УДК 681.515+62-551.453

Б.Л. Тишевич, к.т.н., доцент (НТУУ «КПІ»)

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ У ПРОСТОРІ СТАНІВ

B.L. Tyshevych (National Technical University of Ukraine «Kiev Polytechnical Institute»)

IMPROVING THE ACCURACY OF THE SIMULATION OF ELECTROMECHANICAL SYSTEMS IN THE STATE SPACE

Розглядається метод моделювання, у просторі станів, складних електромеханічних систем виского порядку із використанням наближаючих функцій.

***Ключові слова**: моделювання електромеханічних систем; простір станів; наближаючі функції.*

Рассматривается метод моделирования, в пространстве состояний, сложных электромеханических систем при аппроксимации координат системы с помощью приближающих функций.

***Ключевые слова:**. моделирование электромеханических систем; пространство состояний; приближающие функции.*

In this article considered the research method in space of the stations. Propose more fast and accuracy modeling method for complicated electromechanical dynamic systems.

***Key words:** modeling of electromechanical systems; state space; approximating functions.*

Вступ. В останні роки аналіз і синтез систем управління із використанням нечіткої логіки, нейронних мереж неможливий без використання сучасного програмного забезпечення. По-перше, це пов’язано з ростом складності об’єктів управління, які досліджуються, відповідно доцільності застосування нечіткої логіки та нейронних мереж, а по-друге, синтез складних алгоритмів систем управління і подальша реалізація можлива тільки на комп’ютерній техніці.

Математичний опис складних систем високого порядку, у сучасному програмному забезпеченні, виконується за допомогою матричних рівнянь і система розглядається та моделюється у просторі станів – наприклад, у пакеті прикладних програм MATLAB. Точне моделювання об’єктів управління і систем управління, в цілому, потребує методів які забезпечують сталість, точність рішення при високій швидкодії, і не потребують великої продуктивності комп’ютера.

Існуючі методи рішення рівнянь систем можна розділити на 3 групи: обчислювальні методи теорії матриць [1]; методи засновані на представленні лінійних систем у дискретному просторі [2]; методи чисельного інтегрування стосовно різних форм представлення систем [3].

Ціль та завдання. Всі перераховані вище методи мають недоліки пов'язані з точністю результатів чи складністю реалізації. Пропонується метод який заснований на представленні змінних стану системи в лінійному просторі станів наближаючими функціями.

Моделювання фізичної системи в просторі станів можливо, при адекватному описі рівняннями стану:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx + Du, \end{cases} \qquad (1)$$

де **x** - вектор стану; **u** - вектор управління; **y** - вихідний вектор; **A** - системна (параметрична) матриця; **B** - матриця управління (вхідна); **C** - вихідна матриця; **D** - матриця наскрізної передачі управління.

Оскільки, при аналізі складних систем аналітично описати функції які поєднують зміну вхідних, внутрішніх, вихідних координат системи в лінійному просторі при $0<t<\infty$ практично неможливо, то у випадку використання дискретно-аналітичної апроксимації всіх змінних, аналітичного визначення функціональних залежностей між змінними, і алгоритмічного стикування значень змінних на границях часових інтервалів можливо одержати стале комп'ютерне рішення рівнянь системи при високій точності.

Всі змінні стану вектора **x** можна визначити відносно його старшої похідної x_{n+1}, записавши отримані залежності як диференціальні рівняння, які у загальному вигляді представлені виразами:

$$p^{(n+1-k)}x_k=x_{n+1} \qquad (2)$$

Комп'ютерне рішення рівнянь (2), зазвичай, виконується за допомогою класичних чисельних методів. Рівняння високого порядку представляється алгоритмічно як система рівнянь першого порядку, у якій вихідна змінна попереднього рівняння є вхідною змінної наступного:

$$\begin{matrix} px_n=x_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ px_1=x_2 , \end{matrix} \qquad (3)$$

для $x_i(t_0)=x_i(0)$; $i=1,2,...,n$.

Тоді чисельні рішення для рівнянь (3), у залежності від обраного методу:

$$\begin{matrix} x_n(k+1)=f(x_n(0),x_n(k),x_{n+1}(k),\Delta t,...); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_1(k+1)=f(x_1(0), x_1(k), x_2(k), \Delta t,...), \end{matrix} \qquad (4)$$

де $k=0,1,2,...,\infty$; $\Delta t=T$ - шаг інтегрування.

Оскільки функціональні залежності (4), при алгоритмічній реалізації, визначають чисельне значення величин вихідних змінних кожного рівняння, то основний недолік полягає в послідовному збільшенні похибки в рішенні при переході від одного рівняння до іншого. Отже, для підвищення точності, необхідно використовувати методи, що дозволяють визначити всі змінні вектора **x** відносно x_{n+1}, за допомогою безпосередніх функціональних залежностей. Якщо прийняти $x_{n+1}=f(t)$ для $0<t<\infty$, то аналітичне рішення для (2), можна одержати, перейшовши від операторної форми до символічної, з урахуванням початкових умов, використовуючи перетворення, наприклад, Лапласа-Карсона, враховуючи, що $\overset{(m)}{x_k}(0)=p^m x_k(0)=x_{k+m}(0)$, $k=1,2,...,n$; $m=1,2,...,n$:

$$x_k(p)=x_{n+1}(p)p^{-(n+1-k)}+x_k(0)+\sum_{r=k+1}^{n} x_r(0)p^{-(r-k)},\ k=1,2,...,n\ . \qquad (5)$$

Вираз (5) зручно представити модифікованою структурною схемою, як показано на рис.1.

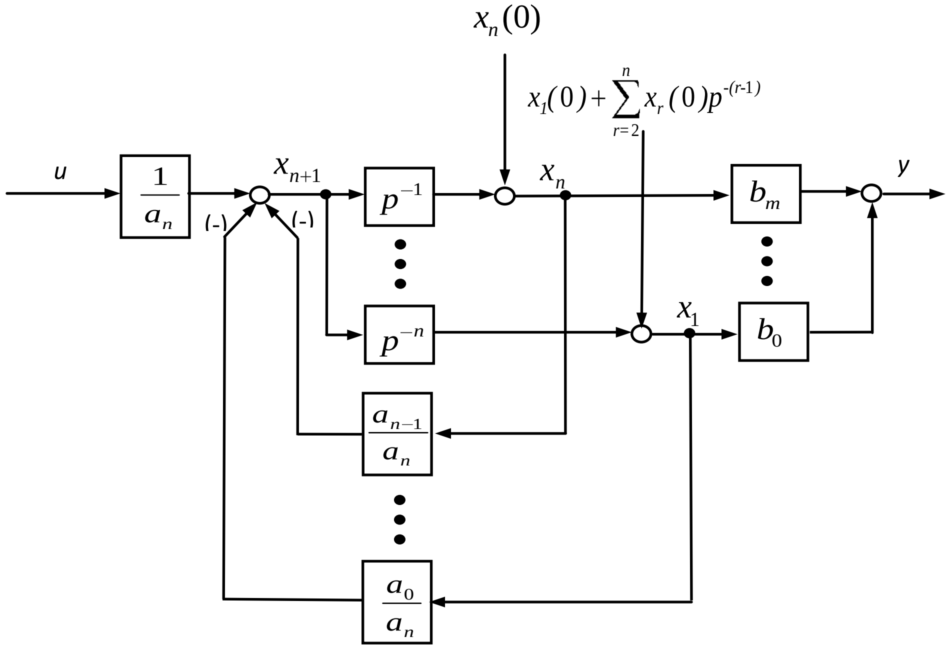


Рис. 1. Модифікована структурна схема представлення рівнянь стану.

При комп'ютерному моделюванні зручно апроксимувати x_{n+1} наближаючою дискретно-аналітичною функцією $x_{n+1}=\psi(t)$, яка визначена на інтервалі $\Delta t=T$, тоді рішення для (5) також будуть визначені на цьому інтервалі. У такому випадку рішення для $x_к=f(mT)$:

$$x_к(mT)=\sum_{m=1}^{\infty} f\ [x_{n+1}(mT),\ x_к[(m-1)T],T],\ m=1,...,\infty. \qquad (6)$$

Результати дослідження. Найбільший інтерес, представляють способи апроксимації функцій, що забезпечують високий ступінь наближення до оригіналу, при мінімальній кількості точок апроксимації. До таких способів апроксимації відносяться лінійна і сплайнова апроксимації.

Лінійна апроксимація полягає в тому, що задані точки з'єднуються прямолінійними відрізками, і функція $x_{n+1}(t)$ наближається ламаною з вузлами в даних точках. Для кожного з інтервалів у якості інтерполяційного багаточлену використовується рівняння прямої що проходить через дві точки. Зокрема, для m-го інтервалу, визначеного для $0\le t\le T$

$$x_{n+1}(t)=kt+x_{n+1}(0), \qquad (7)$$

де $k=(x_{n+1}(T)-x_{n+1}(0))/T$.

Звідки, використовуючи перетворення Лапласа-Карсона можна отримати оригінал для будь-якого інтервалу m при $t=T$

$$x_k(mT)=kT^{(n+2-k)}/(n+2-k)!+x_{n+1}[(m+1)T]T^{(n+1-k)}/(n+1-k)!+ \\ +x_k[(m-1)T]+\sum_{r=1}^{n-k} x_k^{(r)}[(m-1)T]T^r/r!, \tag{8}$$

де $k=(x_{n+1}(mT)-x_{n+1}[(m-1)T])/T$.

Більш складним різновидом апроксимації функцій, для яких не існує аналітичного опису, є сплайн-апроксимація [4]. Для апроксимації функції на інтервалі щонайкраще підходить кубічний сплайн заданий локально:

$$f(t)=f_i(t_{i+1}-t)^2[2(t-t_i)+T]/T^3+f_{i+1}(t-t_i)^2[2(t_{i+1}-t)+T]/T^3+ \\ +\varphi_i(t_{i+1}-t)^2(t-t_i)/T^2+\varphi_{i+1}(t-t_i)(t-t_{i+1})/T^2, \tag{9}$$

де φ_i,φ_{i+1} - перші похідні $f(t)$ у відповідних точках.

Перша похідна φ може бути визначена по формулі чисельного диференціювання, при використанні параболічної апроксимації

$$\varphi_i=(3f_i-4f_{i-1}+f_{i-2})/2T. \tag{10}$$

Оригінали змінних вектора **x** у загальному вигляді визначаються наступним виразом:

$$x_k(mT)=x_{n+1}[(m-1)T][12T^{(n+4-k)}/(n+4-k)-6TT^{(n+3-k)}/(n+3-k)+ \\ +T^3T^{(n+1-k)}/(n+1-k)]/T^3+x_{n+1}(mT)[-12T^{(n+4-k)}/(n+4-k)- \\ -6TT^{(n+3-k)}/(n+3-k)]/T^3+\varphi_{n+1}[(m-1)T][6T^{(n+4-k)}/(n+4-k)- \\ -4TT^{(n+3-k)}/(n+3-k)+T^2T^{(n+2-k)}/(n+2-k)]/T^2+ \\ +\varphi_{n+1}(mT)[6T^{(n+4-k)}/(n+4-k)-2TT^{(n+3-k)}/(n+3-k)]/T^2+ \\ +x_k[(m-1)T]+\sum_{r=1}^{n-k} x_k^{(r)}[(m-1)T]T^r/r!. \tag{11}$$

Вибір кроку інтегрування $T=1/R$ може проводитися виходячи із радіусу R, кола, що охоплює усі власні числа λ_i (i=1,...,n) матриці **A** рівняння (1). Величина T може змінюватися в широких межах, при цьому основною умовою є перебування спектра матриці **A** усередині кола радіуса R, величина якого визначається співвідношенням $R\geq c\|A\|$, де: $\|A\|=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$- норма матриці; a_{ij}-

елементи матриці; c - множник, що округлює значення ||A|| до найближчого цілого кратного 10.

Для оцінки точності та визначення похибки моделювання була розглянута система, яка описувалась матричним рівнянням (1) восьмого порядку. Потрібно знайти комп'ютерні рішення диференційних рівнянь, з яких складається (1):

$$p^k U_{к,вих}(p)=U_{вх}(p),\ k=1,...,8, \tag{12}$$

Для $U_{вх}(t)=t$, при апроксимації $U_{вх}(t)$ для $t_{i-1}\le t\le t_i$, $\Delta t=T=t_i-t_{i-1}$, $i=1,...,\infty$:

1. Ступінчастою функцією: $U_{вх}(t)=U_{вх}(t_i)$;
2. Лінійною функцією: $U_{вх}(t)=kt+U_{вх}(t_{i-1})$, де $k=[U_{вх}(t_i)-U_{вх}(t_{i-1})]/\Delta t$;
3. Параболічною функцією: $U_{вх}(t)=at^2+bt+c$,

де $a=U_{вх}(t_{i-2})/2\Delta t^2-U_{вх}(t_{i-1})/\Delta t^2+U_{вх}(t_i)/2\Delta t^2$; $b=-U_{вх}(t_{i-2})/2\Delta t+2U_{вх}(t_{i-1})/\Delta t-3U_{вх}(t_i)/2\Delta t$; $c=U_{вх}(t_i)$.

4. Сплайн-функцією:

$$U_{вх}(t)=U_{вх}(t_{i-1})(t_{i+1}-t)^2[2(t-t_i)+\Delta t]/\Delta t^3+U_{вх}(t_i)(t-t_i)^2[2(t_{i+1}-t)+$$
$$+\Delta t]/\Delta t^3+\varphi_{i-1}(t_{i+1}-t)^2(t-t_i)/\Delta t^2+\varphi_i(t-t_i)(t-t_{i+1})/\Delta t^2,$$

де $\varphi_i= dU_{вх}(t_i)/dt_i, \varphi_{i-1}=dU_{вх}(t_{i-1})/dt_{i-1}$ - перші похідні $U_{вх}(t)$ у відповідних точках.

Локальна похибка $\Delta U_к$, дорівнює:

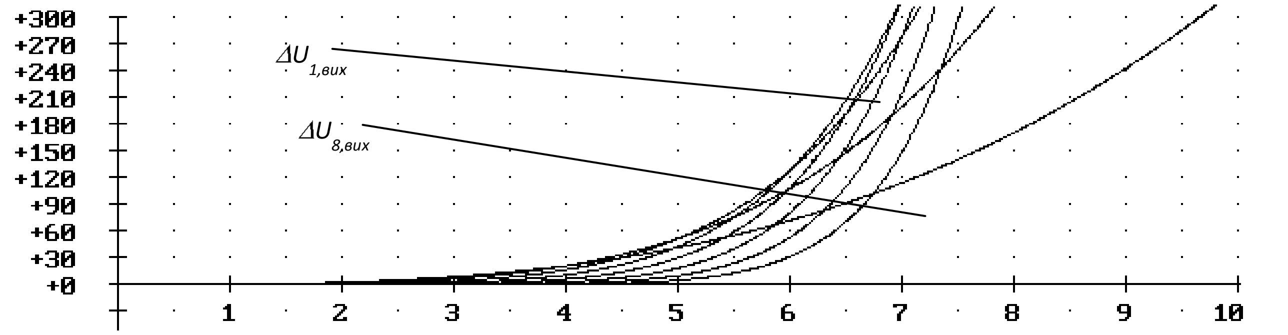
$$\Delta U_к =U_{к,вих}(mT)-U_{к,вих}(t_m),$$

де $U_{к,вих}(t_m)=U_{к,вих}(t)|_{t=mT}$ – аналітичне рішення визначене для m,

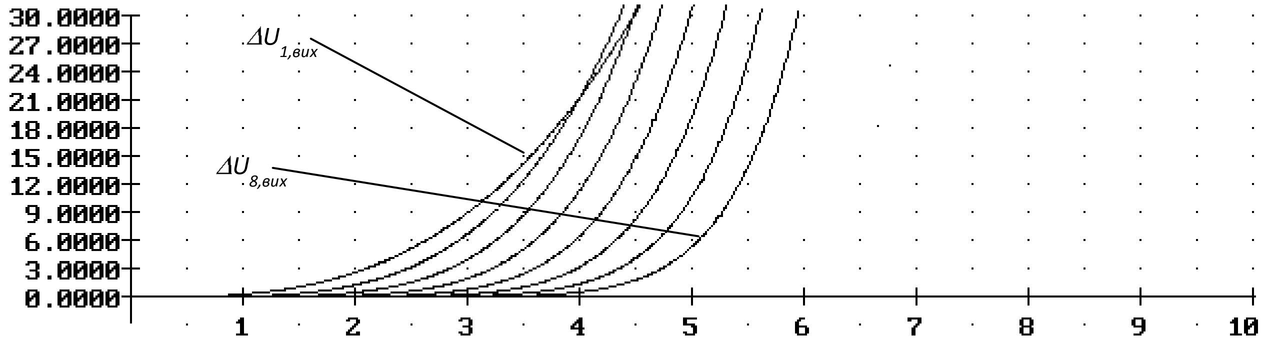
У загальному вигляді $U_{к,вих}(t)$ для $к=1,...,8$, визначається виразом

$$U_{к,вих}(t)=t^k/k!$$

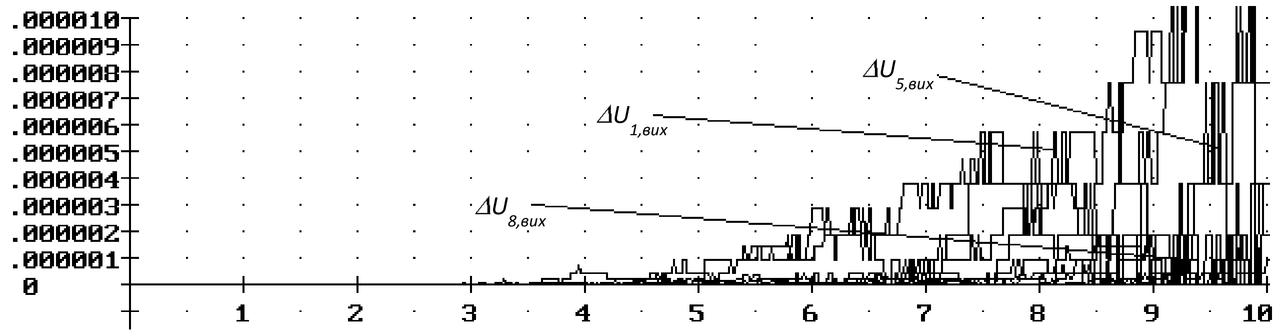
Графік зміни локальної похибки $\Delta U_к$, $к=1,...,8$, для ступінчастої апроксимації показаний на рис. 2,*а*, для лінійної, параболічної ($U_{вх}(t)=t$), сплайнової ($U_{вх}(t)=t^2$) графіки показані відповідно на рис. 2, *б, в, г*. Як видно із отриманих графіків зменшення похибки $\Delta U_{к,вих}$ пропорційне підвищенню порядку апроксимуючої наближаючої функції і при збільшенні порядку інтегрування.



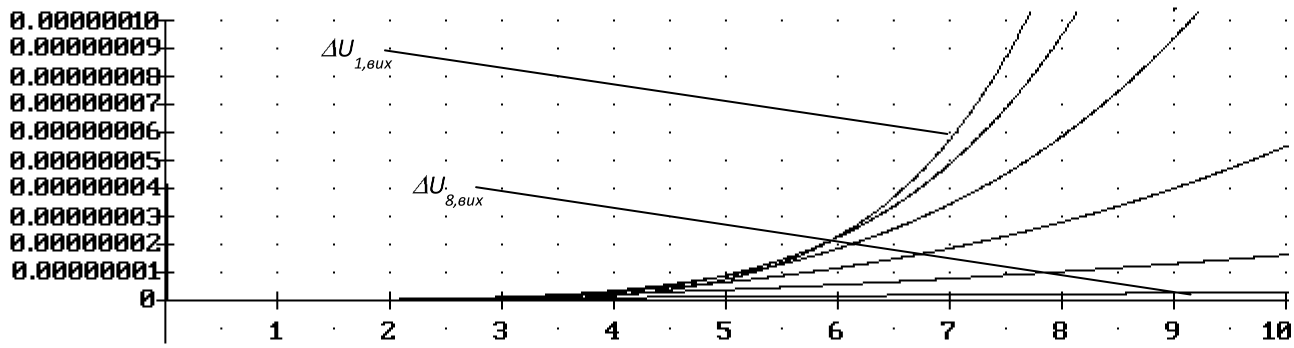
а



б



в



г

Рис. 2. Графіки зміни величини похибки $\Delta U_{1вих}(t),...,\Delta U_{8вих}(t)$ для ступінчастої (*а*), лінійної (*б*), параболічної (*в*), сплайнової (*г*) апроксимації.

Висновки

Як видно із отриманих графиків (рис.2) найбільшу точність забезпечує сплайнова апроксимація. В зв’язку з ускладненням об’єктів управління в електротехнічних, енергетичних системах, точне моделювання складних систем високого порядку набуває особливої актуальності. Застосовувати наближаючі функції можна не тільки при моделюванні, але і при синтезі комп'ютерних систем управління високошвидкими, динамічними системами, оскільки при прийнятній точності вони забезпечують високу швидкодію агоритмів управління.

Список використаних джерел

1. MATLAB. The Language of Technical Computing. Getting Started with MATLAB [Text] / The Math Works, Inc. USA, 2000.

2. Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления [Текст]/ Б. Куо; - М.: Машиностроение, 1986. - 448 с.

3. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / А. Г. Александров, В. М. Артемьев, В. И. Афанасьев и др.; под общ. ред. А. А. Красовского; - М.: Наука, 1987. - 712 с.

4. Dahmen, W. Multi-dimensional spline approximation [Text] / W. Dahmen, R. DeVore, K. Scherer, // SIAM J. Numer. Anal. 17 (1980), pp.380-402.

Стаття надійшла до редакції 25.12.2015 р.