмограми змодельованої реалізації шуму на компоненті коливань Z- до аналогічного спектру на компоненті коливань NS для такого пункту спостереження.

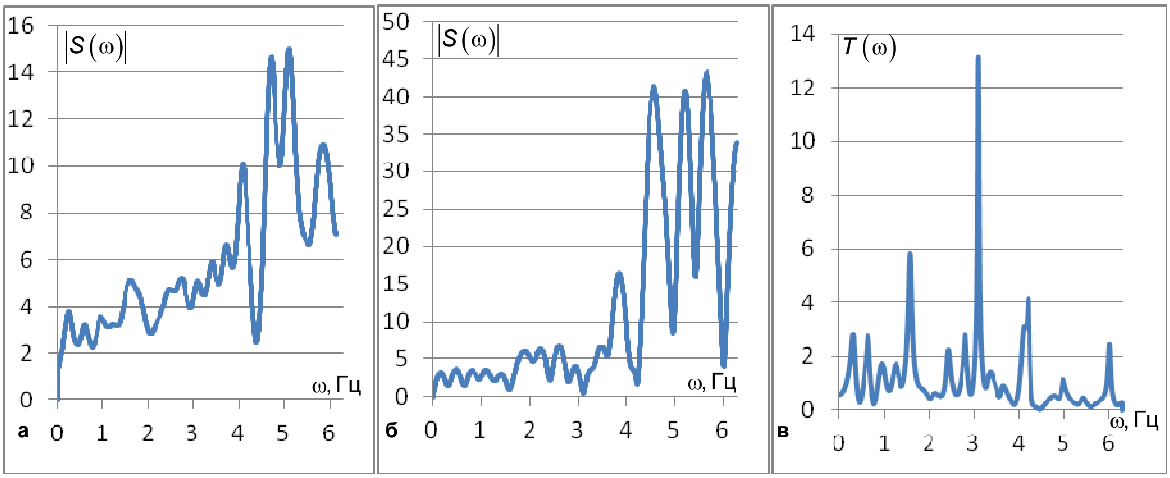

Рис. 1. Графіки амплітудних спектрів |S(ω)| масиву змодельваної реалізації шуму для уявного пункту спостереження на компоненті (а) Z та (б) NS; в - графік передавального відношення T(ω) амплітудних згладжених спектрів змодельованої реалізації шуму для уявного пункту спостереження

Інтерпретація передавального відношення земної кори для даних спостережень проводиться шляхом їх порівняння із теоретичними відношеннями, які обчислюються для відомих моделей верхньої частини розрізу.

Необхідно відзначити, що одним із важливих інструментів для оцінки впливу верхньої частини геологічного розрізу на сейсмічні рухи є широко відомий метод Накамури H/V або QTS (Quasi-TransferSpectra), розроблений японським вченим Yutaka Nakamura. Метод використовує записи мікросейсмічного шуму, зареєстровані на горизонтальних і вертикальних компонентах коливань з використанням свердловинних досліджень, для побудови квазі-передавального спектру ґрунтової товщі. Метод Накамури дозволяє за відношенням спектрів горизонтальної та вертикальної компонент природних шумів визначити власні резонансні частоти ґрунтової товщі. Максимальні значення відношення спектрів горизонтальної до вертикальної компонент мікросейсми пояснюються багатократним відбиттям SH хвилі.

Наведений на рисунку 1, в графік $T(\omega)$ – передавального відношення амплітудних згладжених спектрів для уявного пункту спостереження може використовуватися для визначення приросту сейсмічної бальності на різних ділянках будівельного майданчика, відносно еталонного.

Висновки. Розроблено модель та алгоритм статистичного моделювання однорідних за часом, однорідних ізотропних за багатовимірними змінними випадкових полів з обмеженим спектром. Такі результати є продовженням напрямку досліджень, започаткованим у роботах [4], [5], [6], [7], [8] та [9], присвячених методам моделювання і генеруванню реалізацій шуму сейсмограм плоскої області спостереження [5] та сейсмограм тривимірної області спостереження [6] і є важливим доповненням до методів Монте-Карло, які використовуються в геології, наприклад, наведених в [14].

Список використаної літератури:

1. Бат М., (1980). Спектральный анализ в геофизике / Пер. с англ. М.: Недра, 535.
Bath M., (1980). Spectral analysis in geophysics. *M.: Nedra*, 535 (In Russian).
2. Бейтмен Г., Эрдейи А., (1973). Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 296.
Bateman H., Erdelyi A., (1973). Higher transcendental functions. *M.: Nauka*, 1, 296 (In Russian).
3. Беляев Ю.К., (1959). Аналитические случайные процессы. Теория вероятности и ее применение, 4, 4, 437- 444.
Belyaev Yu.K., (1959). Analytical random processes. *Probability Theor. and Applications*,.4, 4, 437-444 (In Russian).
4. Вижва З.О., (2011). Статистичне моделювання випадкових процесів та полів. К.: Обрії, 388.
Vyzhva Z. O., (2011). The statistical simulation of random processes and fields. *Kyiv: Obrii*, 388 (In Ukrainian).
5. Вижва З.О., (2012). Статистичне моделювання сейсмічного шуму у двовимірній області змінних для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Вісн. Київ. ун-ту. Геологія, 59, 65-67.
Vyzhva Z. O., (2012). The statistical simulation of 2-D seismic noise for frequency characteristics of geology environment determination. *Visn. Kyiv University. Geology*, 59, 65-67 (In Ukrainian).
6. Вижва З.О., (2013). Статистичне моделювання сейсмічного шуму у тривимірній області змінних для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Вісн. Київ. ун-ту. Геологія, 60, 69–73.
Vyzhva Z.O., (2013). The statistical simulation of 3-D seismic noise for frequency characteristics of geology environment determination. *Visn. Kyiv University. Geology*, 60, 69–73 (In Ukrainian).
7. Вижва З.О., (2013). Статистичне моделювання сейсмічного шуму у чотиривимірній області змінних для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Вісн. Київ. ун-ту. Геологія, 61, 69-71.
Vyzhva Z.O., (2013). The statistical simulation of 4-D seismic noise for frequency characteristics of geology environment determination. *Visn. Kyiv University. Geology*, 61, 69-71 (In Ukrainian).
8. Вижва З.О., Кендзера О.В., Федоренко К. В., Вижва А.С., (2012). Визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками з використанням статистичного моделювання сейсмічного шуму на прикладі спостережень в м. Одесі. Вісн. Київ. ун-ту. Геологія, 58, 57-61.

Vyzhva Z. O.,Kendzera O.V., Fedorenko K.V., Vyzhva A.S., (2012). The frequency characteristics of under-building-site geology environment determination by using the statistical simulation of seismic noise by the example of Odessa city. *Visn. Kyiv University. Geology*, 58, 57-61 (In Ukrainian).
9. Вижва З.О., Федоренко К.В., (2013). Статистичне моделювання 3-D випадкового поля за розкладом Котельникова – Шеннона. Теор. Йм. та Мат. Стат., 88, 17-31.
Vyzhva Z.O., Fedorenko K.V., (2013). The statistical simulation of 3-D random field by Kotelnikov-Shennon decompositions. *Theor. Probability and Math. Statist*., 88, 17-31 (In Ukrainian).
10. Демьянов В.В., Савельева Е.А., (2010). Геостатистика. / Под ред. Арутюняна Р.В. М.: Наука, 327.
Demyanov V.V., Saveleva E.A., (2010). Geostatistics. / Editor in Chief Arutyunyan R.V. *M.:Nauka*, 327 (In Russian).
11. Оленко А.Я., (2005). Порівняння оцінок помилки апроксимації в теоремі Котельникова – Шеннона. Вісник Київ. нац. ун- ту. Математика і механіка, 13, 41-45.
Olenko A.Ya., (2005). The compare of error approximation"s estimations on the Kotelnikov-Shennon"s theorem. *Visn. Kyiv nats. University. Mathematics and Mechanics*, 13, 41-45 (In Ukrainian).
12. Пригарин С.М*.,* (2005). Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ,.259.
Prigarin S.M., (2005). Numerical Modeling of Random Processes and Fields / Editor in Chief G.A. Mikhailov. *Novosibirsk: Inst. of Comp. Math. and Math. Geoph. Publ*., 259 (In Russian).
13. Ядренко М.И., (1980). Спектральная теория случайных полей. К.:Вища школа, 208.
Yadrenko M.I., (1980). The Spectral Theory of Random Fields. *K.: Vyscha shkola*, 208 (In Russian).
14. Chiles J.P., Delfiner P., (2009). Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. *John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto*, 720.
15. Gneiting T., (1997). Symmetric Positive Definite Functions with Applications in Spatial Statistics. *Von der Universitat Bayeuth zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung*, 107.
16. Schlather M., (1999). Introduction to Positive Define Functions and to Unconditional Simulation of Random Fields. *Technical Report ST-99-10. Lancaster University*, UK.
17. Lantuejoul C., *(*2001). Geostatistical simulations: models and algorithm. *Springer*, 256.
18. Mantoglov A., Wilson J.L., (1981). Simulation of random fields with turning bands method. *"MIT Ralph M.Parsons Lab. Hydrol. And Water Syst. Rept*", 264, 199.

Надійшла до редколегії 20.05.14

Z. Vyzhva, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assos. Prof.
E-mail: zoya_vyzhva@ukr.net
K. Fedorenko, Postgraduate Student
E-mail: slims_mentol@mail.ru
A. Vyzhva, Postgraduate Student
E-mail: motomustanger@ukr.net
Geological Faculty
Taras Schevchenko National University of Kyiv
90, Vasylkivska Str., Kyiv, 03022 Ukraine

STATISTICAL SIMULATION OF SEISMIC NOISE IN A MULTIDIMENSIONAL AREA IN DETERMINING FREQUENCY CHARACTERISTICS OF GEOLOGICAL MEDIA

The paper deals with the theory and methods of statistical simulation of random processes and fields based on their spectral decomposition and Kotelnikov-Shennon modified interpolation sums, as well as applying these methods for environmental geophysical monitoring. Statistical simulation of multivariate random fields (those homogeneous in time and homogeneous isotropic in n other variables) are considered to be essential for seismological research into frequency characteristics of geological media. A statistical model and a numerical algorithm of simulating random fields are built on the basis of Kotelnikov-Shennon modified interpolation decomposition to generate adequate realizations of seismic noise. The paper examines real-valued random fields $\xi(t,x), t\in R, x\in R^n$, those homogeneous in time and homogeneous isotropic ones relative to spatial variables in the multidimensional space. It also considers approximation of random fields by the random fields with a bounded spectrum. There is made an analogue of the Kotelnikov–Shannon theorem for random fields with a bounded spectrum. Besides, there are obtained estimates of the mean-square approximation of random fields in the space $R\times R^n$ by a model constructed with the help of spectral decomposition and Kotelnikov–Shannon interpolation formula. The paper provides a mechanism for statistical simulation of Gaussian random fields with a bounded spectrum; namely, those homogeneous in time and homogeneous isotropic ones relative to spatial variables in the multidimensional space. Proved have been the theorems of the mean-square approximation of random fields (those homogeneous in time and homogeneous isotropic ones relative to n- other variables) by special partial sums. A simulation method was used to formulate an algorithm of numerical simulation by means of these theorems. There are also considered ways to carry out spectral analysis of generated seismic noise realizations. Finally, there have been developed universal methods of statistical simulation (Monte Carlo methods) of multi-parameter seismology data for generating seismic noise on 2D and 3D grids of the required detail and regularity.
Key words: statistical simulation, spectral analyzes, seismic noise.

З. Выжва, д-р физ.-мат. наук, доц., zoya_vyzhva@ukr.net
К. Федоренко, асп., slims_mentol@mail.ru
А. Выжва, асп., motomustanger@ukr.net
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
Геологический факультет, ул. Васильковская, 90, г. Киев, 03022, Украина

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО ШУМА В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Работа посвящена разработке теории и методологии статистического моделирования случайных процессов и полей на основе их спектральных разложений и модифицированных интерполяционных рядов Котельникова-Шеннона, а также применению таких методов в задачах геофизического мониторинга окружающей среды. Рассмотрена задача статистического моделирования случайных полей в многомерной области переменных (однородных по времени и однородных изотропных по n другими переменным) при внедрении в сейсмологические исследования для определения частотных характеристик геологической среды. Построена модель и сформулирован алгоритм численного моделирования реализаций таких случайных полей на основании модифицированных интерполяционных разложений Котельникова-Шеннона для генерирования адекватных реализаций шума сейсмограмм. В статье изучаются действительнозначные случайные поля - однородные по времени и однородные изотропные по пространственным переменным в многомерном пространстве. Рассматривается проблема аппроксимации таких случайных полей случайными полями с ограниченным спектром. Для случайных полей полями с ограниченным спектром установлено аналог теоремы Котельникова-Шеннона. Получены оценки среднеквадратического приближения случайных полей в пространстве моделью, которая построена на основе спектрального разложения и интерполяционной формулы Котельникова-Шеннона. Разработан алгоритм статистического моделирования реализаций гауссовских однородных по времени и однородных изотропных по пространственным переменным случайных полей с ограниченным спектром. Доказаны теоремы об оценке среднеквадратической аппроксимации однородных по времени и однородных изотропных по n другим переменным случайных полей частными суммами рядов специального вида, при помощи которой сформулирован алгоритм численного моделирования реализаций таких случайных полей. Рассмотрены способы проведения спектрального анализа сгенерированных реализаций шума сейсмограмм. Разработаны универсальные методы статистического моделирования (методы Монте-Карло) многопараметрических сейсмологичеких данных, которые дают возможность решить проблемы генерирования реализаций шума сейсмограм на плоскости и в трёхмерном пространстве на сетке необходимой детальности и регулярности.
Ключевые слова: статистическое моделирование, спектральный анализ, сейсмический шум.