УДК 621.86: 519.21

В.І. Лісовський, здобувач, В.В. Мова, д-р. екон. наук, проф.,
А.З. Меліков, д-р. техн. наук, проф.

КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ В СИСТЕМІ ІЗ РІЗНОТИПНИМИ ЗУСТРІЧНИМИ ПОТОКАМИ МАТЕРІАЛЬНИХ РЕСУРСІВ

Досліджено математичну модель процесу керування запасами систем обслуговування зустрічних потоків з випадковими розмірами витрачаючих і постачаючих вимог. Запропоновано точний та наближений методи визначення оптимальної в економічному сенсі політики керування запасами даної системи. Розроблено відповідний алгоритм ситуаційного керування.

Ключові слова: системи обслуговування, запаси, ситуаційні пріоритети.

The mathematical model of the process by stock control of maintenance systems of counter streams with the casual sizes of supplying requirements is investigated. The exact and approximate methods of definition optimum in economic sense of inventory policy of the given system are offered. The corresponding algorithm of situational management is developed.

Keywords: service systems, stocks, situational priorities.

Вступ. Системи обслуговування із зустрічними потоками – це системи обслуговування, до яких у випадкові моменти часу надходять матеріальні ресурси випадкового розміру (постачальні вимоги (*p*-вимоги)), що у випадковий момент часу можуть бути замовлені споживачами шляхом подання витрачальних вимог (*r*-вимог) [1-3].

Задачі визначення оптимальної у відомому параметричному класі політики поповнення запасів у таких системах розв'язані у роботах [2, 3]. при цьому припускалося, що *r*-вимоги ідентичні, тобто всі вимоги вимагають матеріальних ресурсів одиничного розміру і не враховується можливість утворення черги *r*-вимог. Подібні задачі з урахуванням утворення черги *r*-вимог розглянуті у роботах [4, 5]. Проте в них також передбачається, що *r*-вимоги ідентичні.

У цій роботі знімається останнє обмеження, іншими словами, досліджується математична модель процесу керування запасами систем обслуговування зустрічних потоків із випадковими розмірами *r*-вимог та із обмеженою чергою, а також вирішується задача оптимальної політики поповнення запасів. Ця політика визначається у досить широкому класі, зокрема, відомі дворівневі політики є частинним випадком цього класу. Знайдена політика називається ситуаційним керуванням запасами, оскільки вона враховує поточну ситуацію в системі, при чому ситуація визначається рівнем запасів на складі та кількістю наявних різнотипних *r*-вимог у системі.

Модель і постановка задачі. Структурна схема системи, що досліджується, наведена на рис. 1. На вхід цієї системи, яка має склад обмеженого обсягу Q, надходить пуассонівський потік *r*-вимог (далі просто вимог) з інтенсивністю Λ_r. Кожна вимога, яка надійшла, із імовірністю σ_i потребує матеріальний ресурс розміру b_i, $1 \le b_i \le Q$, $i = 1,\dots, K$, при цьому $\sum_{i=1}^{K}\sigma_i = 1$.

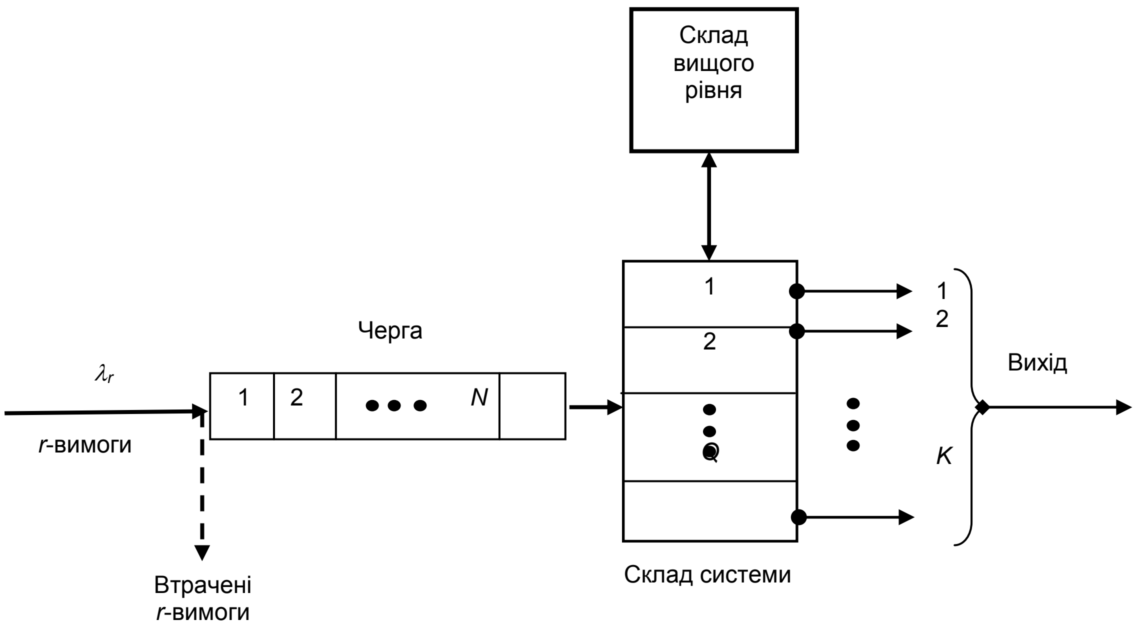

Рис. 1. Структурна схема системи обслуговування

Припускається, що в момент надходження вимоги стає відомим кількість матеріальних ресурсів, яких вона потребує. Тоді можна вважати, що на вхід цієї системи надходять K типів пуассонівських потоків вимог, при цьому інтенсивність *i*-го потоку складає $\lambda := \Lambda_r\sigma_i$, а вимоги *i*-го типу (*i*-вимоги) вимагають одночасно b_i ресурсів, $i = 1,\dots, K$.

Для видачі ресурсів у системі є K каналів, при цьому кожний потік має свій канал обслуговування. Вимога будь-якого типу приймається на обслуговування, якщо на складі є достатня кількість ресурсів, при цьому час обслуговування *i*-вимог є експоненціально розподіленою випадковою величиною із параметром μ_i, $i = 1,\dots, K$.

Система припиняє відпускання ресурсів незалежно від довжини черги вимог будь-якого типу, коли рівень наявних ресурсів опускається до певної величини q, $0 \le q \le Q-1$. Вважається, що у даний момент система може замовляти на складі вищого рівня поставку певної кількості ресурсів, при цьому зроблене замовлення виконується із певною затримкою, викликаною доставкою матеріальних ресурсів та їх вивантаженням на складі нашої системи; ця затримка є випадковою величиною із експоненціальною функцією розподілу з параметром $\nu(i)$, який у загальному випадку залежить від обсягу поставки i, $i = 1,\ldots, Q - q$. Через технологічні обмеження у період вивантаження ресурсів, що надійшли зі складу вищого рівня, їх відпускання вимогам із черги припиняється.

Різнотипні вимоги очікують початку обслуговування у черзі із максимальною довжиною N, тобто вимога будь-якого типу, що надійшла у той момент, коли сумарна кількість вимог у системі дорівнює N, незалежно від рівня запасів ресурсів втрачається із відповідною ймовірністю.

Вважається, що різнотипні вимоги розрізняються величиною збитків через втрати вимог (відсутність вільних місць у черзі чи відсутність потрібних ресурсів у системі), а також збитками внаслідок очікування вимог у черзі протягом одиниці часу. Вважаються також відомими збитки, пов'язані із доставкою і зберіганням на складі системи кожного матеріального ресурсу одиничного розміру.

Задача оптимізації функціонування даної системи формулюється таким чином. Треба знайти такі (оптимальні) значення обсягів матеріальних ресурсів, які поставляються, щоб мінімізувати сумарні втрати від очікування вимог, їх втрат, доставки і зберігання ресурсів в одиницю часу стаціонарного режиму.

Для простоти викладення тут розглядається модель із "терплячими" вимогами, тобто вважається, що вимоги будь-якого типу, які надійшли у момент, коли рівень ресурсів на складі дорівнює q, очікують у черзі до надходження поповнення. Разом із тим запропоновані тут методи розв'язування поставленої задачі легко можуть бути узагальнені й на випадок дослідження моделей із "нетерплячими" вимогами, коли вимоги деяких типів можуть покидати систему без обслуговування, якщо до початку їх обслуговування рівень запасів знижується до критичної величини q.

У стаціонарному режимі математичною моделлю даної системи є багатовимірний ланцюг Маркова (ЛМ) зі станами вигляду ($m\mathbf{n} = (m, n_1,\ldots, n_K)$, де m – поточний рівень запасу ресурсів на складі; n_i – кількість i-вимог у системі, $i = 1,\ldots, K$.

Фазовий простір станів (ФПС) системи завдається множиною

$$E = \left\{ m\mathbf{n} : m = \overline{q,Q}, \sum_{i=1}^{K} b_i I(n_i > 0) \le m, \sum_{i=1}^{K} n_i \le N \right\},$$

де $I(A)$ – індикаторна функція події A.

Для формалізації того класу політики поповнення запасами, в якому визначатиметься оптимальна політика, розглянемо стани типу $q\mathbf{n} \in E$, оскільки саме у цих станах система може робити замовлення на поставку певної кількості матеріальних ресурсів.

Викладення основного матеріалу. Нехай у стані $q\mathbf{n} \in E$ із імовірністю $\alpha_i(q\mathbf{n})$ замовляється матеріальний ресурс обсягу i, $i = 0, 1, 2,\ldots, Q - q$. При цьому $i = 0$ означає, що у цьому стані система не замовляє ресурсів.

Запроваджені марковські керування $\alpha_i(q\mathbf{n})$, $i = 0, 1, 2,\ldots, Q - q$, будемо називати керуючими ситуаційними параметрами (КСП). Вони задовольняють таким умовам:

$$0 \le \alpha_i(q\mathbf{n}) \le 1; \sum_{i=0}^{Q-q} \alpha_i(q\mathbf{n}) = 1 \forall q\mathbf{n} \in E. \tag{1}$$

Таким чином, сформульована вище задача оптимізації даної системи зводиться до пошуку оптимальних значень КСП, які мінімізують сумарні збитки системи.

Як уже згадувалося, клас дворівневих політик поповнення запасами є частинним випадком того класу політик, який тут розглядається. Дійсно, якщо покласти $\alpha_{Q-q}(q\mathbf{n}) = 1$, то отримаємо клас дворівневих політик.

Враховуючи викладене вище, визначаємо, що елементи твірної матриці (ТМ) $\Theta(m\mathbf{n}; m'\mathbf{n}')$, де $m\mathbf{n}$, $m'\mathbf{n}' \in E$, даного керованого ЛМ визначаються таким чином

$$\Theta(mn; m'n') = \begin{cases} \lambda_i, & \textit{якщо} \quad m' = m, n' = n + e_i, \\ \mu_i, & \textit{якщо} \quad m' = m - b_i, n' = n - e_i, \\ \nu_i \alpha_u(qn), & \textit{якщо} \quad m = q, m' = q + i, n' = n, \\ 0 & \qquad \textit{в інших випадках}. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $\mathbf{e}_i$ – i-й ортвектор $(K+1)$-вимірного евклідового простору, $i = 1,\ldots, K+1$.

Стаціонарну ймовірність стану $m\mathbf{n} \in E$ позначимо $p(m\mathbf{n})$. Тоді неважко довести, що сумарні збитки в системі за одиницю часу стаціонарного режиму за наявності КСП визначається таким виразом:

$$G := \sum_{q\mathbf{n} \in E} \sum_{i=1}^{Q} p(q\mathbf{n}) \cdot i \cdot \nu(i) \cdot \alpha_i(q\mathbf{n}) \cdot c_{\text{ä}} + \sum_{m\mathbf{n} \in E} \{ mc_{\text{ç}} + \sum_{i=1}^{K} [n_i c_{\text{î÷}}(i) +$$

$$+ \lambda_i c_{\text{í.ï.}}(i) \cdot I\left(\sum_{i=1}^{K} n_i = N \right)]\} \cdot p(m\mathbf{n}). \tag{3}$$

Тут $c_д$ і $c_з$ – відповідно витрати на доставку й зберігання матеріального ресурсу одиничного розміру; $c_{оч}$ – величина збитків, що виникають внаслідок очікування у черзі однієї i-вимоги протягом одиниці часу; $c_{\text{н.п.}}$ – величина збитків, що виникають внаслідок незадоволеного попиту на ресурс одиничного розміру за однією i-вимогою.

Елементи твірної матриці, показані у виразі (2) дають змогу скласти систему рівнянь рівноваги (СРР) для $p(m\mathbf{n})$, $m\mathbf{n} \in E$:

$$-p(m\mathbf{n})[\Lambda_r \cdot I\left(\sum_{i=1}^{K} n_i < N\right) + \sum_{i=1}^{K}\mu_i I(n_i > 0), m \ne q) + \sum_{i=1}^{K}\nu(i)\alpha_i(q\mathbf{n})\cdot I(m = q)] +$$

$$+\sum_{i=1}^{K}\lambda_i p(m,\mathbf{n}-\mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{K}\mu_i p(m+b_i,\mathbf{n}+\mathrm{e}_i)I(m+b_i \le Q, \sum_{i=1}^{K} n_i < N) +$$

$$+\nu(m-q)\alpha_{m-q}(q\mathbf{n})p(q\mathbf{n})I(m > q) = 0. \qquad (4)$$

$$\sum_{m\mathbf{n}\in E} p(m\mathbf{n}) = 1. \qquad (5)$$

Таким чином, задача знаходження оптимальних значень КСП формулюється так: необхідно мінімізувати функціонал (3) при обмеженнях (1), (4), (5). Ця задача є задачею марковського програмування і може бути розв'язана відомими методами [6], в результаті чого відшукується нерандомізована політика поповнення запасів, бо як відомо [7], у подібних випадках оптимальні значення КСП дорівнюють або нулю, або одиниці. Остання обставина дає змогу запропонувати простий алгоритм ситуаційного керування даною системою. Дійсно, якщо деякого стану $q\mathbf{n} \in E$ величина $\alpha_{i_0}(q\mathbf{n}) = 1$, $i_0 > 0$ (тобто всі $\alpha_i(q\mathbf{n}) = 0$ для $i \ne i_0$), то у випадку, коли система перебуває у цьому стані, оптимальний обсяг замовленого ресурсу має бути рівним i_0; якщо $i_0 = 0$, то у цьому стані система не замовляє ресурсів. Схема даного алгоритму ситуаційного керування наведена на рис. 2, а його технічна реалізація не викликає принципових труднощів.

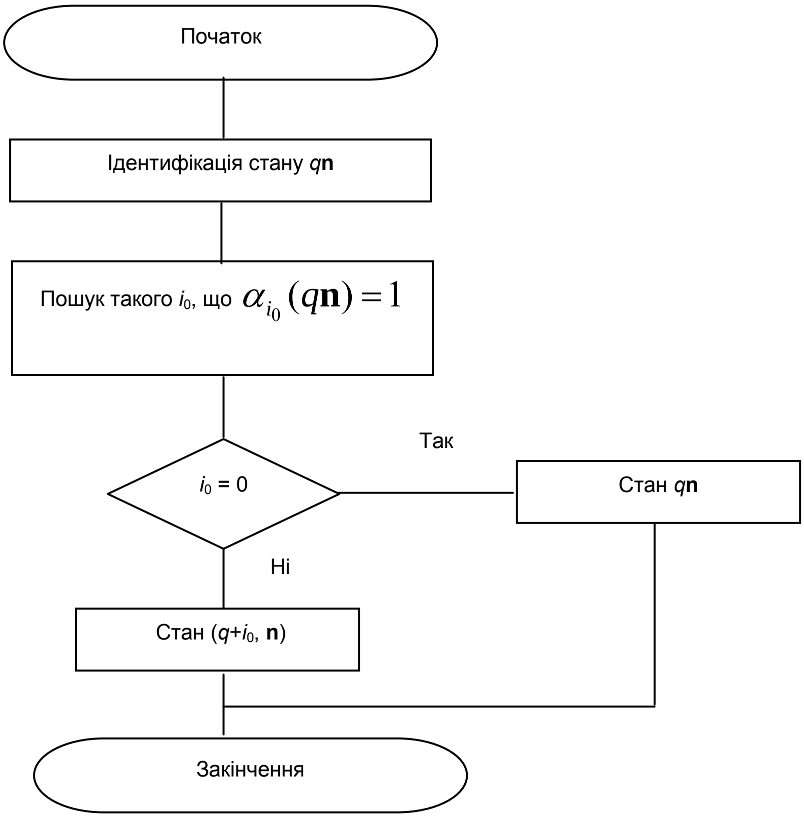

Рис. 2. Алгоритм ситуаційного керування

При великих значеннях Q, N і K запропонований вище метод (називатимемо його точним) наштовхується на величезні обчислювальні труднощі. Через це пропонується наближений метод розв'язування розглянутої задачі, який ґрунтується на ідеях фазового укрупнення станів стохастичних систем [8] і докладно викладений в роботі [9].

Викладення методу почнемо із наступного розщеплення ФПС E:

$$E = \bigcup_{m=q}^{Q} E_m,\ E_m \bigcap E_{m'} = \varnothing,\ m \ne m', \qquad (6)$$

де

$$E_m := \left\{ m\mathbf{n} \in E : \sum_{i=1}^{K} n_i \le N \right\},\ m = \overline{q,Q}.$$

У розщепленні (6) клас станів E_m містить в собі всі ті мікростани ФПС E, в яких рівень ресурсів системи дорівнює m незалежно від кількості різнотипних вимог у системі.

Далі всі мікростани, які входять до підмножини E_m, $m = \overline{q,Q}$, об'єднуються в один укрупнений стан, що позначається $\langle m\rangle$, і будується функція укрупнення U_m: $E \to \hat{E}_m$, де

$$\hat{E}_m := E_m \bigcup M \setminus \{\langle m\rangle\},\ M := \{\langle q\rangle, \langle q+1\rangle, \ldots, \langle Q\rangle\},$$

які визначаються таким чином:

$$U_m(xn) = \begin{cases} mn, & \text{якщо } x = m, \\ \langle m'\rangle, & \text{якщо } x = m'. \end{cases} \qquad (7)$$

Функції укрупнення (7) визначають $Q - q$ укрупнених моделей, і всі вони мають аналогічну структуру. Тому для більшої конкретності викладення зафіксуємо певне значення $\langle m\rangle \in M$ і розглянемо укрупнену модель із ФПС $\hat{E}_m$.

Керуючі ситуаційні параметри для всіх укрупнених моделей визначаються так само, як і для вихідної моделі.

а) при $m \neq q,\ i = \overline{1,K}$

Головна проблема при дослідженні укрупнених моделей полягає у визначенні їх твірних матриць. Для системи, яку ми розглядаємо, елементи твірної матриці (ТМ) $\Theta_m(x;y),\ x,y \in \hat{E}_m$, при використанні розщеплення (6) і функцій укрупнення (7) визначаються таким чином:

$$\Theta_m(mn;m'n') = \begin{cases} \lambda_i p(mn), & \textit{якщо } n' = n + e_i, \\ 0 & \textit{в інших випадках}; \end{cases} \tag{8}$$

$$\Theta_m(mn;\langle m'\rangle) = \begin{cases} \mu_i p(mn) I(n_i > 0), & \textit{якщо } m' = m - b_i, \\ 0 & \textit{в інших випадках}; \end{cases} \tag{9}$$

$$\Theta_m(\langle m\rangle;mn) = \begin{cases} \mu_i p(m + b_i, n + e_i), & \textit{якщо } m' = m + b_i, \\ 0 & \textit{в інших випадках}; \end{cases} \tag{10}$$

$$\Theta_m(\langle m'\rangle;\langle m''\rangle) = \begin{cases} \mu_i p(m'n) I(n_i > 0), & \textit{якщо } m' > b_i, m'' = m' - b_i, \\ 0 & \textit{в інших випадках}; \end{cases} \tag{11}$$

б) при $m = q,\ i = \overline{i,K}$, елементи $\Theta_q(q\mathbf{n};q\mathbf{n}'), \Theta_q(\langle m'\rangle;q\mathbf{n})^3\Theta_q(\langle m'\rangle;\langle m''\rangle)$ визначаються відповідно із виразів (8), (10) та (11), а

$$\Theta_q(qn;\langle m'\rangle) = \begin{cases} \nu(i) p(qn) \alpha_i(qn), & \textit{якщо } m' = q + i, \\ 0 & \textit{в інших випадках}. \end{cases} \tag{12}$$

Для доведення справедливості тверджень (8) – (12) розглянемо різні можливі випадки.

1. Випадок $m \neq q$.

Оберемо деякий стан $m\mathbf{n} \in \hat{E}_m$. Оскільки у цьому випадку зміни станів можливі лише при надходженні вимог і в моменти закінчення їх обслуговування, то розглянемо ці моменти окремо.

Після закінчення обслуговування i-вимоги у стані $m\mathbf{n} \in \hat{E}_m$ відбувається перехід $m\mathbf{n} \to (m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i)$, де $(m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \in \hat{E}_{m-b_i}$, тобто $(m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \notin E_m$.

Якщо у момент надходження деякої i-вимоги система перебуває у стані $m\mathbf{n} \in \hat{E}_m$, в якому $n_1 + n_2 + \ldots + n_K < N$, то вимога, що надійшла, із імовірністю λ_i приймається в систему, тобто відбувається перехід $m\mathbf{n} \to (m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i)$, де $(m,\ \mathbf{n} + \mathbf{e}_i) \in \hat{E}_m$. Таким чином, у будь-якому стані $m\mathbf{n} \in \hat{E}_m$ після закінчення обслуговування i-вимоги система переходить до стану $(m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i)$, що належить підмножині $\hat{E}_{m-b_i}$, а у моменти надходження i-вимоги відбувається перехід до стану $(m,\ \mathbf{n} + \mathbf{e}_i) \in \hat{E}_m$. Тоді, використовуючи формули повної ймовірності, переконуємося, що рівність (8) є вірною.

Визначимо $\Theta_m(m\mathbf{n};\langle m'\rangle)$. Із мікростану $m\mathbf{n} \in \hat{E}_m$ можна потрапити в укрупнений стан $\langle m'\rangle$ лише тоді, коли $m' = m - b_i$ і $n_i > 0$. Тобто перехід $m\mathbf{n} \to \langle m'\rangle$ може відбуватися в моменти закінчення обслуговування i-вимоги, якщо $n_i > 0$. Тоді рівень ресурсів зменшується на b_i одиниць, а із системи виходить одна вимога, тобто відбувається перехід $m\mathbf{n} \to m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i$, де $(m - b_i,\ \mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \in \hat{E}_{m-b_i}$ (іншими словами, відбувається перехід до укрупненого стану $\langle m - b_i\rangle$). Як вказувалося вище, при надходженні до системи, що перебуває у стані $m\mathbf{n} \in \hat{E}_m$, вимоги будь-якого типу відбувається перехід до стану, який також належить підмножині $\hat{E}_m$. Таким чином, для обчислення $\Theta_m(m\mathbf{n};\langle m'\rangle)$ з урахуванням формули повної ймовірності отримаємо рівність (9).

Аналогічно розмірковуючи, встановлюємо, що перехід $\langle m'\rangle \to m\mathbf{n}$ можливий лише у випадку $m' = m + b_i, i = \overline{1,K}$, а перехід $\langle m'\rangle \to \langle m''\rangle$ – у випадку $m'' = m + b_i, i = \overline{1,K}$. Очевидно, що інтенсивності переходів між цими станами визначаються, відповідно, із співвідношень (10) і (11).

2. Випадок $m = q$.

Із доведення твердження для випадку $m \neq q$ видно, що $\Theta_q(q\mathbf{n};q\mathbf{n}')$, $\Theta_q(\langle m'\rangle;q\mathbf{n})$ і $\Theta_q(\langle m'\rangle;\langle m''\rangle)$ обчислюються відповідно із виразів (8), (10) та (11) при $m = q$.

Тепер визначимо $\Theta_q(q\mathbf{n};\langle m'\rangle)$. Оскільки у стані $q\mathbf{n} \in E_q$ припиняється відпускання матеріальних ресурсів, то зміни станів можливі лише при надходженні вимог і у моменти надходження ресурсів на склад даної системи. Тому розглянемо ці моменти окремо. У моменти надходженні i-вимоги відбувається перехід $q\mathbf{n} \to (q,\ \mathbf{n}+\mathbf{e}_i)$, де $(q,\ \mathbf{n}+\mathbf{e}_i) \in E$, тобто система залишається у тій же підмножині E_q. Тому із мікростану $q\mathbf{n} \in \hat{E}_q$ можна потрапити до укрупненого стану $\langle m'\rangle$ лише тоді, коли $m' = q+i$. Перехід $q\mathbf{n} \to \langle q + i\rangle$ може відбуватися у моменти надходження на склад системи матеріальних ресурсів обсягу i (з імовірністю $\alpha_i(q\mathbf{n})$. Оскільки інтенсивність надходження p-вимог розміру i дорівнює $\nu(i)$, то з урахуванням формули повної ймовірності для обчислення $\Theta_q(q\mathbf{n};\langle m'\rangle)$ отримаємо рівність (12).

Таким чином задача визначення оптимальних значень КСП зводиться до паралельної оптимізації побудованих укрупнених моделей. Проте при розв'язуванні останніх задач неможливо скористатися точними значеннями елементів відповідних ланцюгів Маркова, що визначаються формулами (8)–(12), бо стаціонарний розподіл вихідної моделі $\{p(m\mathbf{n}):\ m\mathbf{n} \in E\}$ апріорі невідомий. Тому доводиться апроксимувати точні значення необхідних елементів нашого ланцюга. Тоді можна використати такі оцінки зверху і знизу цих величин при $i = \overline{1, K}$:

$$\overline{\Theta}_m(mn; mn') = \begin{cases} \lambda_i, & \text{якщо } n' = n + e_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\underline{\Theta}_m(mn; mn') = \begin{cases} \varepsilon\lambda_i, & \text{якщо } n' = n + e_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (14)$$

$$\overline{\Theta}_m(mn; \langle m' \rangle) = \begin{cases} \mu_i, & \text{якщо } m' = m - b_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\underline{\Theta}_m(mn; \langle m' \rangle) = \begin{cases} \varepsilon\mu_i, & \text{якщо } m' = m - b_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (16)$$

$$\overline{\Theta}_m(\langle m' \rangle; mn) = \begin{cases} \mu_i, & \text{якщо } m' = m + b_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (17)$$

$$\underline{\Theta}_m(\langle m' \rangle; mn) = \begin{cases} \varepsilon\mu_i, & \text{якщо } m' = m + b_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (18)$$

$$\overline{\Theta}_m(\langle m' \rangle; \langle m'' \rangle) = \begin{cases} \mu_i, & \text{якщо } m' > b_i, m'' = m' - b_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (19)$$

$$\underline{\Theta}_m(\langle m' \rangle; \langle m'' \rangle) = \begin{cases} \varepsilon\mu_i, & \text{якщо } m' > b_i, m'' = m' - b_i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (20)$$

$$\overline{\Theta}_q(qn; \langle m' \rangle) = \begin{cases} \nu(i)\alpha_i(qn), & \text{якщо } m' = q + i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (21)$$

$$\underline{\Theta}_q(qn; \langle m' \rangle) = \begin{cases} \varepsilon\nu(i)\alpha_i(qn), & \text{якщо } m' = q + i, \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases} \quad (22)$$

Тут $\varepsilon > 0$ є нижньою границею величини $p(m\mathbf{n})$, $m\mathbf{n} \in E$ (при розв'язуванні конкретних задач величина ε визначається з урахуванням розмірності ФПС моделі, наприклад, можна обрати $\varepsilon = 10^{-6}$).

Критерій функціонування системи (3) також оцінюється зверху і знизу відповідно виразами (23) і (24):

$$\begin{aligned} \overline{G}_m &:= I(m = q) \sum_{q\mathbf{n} \in \hat{E}_q} \sum_{i=1}^{Q-q} \pi(q\mathbf{n}) \cdot i \cdot \nu(i)\alpha_i(q\mathbf{n}) \cdot c_{\text{Ä}} + \\ &+ I(m \neq q) \sum_{\langle q \rangle \in \hat{E}_m} \sum_{i=1}^{Q-q} \pi(\langle q \rangle) \cdot i \cdot \nu(i) \cdot c_{\text{Ä}} + \sum_{\langle m \rangle \in \hat{E}_m} [mc_{\text{Ç}} + \\ &+ N \max\{c_{\text{î×}}(i) : i = \overline{1, K}\} + \max\{\lambda_i : i = \overline{1, K}\} \cdot \max\{c_{\text{Ï.Ï.}}(i) : i = \overline{1, K}\}]\pi(\langle m \rangle; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}_m &:= I(m = q) \sum_{q\mathbf{n} \in \hat{E}_q} \sum_{i=1}^{Q-q} \pi(q\mathbf{n}) \cdot i \cdot \nu(i)\alpha_i(q\mathbf{n}) \cdot c_{\text{Ä}} + \\ &+ I(m \neq q) \sum_{\langle q \rangle \in \hat{E}_m} \sum_{i=1}^{Q-q} \pi(\langle q \rangle) \cdot i \cdot \nu(i) \cdot c_{\text{Ä}} + \sum_{\langle m \rangle \in \hat{E}_m} [mc_{\text{Ç}} + \\ &+ N \min\{c_{\text{î×}}(i) : i = \overline{1, K}\} + \min\{\lambda_i : i = \overline{1, K}\} \cdot \min\{c_{\text{Ï.Ï.}}(i) : i = \overline{1, K}\}]\pi(\langle m \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

де $\pi(x)$ – стаціонарна імовірність стану $x \in \hat{E}_m$.

Тоді задача оптимізації укрупненої моделі із ФПС $\hat{E}_m$ розпадається на мажорантну й мінорантну задачі. Мажорантна (мінорантна) задача полягає у мінімізації (максимізації) $\overline{G}_m(\underline{G}_m)$ при обмеженнях, що задаються СРР для $\pi(x)$, $x \in \hat{E}_m$. Ця задача складається за допомогою виразів (13), (15), (17), (19), (21) ((14), (16), (18), (20), (22)). Ця СРР в обох випадках доповнюється ще умовою нормування

$$\sum_{x \in \hat{E}_m} \pi(x) = 1.$$

Точність запропонованого методу оцінюється так [9]:

$$\max_{m=q,Q} \underline{G^*}_m \le G^* \le \min_{m=q,Q} \overline{G^*}_m, \quad (25)$$

де G^*, $\underline{G^*}_m, \overline{G^*}_m$ – відповідно мінімальні значення G, $\underline{G}_m, \overline{G}_m$.

Важливо зазначити, що оскільки кінцевою метою оптимізації укрупнених моделей є визначення оптимальних значень КСП, то, як видно із виразів (13)–(22), ці параметри визначаються в результаті розв'язання задачі оптимізації укрупненої моделі із ФПС $\hat{E}_q$, адже завдяки розщепленню (6) КСП зустрічаються лише в цих моделях (для інших моделей задачі оптимізації фактично перетворюються на задачі розрахунку).

Висновки. Таким чином, укрупнені моделі визначаються вибором конкретної схеми розщеплення ФПС вихідної моделі, і у цьому сенсі використане тут розщеплення (6) не є єдино можливим. Після вибору конкретної схеми розщеплення на похибку запропонованого методу впливає схема апроксимації невідомих параметрів в укрупнених моделях. Тому якщо використовувати більш точні схеми апроксимації, то можна одержати більш близьке до вихідного рішення, при цьому оцінка (25) залишається вірною у всіх випадках.

Слід також зауважити, що для зменшення розмірності задач оптимізації моделі із ФПС $\hat{E}_q$ описаний вище алгоритм побудови укрупнених моделей можна застосувати вже для останньої моделі, тобто утворюється ієрархія укрупнених моделей, при цьому на кожному рівні ієрархії розроблений алгоритм використовується аналогічним способом.

1. Постан М.Я. Применение марковских процессов для моделирования систем обслуживания встречных транспортных потоков. – К.: 1988. – 14 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова; 88-6). 2. Kalpakam S., Arivarignan G. A loss sales inventory system in a random environment // Stochast. Anal. and Appl. – 1989. -7, N 4. – P. 367–385. 3. Kalpakam S., Arivarignan G. Inventory system with random supply quantity // OR Spektrum. – 1990. – 12, N 3. – P. 139–145. 4. Меликов А.З. Марковская модель процесса накопления в системах транспортно-складского типа // Электрон. моделирование. – 1995. – 17, № 3. – С. 79–83. 5. Лісовський В.І., Меліков А.З. Модель процесу накопичення ресурсів у складській системі // Проблеми системного підходу в економіці: Зб. наук. праць: Випуск 37. – К.: НАУ, 2011. – С. 46–52. 6. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 168 с. 7. Мова В.В., Пономаренко Л.А., Калиновский А.М. Приоритетное обслуживание в АСУ. – К.: Техника, 1977. – 160 с. 8. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наук. думка, 1978. – 184 с. 9..Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Рюмшин Н.А. Математические модели многопотоковых систем обслуживания. – К.: Техника, 1991. – 265 с.

Надійшла до редколегії 14.09.11