

цих заходах беруть провідні працівники, аспіранти та студенти обох спеціальностей кафедри ГБГТ.

Здобутком співпраці в наукових дослідженнях та навчальній роботі є чисельні доповіді і публікації на наукових конференціях різних рівнів; спільно з науковцями кафедри геомеханіки, підземного будівництва і управління охороною поверхні СТУ видано в Польщі 2 наукові монографії, співавторами яких є проф. В.Г.Кравець, проф. А.М. Самедов, проф. О.О.Вовк. За 7 останніх років викладачами кафедри видано за рубежом (в Польщі, Росії та Беніні) 60 статей, отримано 4 зарубіжних патенти.

Результатом співробітництва стали спільні наукові та технологічні розробки для вугільних підприємств Сілезьського басейну, захист за отриманими науковими матеріалами докторської дисертації завідувачем лабораторії промислових вибухових речовин хімфаку СТУ А. Воеводкою (наук. консультант проф. В.Д.Воробйов), кандидатської дисертації інж. Є. Завішею (наук. керівник проф. В.Г. Кравець), інж. Є. Олеком (наук керівник проф. О.О. Вовк), захист кандидатських дисертацій інж. З. Барановським (наук. керівник проф. О.О. Вовк) та інж. М. Кугелем (наук. керівник проф. О.О. Вовк).

В 2012р. укладено договір про науково-методичну співпрацю з Варненським технічним університетом «Черноризець Храбр». Протягом своєї діяльності професорсько-викладацький склад кафедри, навчально-допоміжний персонал виконали великий обсяг робіт з підготовки фахівців, а враховуючи помітне якісне зростання персоналу, кафедра надалі здатна забезпечити зростаючі запити замовників на кваліфікованих спеціалістів для гірничої та гірничо-будівельної галузей промисловості України і одночасно має значний потенціал і перспективи для подальшого розвитку дослідницької діяльності.

Стаття надійшла до редакції 02.04.2014 р.

УДК. 622.272

А. И. Крючков, к.т.н., доц. (НТУУ «КПІ»)

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ И МЕТОД N – ХАРАКТЕРИСТИК В ДИНАМИКЕ ТРЕЩИН

A. I. Kriuchkov, Ph.D, associate professor (NTUU «KPI»)

PRINCIPLE OF THE LEAST ACTION AND METHOD OF N - CHARACTERISTIC IN DYNAMICS OF CRACKS

В статье рассмотрена математическая модель динамики развития трещин в горных породах с использованием принципа наименьшего действия и метода N –

характеристик, позволяющие выбрать режим разрушения горной породы минимальной энергоемкостью.

Ключевые слова: трещина, модель, динамика, действие, порода, разрушение, сопротивление, энергоемкость.

У статті розглянута математична модель динаміки розвитку тріщин в гірських породах з використанням принципу найменшої дії і методу N - характеристик, що дозволяють вибрати режим руйнування гірської породи мінімальною енергоємністю.

Ключові слова: тріщина, модель, динаміка, дія, порода, руйнування, опір, енергоємність.

In the article the mathematical model of dynamics of development of cracks is considered in rock with the use of principle of the least action and method of N - characteristic, allowing to choose the mode of destruction of rock minimum power intensity.

Keywords: crack, model, dynamics, action, rock, destruction, resistance, power intensity.

Введение. Разрушение горных пород представляет собой процесс образования, роста и слияния трещин. Эффективным аналитическим инструментом его изучения являются методы линейной механики разрушения. Распространение этих методов на явления динамического роста трещин в горных породах основано на концепции квазихрупкого разрушения. В этом случае предполагается, что при действии разрушающего внешнего усилия небольшое пластически деформированное ядро у вершины трещины перемещается вместе с трещиной. Разрушение материала как раз и происходит в этом ядре при упругой деформации тела в целом. Можно ожидать, что при больших скоростях распространения трещин роль пластических деформаций будет уменьшаться, но при этом необходимо учитывать динамику трещин.

К настоящему времени предложены несколько решений динамических задач о трещине, однако до сих пор в литературе высказываются обоснованные сомнения по поводу их применимости, так как измеренные скорости распространения трещин значительно отличаются от их теоретического значения [1].

Цель статьи. Разработка и анализ динамической нестационарной нелинейной модели развития трещины в горных породах с использованием принципа наименьшего действия и метода N – характеристик.

Материал и результаты исследований. Принцип наименьшего действия в динамике трещины. Для описания движения точек тела с трещиной при его нагружении используем классические методы аналитической механики путем введения в уравнение движения членов, учитывающих действие внешних и диссипативных сил при условии, что скорость деформации тела намного меньше скорости внутренних процессов диссипации энергии. Дальнейший анализ для детерминированной математической модели при таком допущении базируется на гипотезе о применимости принципа наименьшего действия к движущейся трещине [2]. В указанном случае этот принцип можно сформулировать так: из всех возможных траекторий, по которым трещина

могла бы развиваться в твердом теле, в действительности реализуется только траектория, являющаяся экстремалью функционала

$$D = \int_{t_1}^{t_2} [L(q, \dot{q}, t) - \Phi(q, t)] dt. \quad (1)$$

Выражение $L(q, \dot{q}, t)$ является функцией Лагранжа второго рода для обобщенных координат трещины и времени; $\Phi(q, t)$ – обобщенная непотенциальная силовая функция, учитывающая внешнее воздействие и диссипацию энергии. Из принципа наименьшего действия вытекают уравнения Лагранжа второго рода [3]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j Q_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \text{ где:} \quad (2)$$

Q_{ij} – обобщенная непотенциальная сила.

Следовательно, согласно принципу наименьшего действия, движение трещины в твердом теле может быть описано уравнениями Лагранжа второго рода, если известны функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ для трещины и действующие на нее обобщенные силы Q_{ij} . Учитывая инвариантность уравнений Лагранжа, получим систему уравнений, описывающих движение трещины для плоской задачи в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_x} (U_{\sigma-a} + T_{\sigma-a}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\sigma-a}}{\partial \dot{a}_x} \right) &= N_x(\dot{a}_x); \\ \frac{\partial}{\partial a_y} (U_{\sigma-a} + T_{\sigma-a}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\sigma-a}}{\partial \dot{a}_y} \right) &= N_y(\dot{a}_y), \text{ где:} \end{aligned} \quad (3)$$

$U_{\sigma-a}$ – потенциальная энергия трещины; $T_{\sigma-a}$ – кинетическая энергия; $N_x(\dot{a}_x)$ – проекция вектора сопротивления движению трещины на ось X ; $N_y(\dot{a}_y)$ – проекция вектора сопротивления движению трещины на ось Y ; a_x и a_y – проекции полудлины трещины на оси X и Y соответственно; \dot{a}_x и \dot{a}_y – проекции скорости трещины на оси X и Y соответственно.

Движущая сила трещины. Полученные уравнения движения трещины содержат ряд принципиальных отличий от существующих. Во-первых, они позволяют описывать движение не только прямолинейных, но и криволинейных трещин. Во-вторых, левая часть уравнений (3) представляет собой, как и в концепции R -кривых [1], движущую силу трещины

$$J_i = \frac{\partial}{\partial a_i} (U_{\sigma-a} + T_{\sigma-a}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\sigma-a}}{\partial \dot{a}_i} \right), \quad (4)$$

однако в нашем случае она зависит и от скорости роста трещины, входящей в выражение через кинетическую энергию. В-третьих, правая часть уравнений (3)

представляет собой динамическое сопротивление материала распространению трещины, зависящее от ее скорости.

При допущениях, что кинетическая энергия мало влияет на процесс роста трещины и сопротивление распространению трещины постоянно, получим

$$\frac{\partial(U_{\sigma-a})}{\partial a_x} = R, \text{ то есть ранее полученное основополагающее уравнение в}$$

концепции R – кривых при плоской деформации, являющееся частным случаем уравнения (3) при принятых выше допущениях [1].

Как следует из уравнений (3), для определения движущей силы трещины J_I необходимо и достаточно знать в любой момент времени кинетическую $T_{\sigma-a}$ и потенциальную $U_{\sigma-a}$ составляющие энергии поля деформаций в зоне вершины трещины.

При постоянном внешнем растягивающем напряжении для прямолинейной трещины нормального растяжения (первого рода) движущая сила трещины определяется по выражению

$$J_I = \frac{(\pi(1-\nu^2))}{E} \sigma_1^2 a_x \left[1 - 2 \left(\frac{\dot{a}_x}{V_m} \right)^2 \left(1 + \frac{\ddot{a}_x}{\dot{a}_x} \frac{\dot{a}_x}{a_x} \right) \right], \text{ где:} \quad (5)$$

σ_1 – главное максимальное растягивающее напряжение; a_x – проекция полудлины трещины на ось X ; \dot{a}_x – проекция скорости движения трещины на ось X ; \ddot{a}_x – проекция ускорения трещины на ось X ; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; V_m – максимальная скорость развития трещины в заданной горной породе.

Для неподвижной трещины первого рода это уравнение упрощается и превращается в известное классическое выражение

$$J_I = \frac{\pi(1-\nu^2)}{E} \sigma_1^2 a_x, \quad (6)$$

полученное Ирвином [4]. Анализ приведенных выражений позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, при появлении радиальной составляющей движущей силы трещины J_I траектория трещины будет искривляться. Для первоначально прямолинейной трещины первого рода дальнейшее развитие по прямой без применения специальных мер практически невозможно потому, что такое состояние равновесия является неустойчивым и малейшее случайное отклонение от прямой приведет к появлению и прогрессирующему дальнейшему искривлению траектории.

Во-вторых, зависимость движущей силы трещины от ее скорости довольно сложна. При постоянном росте внешней нагрузки движущая сила для прямолинейной трещины падает с ростом ее скорости. При снижении внешней нагрузки существует минимум от скорости.

N – характеристика сопротивления развитию трещины. Под сопротивлением материала развитию трещины подразумевается псевдовектор \vec{N} , обусловленный необратимыми преобразованиями энергии поля упругих деформаций в энергию пластических деформаций в непосредственной близости от вершины трещины, а также в потенциальную энергию вновь образовавшихся поверхностей трещины

$$\vec{N} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_{\sigma-a}}{\partial \dot{q}} \right) + 2\gamma \vec{a}, \text{ где:} \quad (7)$$

$U_{\sigma-a}$ – энергия пластических деформаций; γ – энергия образования единицы поверхности в единицу времени, Дж/(м²·с); \vec{a} – вектор скорости вершины трещины.

Аналитическая зависимость динамического сопротивления распространению трещины от ее скорости для различных материалов, в том числе и для горных пород, пока не получена, поэтому используем экспериментальные наблюдения.

Наиболее вероятной зависимостью сопротивления материала распространению трещины от ее скорости является N -образная характеристика, которая имеет особенность типа сборки Уитни [5] и может быть описана полиномом пятой степени. Пример таких характеристик, рассчитанных по экспериментальным данным работы [6], приведен на рис.1 и является убедительным подтверждением предположения о N -образной зависимости сопротивления материала развитию трещины как для горных пород, так и для других материалов.

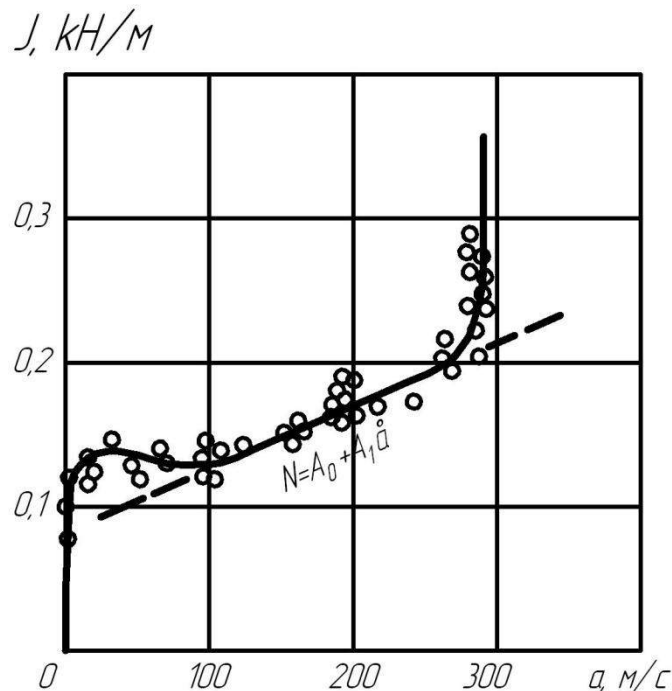


Рис. 1. N – характеристика (сопротивление развитию трещины).

Необходимо отметить, что для трещины первого рода сопротивление материала развитию трещины резко возрастает и стремится к бесконечности при стремлении скорости трещины к пределу $a_{\max} \approx 0,6C_s$. Очень часто необходимо знать не всю характеристику, а только ее характерные точки. Одной из таких точек является критическое значение сопротивления $N_c(\dot{a})$, при котором начинается нестабильный рост трещины. Для горных пород критическое значение сопротивления развитию трещины по данным работы [2], приведены в табл. 1.

Под траекторией развития трещины подразумевается траектория движения ее вершины. Хотя трещина представляет собой разрез, пустоту в теле, можно говорить о кинетической и потенциальной составляющих энергии трещины, подразумевая под этим, естественно, энергию близлежащих к трещине частиц среды, смещающихся при внешнем воздействии.

Таблица 1. Параметры упругости и сопротивления горных пород разрушению

Горная порода	E ГПа	ν	K_{Ic} МПа·м ^{0,5}	N_{Ic} Дж/м ²
Гранит	65	0,23	0,57	14,87
Уголь	13	0,27	0,27	16,33
Мрамор	80	0,28	0,71	18,24
Ангидрит	78	0,33	0,76	20,73
Доломит	55	0,27	0,71	26,70
Известняк	61	0,26	0,80	30,73
Алевролит	26	0,26	0,53	31,65
Песчаник	48	0,20	0,89	49,77
Базальт	64	0,23	1,11	57,28
Диорит	71	0,26	1,33	79,98
Габбродиабаз	96	0,27	1,65	82,60
Порфирит	55	0,22	1,50	122,3
Сланцы	10	0,22	1,75	168,2

Уравнения движения трещины и их анализ. Предлагаемый метод N -характеристик для описания траектории движения трещины, основанный на принципе наименьшего действия, позволяет изучать развитие произвольно ориентированных прямо- и криволинейных трещин, если для них возможно составить систему уравнений Лагранжа (3). Для плоской задачи в полярных координатах эти уравнения примут вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(U_{\sigma-a} + T_{\sigma-a}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{\sigma-a}}{\partial \dot{r}}\right) &= N_r; \\ \frac{\partial}{r\partial\theta}(U_{\sigma-a} + T_{\sigma-a}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{\sigma-a}}{r\partial\theta}\right) &= N_\theta. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае прямолинейной трещины, и, в частности, для трещины первого рода $J_\theta = 0$ и тогда получим дифференциальное нелинейное уравнение второго

порядка, которое допускает при определенном соотношении параметров периодическое решение, описывающее реальное колебательное (скачкообразное движение) трещины [7].

Так как нас интересует качественный анализ уравнения движения трещины, то целесообразно параболическую зависимость движущей силы от скорости заменить линейной, что значительно упростит математические выкладки и подтверждается экспериментально.

Рабочий участок N -характеристики также можно линеаризовать без значительной потери точности расчетов (см. рис.1). Тогда с некоторым приближением движение трещины описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка [2]:

$$\frac{\pi(1-\nu^2)}{E} \sigma^2 a \left[\left(1 + \frac{12}{V_m^2} \cdot \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} \cdot a^2 \right) \left(1 - \frac{\dot{a}}{\dot{a}_m} \right) \right] = N_0 + N_1 \dot{a}. \quad (9)$$

Однако, чтобы уравнение (9) допускало периодическое решение, необходимо дополнить его принципом скачка [7]. Длина трещины не может изменяться скачком в силу конечности энергии системы, но зато скорость трещины \dot{a} изменяться скачком может. Если уравнение (9) неоднозначно относительно \dot{a} и a не может изменяться скачками, но система допускает скачкообразные изменения \dot{a} , то существующие в системе периодические движения определяются непрерывными периодическими решениями для a и разрывными периодическими решениями для \dot{a} [7]. Графически уравнение (9) представлено на рис. 2. Точка пересечения зависимостей $J(\dot{a})$ и $N(\dot{a})$ является его решением. Проанализируем процесс развития трещины и выделим его характерные этапы.

В инкубационном периоде на начальном участке N -характеристики (см. рис. 2) при приложении возрастающей нагрузки к телу с трещиной происходит медленный рост пластической зоны до критического размера $r_s = \frac{a_0 \sigma^2}{6\sigma_s}$. В точке

B дальнейшее увеличение зоны пластичности прекращается и начинается медленный устойчивый рост трещины. Точка B для трещин различной длины определяется неоднозначно, так как размер зоны пластичности тем больше, чем больше начальная длина трещины. В инкубационном периоде (участок OB) рост эффективной длины трещины $a_э$, в период устойчивого роста (участок BC) действительной длины трещины a , будет происходить с небольшой скоростью.

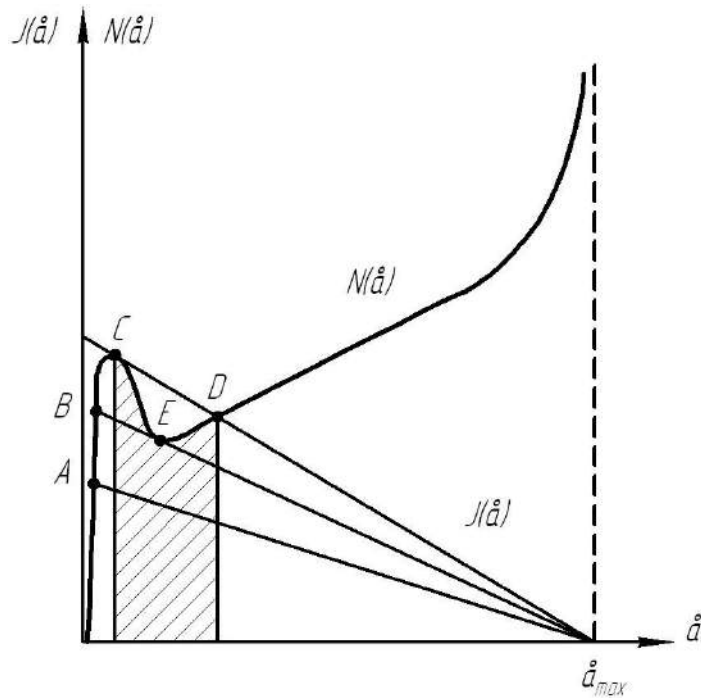


Рис. 2. Метод N -характеристик в динамике развития трещин:

1 – движущая сила трещины; 2 – сопротивление горной породы развитию трещины

В точке C выполняется условие $\frac{\partial J}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial N}{\partial \dot{a}}$ и в силу принятого постулата скачка, трещина начинает развиваться с ускорением, а точка разрушения на N -характеристике переместится в точку D . Непосредственно перед скачком и в момент скачка $\frac{\partial N}{\partial \dot{a}} \geq 0$, поэтому трещина тормозится. В точке C произойдет снижение скачком движущей силы с разгрузкой системы и дальнейшее поведение трещины зависит от соотношения ее параметров. Если это соотношение такое, что $\dot{a} < 0$, то скорость трещины будет снижаться. В противном случае разрушение произойдет при постоянной или возрастающей до максимальной величины a_m скорости трещины.

Более глубокий анализ эквивалентной системы второго порядка, описываемой уравнением (9), по методу Ляпунова [7] подтверждает возможность различных режимов роста трещины в точке D в зависимости от параметров трещины и режима нагружения. При торможении трещины в точке E снова соблюдается условие скачка $\frac{\partial J}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial N}{\partial \dot{a}}$ и рабочая точка переместится в первоначальную точку B , закончив тем самым полный цикл. Трещина практически остановится. В точке B движущая сила действует на трещину с ускорением, но для начала разрушения необходимо, чтобы пластическая зона у вершины увеличилась по сравнению с предыдущим циклом, так как теперь длина трещины стала значительно больше первоначальной. Поэтому рост трещины начинается снова в точке B , но уже при меньшем внешнем напряжении и цикл снова может повториться. В системе возникают

автоколебания скорости роста трещины, что объясняет наблюдаемые в экспериментах [6,8] «зубья текучести» на диаграмме «нагрузка-деформация». Если в точке D условие $\ddot{a} < 0$ соблюдаться не будет, то произойдет срыв автоколебаний.

Выводы

Проведенный качественный анализ и рассмотренное количественное сравнение аналитических зависимостей и экспериментальных данных по развитию трещин подтверждают справедливость принятого подхода к изучению динамики трещин в горных породах, в основу которого положены принцип наименьшего действия и метод N -характеристик. Этот подход и предложенные конкретные модели развития трещин объясняют как ранее установленные закономерности развития трещин, так и те, которые пока не нашли удовлетворительного объяснения. Сюда можно отнести: различия в поведении трещины в инкубационном, устойчивом и неустойчивом периодах роста; возникновение одного или иногда целой серии акустических "хлопков" и "зубьев текучести" при испытании материалов, в том числе и горных пород, являющихся реакцией испытываемого образца и нагружающей системы на автоколебания скорости трещины; установление условий, при которых автоколебания не возникают, то есть трещина либо тормозится, либо неустойчиво развивается с большой скоростью; объяснение эффекта стабилизации скорости трещины.

Несмотря на то, что предлагаемый метод N -характеристик в анализе динамики трещин является не более чем рабочей гипотезой, нуждающейся в дальнейшей аналитической проработке и обстоятельной экспериментальной проверке, он позволяет уже на настоящем этапе объяснить ряд явлений при образовании и развитии трещин в горных породах и рекомендовать более рациональные режимы технологического разрушения горных пород, как с точки зрения снижения энергоемкости разрушения, так и уменьшения динамических нагрузок на исполнительные органы.

Список использованных источников

1. Broek D. *Osnovy mehaniki razrusheniy* / D. Broek; [per. s angl.] – Leyden, 1974; М.: Vysshaya shkola, 1980. – 368 p.
2. Kruchkov A.I. *Vliyanie variacii i korrelyacii parametrov rezhima raboti ochistnogo kombajna na nagruzku lavi: dis. kand. tehn. nauk: 05.15.02* / Kruchkov Anatolij Ivanovich. – К. 1988. – 233 С.
3. Berdichevskiy V.L. *Variacionnye principy mehaniki sploshnoy sredy* / V.L. Berdichevskiy. – М.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1983. – 448 p.
4. Irvin G.R. *Fracture dynamics in book "Fracturing of Metals"* / G.R. Irvin. – ASM, Cleveland, 1948, pp. 147-166.

5. Poston T., Stuart H Teoriya katastrof i ey prilogeniya / T. Poston , N. Stuard. – M.: Mir, 1980. – 607 p.
6. Kobayasi T. Zavisimost meghdu skorostyu tresheny i koefizientom intensivnosti napryageniy v polumerah s dvoynym luchepriplomleniem. Mehanika razrusheniya. Bystroe razrushenie, ostanovka tre cshin / T. Kobayasi, D. Deli. – M.: Mir, 1981. – С. 101-119.
7. Andronov A.A. Teoriya kolebaniy / A.A.Andronov , A.A. Vitt, S.E. Haykin. – M. Nauka, 1981. – 568 p.
8. Beron A.N. Rezanie uglya / A.N. Beron, A.S. Kazanskiy, B.M. Leybov, E., E. Poznin. – M.: Gosgortehizdat, 1962. – 140 p.
9. Kalthoff I. Izmereniya dinamicheskogo koefizienta napryageniy dlya bystrorasprostranyayuschihsy treschin v obrazcah tipa dvoynoy konsolnoy balki. Mehanika razrusheniya. Bystroe razrushenie, ostanovka treschiny / I. Kalthoff, I. Beynet, C. Vinkler. – M.: Mir, 1981. – Выр. 25. – P. 22-41.

Статья поступила в редакцию 26.05.2014 г.

УДК 624.131.23

А. М. Самедов д. т. н, проф., Д. В. Ткач, асп. (НТУУ «КПІ»)

РЕОЛОГИЧНІ ПАРАМЕТРИ ПЕРЕЗВОЛОЖЕНИХ ГЛИНИСТИХ ГРУНТІВ ЗА ТЕОРІЄЮ СТАРІННЯ

A. M. Samedov, dr. tech. sci., prof., D. V. Tkach, postgraduate student (NTUU «KPI»)

RHEOLOGICAL PARAMETERS OF THE WATER-SATURATED CLAY SOILS ON THE THEORY OF AGING

Розглянуті реологічні зміни перезволожених глинистих ґрунтів при компресійному стисненні та співставленні з класичними теоріями фільтраційної консолідації Терцагі-Герсеванова.

Встановлено, що коефіцієнти відносного стиснення m_{vi} при різних факторах часу t_i суттєво збільшуються. Збільшення коефіцієнта m_{vi} виникає під час завершення консолідаційної фільтрації t_f .

При співставленні зміни порових тисків u_w та осадки в часі t в перезволожених глинистих ґрунтах, на прикладі суглинку видно, що криві, отримані шляхом експерименту відрізняються від класичної теорії Терцагі-Герсеванова в кількісному відношенні.

Ключові слова: *Реологічні параметри, коефіцієнт стиснення, фільтрація, консолідація, стисненність, модулі об'ємної деформації, повзучість, модуль зсуву.*