

АВТОМАТИЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 681.5.015

КУБРАК А. І., к.т.н., проф., ЖУЧЕНКО А. І., д.т.н., проф.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТЕПЛОАКУМУЛЮЮЧОЇ СТІНКИ

Подано передатні функції та частотні характеристики циліндричної теплоакумулюючої стінки як об'єкта з розподіленими параметрами залежно від межсівих умов на зовнішній і внутрішній поверхнях. Результати можуть бути використані для синтезу систем керування.

Ключові слова: передатна функція, частотна характеристика, циліндрична теплоакумулююча стінка, межсіві умови.

© Кубрак А. І., Жученко А. І., 2013

Постановка проблеми. Майже всі реальні об'єкти керування в хімічній, харчовій, металургійній, нафтопереробній та інших галузях промисловості, фактично в усій сфері людської діяльності, є об'єктами з розподіленими параметрами. Лише у деяких частинних випадках (хоч і достатньо вживаних) такі об'єкти можна звести до відповідних зосереджених об'єктів з прийнятною похибкою [1]. З ускладненням об'єктів і підвищеннем вимог до точності та адекватності їх моделювання подібні спрощення стають неможливими і вимагають урахування їх якісної специфіки. Усе це вимагає створення якісних математичних моделей для типових об'єктів з розподіленими параметрами.

Аналіз попередніх досліджень. Математичне моделювання об'єктів з розподіленими параметрами успішно розвивається понад півстоліття. Аналітичні методи розрахунку таких моделей можна поділити на точні та приблизні [2]. У першій групі праць [3–6] точний розв'язок наводиться для найпростіших систем, які описуються одним рівнянням у частинних похідних першого чи другого порядку. Розв'язки отримано перетвореннями Фур'є, Лапласа, методом джерел, розщепленням змінних. У другій групі праць [7–10] використано методи, що зводять розв'язок до системи інтегральних рівнянь Вольтера, Фредгольма, використання функцій Рімана. Спроби поширити ці методи на розв'язання практичних задач, зокрема пов'язаних із системами автоматичного керування, є недостатньо вдалими. Відомі праці, наприклад [11], в яких отримані трансцендентні передатні функції об'єктів з розподіленими параметрами. Але ці методи мають надто загальний характер, і їх не завжди можна застосувати в синтезі систем керування реальними об'єктами.

Тому обраний у цій праці шлях дослідження ґрунтуюється на таких міркуваннях: 1) розглядати тільки теплові об'єкти з розподіленими параметрами як найбільш поширені у промисловості; 2) математичну модель об'єктів з розподіленими параметрами отримати у вигляді передатної функції, як найбільш придатної для подальших досліджень із точки зору аналізу й синтезу систем керування за допомогою існуючих програмних засобів (MathCad, MatLab).

Сформульовані обмеження щодо класу досліджуваних об'єктів залишаються все ж таки занадто «слабкими», якщо мати на увазі обсяг наукової статті. Тому, щоб звузити клас досліджуваних об'єктів, а також враховуючи, що багато з них із точки зору математичного моделювання як об'єктів з розподіленими параметрами, можна розглядати як циліндричні теплоакумулюючі стінки, метою цієї праці є розроблення математичної моделі такої стінки у вигляді передатної функції.

Виклад основного матеріалу. Одновимірне диференційне рівняння тепlopровідності в циліндричній системі координат має вигляд [1–5, 11, 13, 14].

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right).$$

Якщо виконати над ним перетворення Лапласа за нульових початкових умов та провести заміну змінної $r = x/\sqrt{p/a}$, то це рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\bar{\theta}}{dx} - \bar{\theta} = 0. \quad (1)$$

Це частинний випадок (коли $m = 0$) модифікованого диференційного рівняння Бесселя [12, 13]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Його розв'язок доцільно подати так:

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x), \quad (2)$$

де I_0 і K_0 – модифіковані функції Бесселя I і II роду нульового порядку. Розкладання у ряд цих функцій за малих значень x :

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots, \quad K_0(x) = -\left(C + \ln \frac{x}{2}\right) I_0(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots;$$

за великих x :

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1^2}{1! \cdot 8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! \cdot (8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! \cdot (8x)^3} + \dots\right), \quad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{1^2}{1! \cdot 8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! \cdot (8x)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! \cdot (8x)^3} + \dots\right),$$

де $C = 0,5772157\dots$ – стала Ейлера.

Нагадаємо поведінку модифікованих функцій Бесселя за граничних значень аргументу:

$$\begin{cases} I_0(x)|_{x \rightarrow 0} = 1 \\ I_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = \infty \\ K_0(x)|_{x \rightarrow 0} = \infty \\ K_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

Похідні від $I_0(x)$ і $K_0(x)$:

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x), \quad \frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x).$$

Розкладення в ряди для малих значень аргументу:

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \dots; \quad K_1(x) = \frac{1}{x} I_0(x) + \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_1(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Асимптотичні ряди (для великих x):

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4 - 1^2}{1! \cdot 8x} + \frac{(4 - 1^2)(4 - 3^2)}{2! \cdot (8x)^2} - \dots\right); \quad K_1(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{4 - 1^2}{1! \cdot 8x} + \frac{(4 - 1^2)(4 - 3^2)}{2! \cdot (8x)^2} + \dots\right).$$

За граничних значень аргументу:

$$\begin{cases} I_1(x)|_{x=0} = 0, \\ I_1(x)|_{x=\infty} = \infty, \\ K_1(x)|_{x=0} = -\infty \\ K_1(x)|_{x=\infty} = 0. \end{cases}$$

Відповідно з (2) розв'язок диференційного рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$\bar{\theta} = C_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}}\right). \quad (3)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 потрібно, зазвичай, задати межові умови. Домовимось по-значати межові умови на внутрішній поверхні циліндра як N_{gv} (яке може набувати значень 1, 2, 3, що відповідають межовим умовам першого, другого і третього роду), на зовнішній поверхні – як N_{gz} (з такими ж мо-

жливими значеннями і відповідним змістом). Циліндр вважатимемо порожнистим (внутрішній радіус r_0 , зовнішній – r_1). Суцільний циліндр будемо вважати частинним випадком, коли $r_0 = 0$. Як межову умову на вісі суцільного циліндра відносно одновимірного диференційного рівняння теплопровідності розглядатимемо $N_{gv} = 2$ за відсутності теплового потоку крізь «внутрішню поверхню», тобто вісь (це буде фактично умова симетрії температурного поля відносно осі). Домовимося позначати цей випадок як $N_{gz} = 0$.

Таким чином, розв'язок поставленої вище задачі залежить від комбінації межових умов на зовнішній та внутрішній поверхнях циліндра. Розглянемо деякі з можливих варіантів.

Варіант 1. $N_{gv} = 0; N_{gz} = 1$.

Межові умови: $\begin{cases} \frac{d\bar{\theta}}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \\ \bar{\theta} \Big|_{r=r_1} = \bar{T}_z \end{cases}$. Після підстановки:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} = 0 \\ C_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=r_1} + C_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=r_1} = \bar{T}_z \end{cases},$$

$$I_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} = 0, \quad K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=0} = -\infty, \text{ тоді } C_2 = 0. \text{ Отже } C_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = \bar{T}_z \text{ і } C_1 = \frac{\bar{\theta}_z}{I_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}.$$

Остаточно $\bar{\theta} = \bar{T}_z \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{I_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$, а передатна функція за каналом $T_z \rightarrow \theta(r)$: $W_{T_z \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{I_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$.

Варіант 2. $N_{gv} = 0; N_{gz} = 2$. Вочевидь $C_2 = 0$, як і в попередньому випадку, тоді як для зовнішньої поверхні $-\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dr} \Big|_{r=r_1} = \bar{Q}_z$, де \bar{Q}_z – зображення за Лапласом густини теплового потоку на зовнішній поверхні

циліндра (за додатний напрям теплового потоку прийнято напрям зростання радіуса).

Тоді $-\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Big|_{r=r_1} = \bar{Q}_z$, звідки $C_1 = -\frac{\bar{Q}_z}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$.

Остаточно $\bar{\theta} = -\bar{Q}_z \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$, а передатна функція за каналом $Q_z \rightarrow \theta(r)$: $W_{Q_z \rightarrow \theta(r)}(p) = -\frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$.

Варіант 3. $N_{gv} = 0, N_{gz} = 3, C_2 = 0$, як і в попередньому випадку.

Межова умова для зовнішньої поверхні: $-\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dr} \Big|_{r=r_1} = \alpha_1 \left(\bar{\theta} \Big|_{r=r_1} - \bar{T}_{sz} \right)$.

Тоді $-\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 I_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = \alpha_1 \left[C_1 I_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \bar{T}_{sz} \right]$, звідки $C_1 = \frac{\bar{T}_{sz}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + I_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$.

Остаточно $\bar{\theta} = \bar{T}_{sz} \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{I_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} I_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$, а передатна функція за каналом $T_{sz} \rightarrow \theta(r)$ (температура теплоносія, що омиває зовнішню поверхню, – температура циліндра в функції радіуса):

$$W_{T_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

Варіант 4. $N_{gv} = 1$, $N_{gz} = 1$. Для внутрішньої поверхні $\theta|_{r=r_0} = T_v(t)$, для зовнішньої – $\theta|_{r=r_1} = T_z(t)$.

$$\begin{cases} C_1 I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2 K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) = \bar{T}_v(p) \\ C_1 I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2 K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) = \bar{T}_z(p) \end{cases},$$

$$\text{звідки } C_1 = \frac{\bar{T}_v(p)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \bar{T}_z(p)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)} \text{ і } C_2 = \frac{\bar{T}_z(p)I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \bar{T}_v(p)I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)},$$

$$\text{де } Z_n(p) = I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Остаточно

$$\bar{\theta} = \bar{T}_v(p) \frac{K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)} + \bar{T}_z(p) \frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)},$$

а передатні функції

$$W_{T_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}, W_{T_z \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}.$$

Застосовуючи наведений вище алгоритм визначення передатних функцій циліндричної теплоакумулюючої стінки, можна отримати розв'язки для решти варіантів стінки кінцевих розмірів. У цій статті розглянемо ще лише динаміку циліндричної порожнистої стінки з нескінченним зовнішнім радіусом. Позначимо цей варіант як $N_{gz} = 8$.

Варіант 5. $N_{gv} = 1$, $N_{gz} = 8$.

Коли $r = \infty$, температура може бути кінцевою, якщо $C_1 = 0$, оскільки $I_0(0) = \infty$. Тоді розв'язок (3):

$$\bar{\theta} = C_2 K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \text{ Оскільки межова умова на внутрішній поверхні – це } \theta|_{r=r_0} = T_v(t), C_2 = \frac{\bar{T}_v(p)}{K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

$$\text{Тоді передатна функція } W_{T_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

$$\text{Варіант 6. } N_{gv} = 2, N_{gz} = 8. \text{ Передатна функція } W_{Q_v \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

Варіант 7. $N_{gv} = 3$, $N_{gz} = 8$. Передатна функція $W_{T_{gv} \rightarrow \theta(r)}(p) = \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{1 + \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{a}}K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

Для розрахунку частотних характеристик на базі передатних функцій циліндричних стінок треба взяти до уваги такі співвідношення:

$$\begin{cases} I_0(x\sqrt{j}) = \text{ber}(x) + j \text{bei}(x) \\ \sqrt{j}I_1(x\sqrt{j}) = \text{ber}'(x) + j \text{bei}'(x) \\ K_0(x\sqrt{j}) = \text{ker}(x) + j \text{kei}(x) \\ \sqrt{j}K_1(x\sqrt{j}) = -[\text{ker}'(x) + j \text{kei}'(x)] \end{cases}. \quad (4)$$

Функції $\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$ (Bessel real, Bessel imagine), $\text{ker}(x)$, $\text{kei}(x)$ (Kelvin real, Kelvin imagine) називають ще функціями Томсона (Кельвіна). Вони табулювані [16–17].

Якщо $x < 1$:

$$\begin{aligned} \text{ber}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \quad \text{bei}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \\ \text{ker}(x) &= \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{ber}(x) + \frac{\pi}{4} \text{bei}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m}; \\ \text{kei}(x) &= \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{bei}(x) + \frac{\pi}{4} \text{ber}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}; \\ \text{ber}'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \quad \text{bei}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \\ \text{ker}'(x) &= -\frac{1}{x} \text{ber}(x) + \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{ber}'(x) - \frac{\pi}{4} \text{bei}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m}; \\ \text{kei}'(x) &= -\frac{1}{x} \text{bei}(x) + \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{bei}'(x) - \frac{\pi}{4} \text{ber}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Якщо $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \text{ber}(x) &\equiv \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[L_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ \text{bei}(x) &\equiv \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[M_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - L_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ \text{ker}(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[L_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ \text{kei}(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[M_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - L_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ \text{ber}'(x) &\equiv \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[S_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - T_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bei}'(x) &\approx \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[T_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + S_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ \text{ker}'(x) &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[S_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + T_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ \text{kei}'(x) &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[T_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - S_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } L_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2}{n!(8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right); M_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2}{n!(8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right);$$

$$S_0(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n!(8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right); T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n!(8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right).$$

Припустимо, що необхідно розрахувати частотні характеристики за передатною функцією з варіанту 4:

$$W(j\omega) = \frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)}{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)}.$$

Якщо ввести позначення $\begin{cases} y_0 = r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ y_1 = r_1\sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ y = r\sqrt{\frac{\omega}{a}} \end{cases}$, то цей вираз, враховуючи (4), можна подати як $W(j\omega) = \frac{W(\omega)}{D(\omega)}$, де

$$\text{де } W(\omega) = [\text{ber}(y_0) + j\text{bei}(y_0)][\text{ker}(y) + j\text{kei}(y)] - [\text{ker}(y_0) + j\text{kei}(y_0)][\text{ber}(y) + j\text{ker}(y)], \\ D(\omega) = [\text{ber}(y_0) + j\text{bei}(y_0)][\text{ker}(y_1) + j\text{kei}(y_1)] - [\text{ber}(y_1) + j\text{bei}(y_1)][\text{ker}(y_0) + j\text{kei}(y_0)].$$

Виконавши множення і згрупувавши дійсні та уявні частини, можна отримати:

$$\begin{cases} W(\omega) = R_1 + jI_1 \\ D(\omega) = R_2 + jI_2 \end{cases},$$

$$\text{де } R_1 = \text{ber}(y_0)\text{ker}(y) - \text{bei}(y_0)\text{kei}(y) - \text{ker}(y_0)\text{ber}(y) + \text{kei}(y_0)\text{ker}(y);$$

$$I_1 = \text{ber}(y_0)\text{kei}(y) - \text{bei}(y_0)\text{ker}(y) - \text{ker}(y_0)\text{ber}(y) - \text{kei}(y_0)\text{ker}(y);$$

$$R_2 = \text{ber}(y_0)\text{ker}(y_1) - \text{bei}(y_0)\text{kei}(y_1) - \text{ber}(y_1)\text{ker}(y_0) + \text{bei}(y_1)\text{kei}(y_0);$$

$$I_2 = \text{ber}(y_0)\text{kei}(y_1) + \text{bei}(y_0)\text{ker}(y_1) - \text{ber}(y_1)\text{kei}(y_0) - \text{bei}(y_1)\text{ker}(y_0)$$

$$\text{Остаточно } W(j\omega) = R + jI, \text{ де } R = \frac{R_1R_2 - I_1I_2}{Z_n}, I = \frac{I_1R_2 - R_1I_2}{Z_n}, Z_n = R_2^2 + I_2^2.$$

Для реалізації цього алгоритму треба мати в розпорядженні підпрограми обчислення функцій $\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$, $\text{ker}(x)$, $\text{kei}(x)$, а в загальному випадку й $\text{ber}'(x)$, $\text{bei}'(x)$, $\text{ker}'(x)$, $\text{kei}'(x)$. За необхідності ці підпрограми користувач може створити самостійно за наведеними вище формулами. Можна також скористатися таблицями відповідних функцій, сформувавши на їх базі інтерполяційні структури (поліноми, кубічні сплайні або В-сплайні). Але найбільш доцільним є чисельне інтегрування диференціальних рівнянь (1) із відповідними межовими умовами за одиничного ступінчастого вхідного сигналу та нульових початкових умовах. У такий спосіб можна було б сформувати масив ординат переходної характеристики. Шляхом чисельного диференціювання цей масив можна було б перерахувати в масив ординат імпульсної характеристики, а останній – у дійсно-та уявночастотні характеристики. Такий алгоритм розглянуто в праці [18].

Висновки. Одержано передатні функції та частотні характеристики об'єктів із розподіленими параметрами, які з точки зору іх математичного моделювання можна розглядати як циліндричні теплоакумулюючі стінки. Передатні функції є трансцендентними і їх безпосереднє використання для розв'язання задач аналізу та синтезу систем керування є нетривіальним. Ця обставина обумовлює шляхи подальших досліджень. Їх може бути декілька. Перший пов'язаний з розробленням методів безпосереднього використання передатних функцій нетривіальної структури для аналізу та синтезу систем керування. Другий передбачає використання відомих методів аналізу та синтезу систем керування. Але отримані у цій роботі передатні функції повинні бути подані у вигляді дробово-раціональних, що обумовлює потребу у розробленні методів апроксимації та аналізу їхньої ефективності.

Список використаної літератури

1. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. – М. : Высш. шк., 2005. – 292 с.
2. Шевяков А. А. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А. А. Шевяков, Р. В. Яковleva. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1965. – 474 с.
4. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.
5. Лыков А. В. Теплообмен / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1978. – 480 с.
6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – М. : Наука, 1977. – 470 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 435 с.
8. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
10. Згуровский М. З. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / М. З. Згуровский, В. С. Мельник, А. Н. Новиков. – К. : Наук. думка, 2004. – 588 с.
11. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.
12. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1977. – 534 с.
13. Янке Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Пеш. – М. : Наука, 1977. – 342 с.
14. Грищенко А. З. Комп'ютерне визначення коефіцієнтів передаточної функції дискретної моделі теплоакумулюючої стінки / А. З. Грищенко, Н. А. Кубрак // Автоматизація виробничих процесів. – 2001. – № 1 (12). – С. 28-35.
15. Кваско М. З. Числові методи комп'ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми / М. З. Кваско, А. І. Кубрак, А. І. Жученко. – К. : Політехніка, 2003. – 360 с.
16. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Наука, 1964. – 772 с.
17. Носова Л. Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных / Л. Н. Носова. – М. : Изд-во АН СССР, 1960. – 422 с.
18. Жученко А. І. Ідентифікація динамічних характеристик. Комп'ютерні методи / А. І. Жученко, М. З. Кваско, Н. А. Кубрак. – К. : Вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. – 182 с.

Надійшла до редакції 08.04.2013.

Kubrak A. I., Zhuchenko A. I.

TRANSFER FUNCTIONS AND FREQUENCY RESPONSES OF CYLINDRICAL HEAT STORAGE WALLS

Transfer functions and frequency responses of cylindrical heat storage walls as plants with distributed parameters depending on boundary conditions on external and internal surfaces are presented. Obtained results can be used for control systems synthesis.

Keywords: transfer function, frequency response, cylindrical heat storage wall, boundary conditions.

References

1. Rapoport Je. Ja. Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravlenija s raspredelennymi parametrami [Analysis and synthesis of the systems of automatic control with the up-diffused parameters] / Je. Ja. Rapoport. – M. : Vyssh. shk., 2005. – 292 s.
2. Shevjakov A. A. Upravlenie teplovymi ob'ektami s raspredelennymi parametrami [Management thermal objects with the up-diffused parameters] / A. A. Shevjakov, R. V. Jakovleva. – M. : Jenergoatomizdat, 1986. – 208 s.
3. Butkovskij A. G. Teoriya optimal'nogo upravlenija sistemami s raspredelennymi parametrami [Theory of optimum management the systems with the up-diffused parameters] / A. G. Butkovskij. – M. : Nauka, 1965. – 474 s.
4. Butkovskij A. G. Metody upravlenija sistem s raspredelennymi parametrami [Methods of management of the systems with the up-diffused parameters] / A. G. Butkovskij. – M. : Nauka, 1975. – 568 s.
5. Lykov A. V. Teploobmen [Heat exchange] / A. V. Lykov. – M. : Jenergija, 1978. – 480 s.
6. Sirazetdinov T. K. Optimizacija sistem s raspredelennymi parametrami [Optimization of the systems with the up-diffused parameters] / T. K. Sirazetdinov. – M. : Nauka, 1977. – 470 s.
7. Vladimirov V. S. Uravnenija matematicheskoy fiziki [Equalizations of mathematical physics] / V. S. Vladimirov. – M. : Nauka, 1976. – 435 s.
8. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli [Problems of hydrodynamics and their mathematical models] / M. A. Lavrent'ev, B. V. Shabat. – M. : Nauka, 1973. – 416 s.
9. Tihonov A. N. Uravnenija matematicheskoy fiziki [Equalizations of mathematical physics] / A. N. Tihonov, A. A. Samarskij. – M. : Nauka, 1972. – 735 s.
10. Zgurovskij M. Z. Prikladnye metody analiza i upravlenija nelinejnymi processami i poljami [Applied methods of analysis and management nonlinear processes and fields] / M. Z. Zgurovskij, V. S. Mel'nik, A. N. Novikov. – K. : Naukova dumka, 2004. – 588 s.
11. Butkovskij A. G. Harakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami [Descriptions of the systems with the up-diffused parameters] / A. G. Butkovskij. – M. : Nauka, 1979. – 224 s.
12. Dvajt G. B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly [Tables of integrals and other mathematical formulas] / G. B. Dvajt. – M. : Nauka, 1977. – 368 s.
13. Janke E. Specjal'nye funktsii: formuly, grafiki, tablitsy [Special functions: formulas, schedules, tables] / E. Janke, F. Jemde, F. Pesh. – M. : Nauka, 1977. – 342 s.
14. Hryshchenko A. Z. Kompiuterne vyznachennia koefitsientiv peredatochnoi funksii dyskretnoi modeli teploakumuliuchoi stinky [Computer determination of coefficients of transmission function of discrete model of heat-retaining wall] / A. Z. Hryshchenko, N. A. Kubrak // Avtomatyzatsiya vyrobnychiv protsesiv. – 2001. – No 1 (12). – S. 28-35.
15. Kvasko M. Z. Chyslovi metody kompiuternoho modeluvannia avtomatychnykh system. Alhorytmy i prohramy [Numerical methods of computer design of the automatic systems. Algorithms and programs] / M. Z. Kvasko, A. I. Kubrak, A. I. Zhuchenko. – K. : Politekhnika, 2003. – 360 s.
16. Ango A. Matematika dlja elektro- i radioinzhenerov [Mathematics for electro - and radio engineers] / A. Ango. – M. : Nauka, 1964. – 772 s.
17. Nosova L. N. Tablitsy funkciy Tomsona i ih pervyh proizvodnyh [Tables of Thomson functions and their first derivatives] / L. N. Nosova. – M. : Izdatel'stvo AN SSSR, 1960. – 422 s.
18. Zhuchenko A. I. Identyfikatsiya dynamichnykh kharakterystyk. Kompiuterni meto-dy [Authentication of dynamic descriptions. Computer methods] / A. I. Zhuchenko, M. Z. Kvasko, N. A. Kubrak. – K. : Vyd. viddil KLTKM ta M, 2000. – 182 s.