

АВТОМАТИЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 678.027.3

Жученко А. І., д.т.н., проф.; Кубрак А. І., к.т.н., проф.; Данькевич А. О., асп.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТЕПЛООВОГО РЕЖИМУ ЕКСТРУДЕРА

Проаналізовано основні елементи екструдера. Наведено систему диференціальних рівнянь у частинних похідних у циліндричній системі координат з урахуванням розподілу температури вздовж екструдера для кожного з елементів, а також за радіусом корпуса та шнека. Модель дозволяє врахувати вплив кожного з нагрівників. Враховано динамічну зміну фазового складу полімеру впродовж екструдювання.

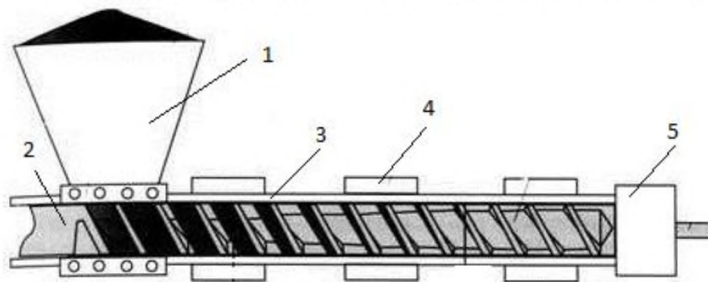
Ключові слова: екструзія, екструдер, тепловий режим.

© Жученко А. І., Кубрак А. І., Данькевич А. О., 2016.

Постановка проблеми та аналіз попередніх досліджень. Якість екструзійної продукції значною мірою залежить від температурного режиму екструдера. Оскільки експериментальні дослідження режимів роботи реальних об'єктів є збитковими, їх замінюють математичним моделюванням.

Питанням створення математичних моделей екструдера присвячено достатньо праць [1–13]. Зокрема, у працях [4–6] теплову модель екструдера подано у вигляді аперіодичної ланки першого порядку із запізненням, у [3, 8, 9] – передатних функцій вище другого порядку, у [7] – аперіодичних ланок першого порядку із запізненням, на які діють зовнішні збурення (нагрівники й вентилятори). Проте остання модель не враховує наявні в об'єкті теплові потоки, спрямовані у зворотному до руху полімеру напрямі, а також зміну енергії дисипації. У праці [2] математична модель має вигляд нелінійних регресивних рівнянь, у [10] – подана в загальному вигляді й не розкриває сутності залежностей, лише ідентифікуючи їх, в [11] – наведена з коефіцієнтами в загальному випадку, що унеможливило врахування внутрішніх і зовнішніх збурень. Усі ці моделі дозволяють визначати температуру лише в ключових точках і не дають змоги дослідити динаміку температурного поля всього екструдера. Математична модель, наведена в працях [12, 13], не враховує внутрішні теплові потоки в кожному окремому нагрівникові та втрати теплоти в навколишнє середовище. Також не враховується розподіл температури вздовж шнека, доцільність врахування якої зумовлена наявністю значної різниці між температурами полімеру та охолодної води.

Метою статті є створення моделі теплових полів одночерв'ячного екструдера.

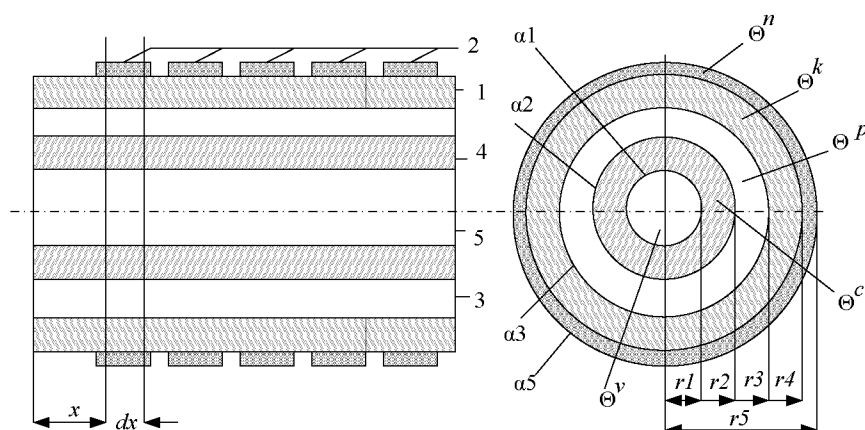


1 – бункер; 2 – черв'як (шнек); 3 – циліндр; 4 – нагрівники;
5 – формувальна головка з адаптером

Рис. 1 – Схема одношнекового екструдера

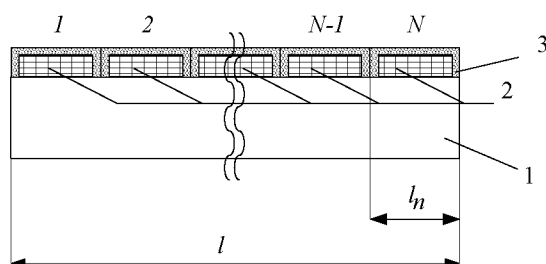
Черв'як має форму вала з гвинтовою нарізкою на ньому, яка має неоднорідну геометрію, що ускладнює розрахунки. Тому форму черв'яка зазвичай спрощують до циліндра, зовнішній радіус якого зводять до еквівалентного. З огляду на це, автори вважатимуть черв'як пустотілим циліндром, що омивається проточною водою зсередини (рис. 2). Дослідження динаміки руху полімеру є окремою задачею, додатковий розгляд якої ускладнить модель. Урахування розподілу частинок під час руху в каналі шнека та їхнього фазового перетворення є задачею невирішеною і не є предметом дослідження. Тому в першому наближенні швидкість і характер руху полімеру розглядатимуться як функції швидкості обертання шнека. Також зроблено припущення, що всі нагрівники розташовані один за одним, без проміжків (рис. 3).

Аналіз конструкції екструдера. Одношнекові (одночерв'ячні) екструдери без зони дегазації широко застосовують для виробництва плівок, листів, труб, профілів, як один з елементів ліній-грануляторів (рис. 1). Залежно від природи полімеру й технологічних режимів його перероблення застосовують шнеки різного профілю з різним кроком і глибиною витків. Залежно від виду виробу застосовують коротко- чи довгошнекові. Основними характеристиками одночерв'ячних екструдерів є діаметр черв'яка D і співвідношення його довжини й діаметра L/D .



1 – корпус циліндра екструдера, 2 – нагрівники, 3 – полімер, 4 – шнек, 5 – охолодна вода; dx – елементарний об'єм; $\theta^h, \theta^k, \theta^p, \theta^c, \theta^v$ – температури нагрівника, корпуса, полімеру, черв'яка, охолодної води; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ – коефіцієнти тепловіддачі від черв'яка до води, від полімеру до черв'яка, від корпуса до полімеру, від нагрівника до повітря; r_1 і r_2 – внутрішній та еквівалентний зовнішній радіуси черв'яка; r_3 і r_4 – внутрішній і зовнішній радіуси корпуса; r_5 – зовнішній радіус нагрівника

Рис. 2 – Розрахункова частина екструдера



1 – корпус циліндра екструдера, 2 – нагрівники, 3 – теплоізоляція; l – довжина розрахункової частини екструдера, N – кількість нагрівників, $l_n = l/N$ – розрахункова довжина нагрівника

Рис. 3 – Розташування нагрівників на корпусі екструдера

Математичне моделювання. Аналогову теплову математичну модель робочої частини екструдера можна подати як сукупність п'яти взаємопов'язаних моделей теплових ємностей – нагрівника, корпуса, полімеру, черв'яка та охолодної води. При цьому варто врахувати функціональні залежності, наявні для багатьох характеристик процесу. Зокрема, залежності густини розплавленого полімеру від температури $\mu = A \exp(E/RT)$, де A – константа; E – енергія активації рідкого руху; T – абсолютна температура; R – універсальна газова стала [1]. Для невеликих градієнтів швидкостей $\mu = \mu_{\text{вх}} \exp[-b(T - T_{\text{вх}})]$, де $\mu_{\text{вх}}$ – ефективна густина розплавленого полімеру на вході; b – температурний коефіцієнт; T – температура полімеру; $T_{\text{вх}}$ – температура полімеру на вході.

Виходячи з молекулярної теорії, $\mu = 1,09 \cdot 10^3 \frac{M^{0,5} T^{1,5}}{g^{0,67} \Delta E_{\text{вип}}} \exp \frac{\Delta E_{\text{вип}}}{nRT}$, де M – молекулярна маса середовища; g – молекулярний об'єм; $\Delta E_{\text{вип}}$ – енергія випаровування; n – стала для певної форми молекули (для кулі $n = 3$; для молекул видовженої форми $n = 4$) [15].

У свою чергу, густина бінарної суміші $\rho = \frac{\rho_n \rho_{\text{п}}}{x_n \rho_n + (1 - x_n) \rho_{\text{п}}}$, де ρ_n і $\rho_{\text{п}}$ – густини наповнювача й полімерної матриці; x_n і $x_{\text{п}}$ – масові частки наповнювача й полімерної матриці [16].

Коефіцієнт тепловіддачі від корпуса до полімеру $\alpha = 1,16 Q_n / (F \Delta t)$, де Q_n – тепловий потік від нагрівників; F – площа поверхні тепловіддачі; Δt – середня різниця температур між корпусом і полімером [18].

Для поліетилену П2020-Т $\alpha = 375q^{0,12}d_{\text{екв}}^{-0,7}v^{0,18}$, для полістиролу УП-1Э $\alpha = 350q^{0,12}d_{\text{екв}}^{-0,6}v^{0,19}$, де q – щільність теплового потоку; $d_{\text{екв}}$ – еквівалентний діаметр каналу; v – швидкість руху полімеру [17].

Під час моделювання теплового режиму нагрівника припустили, що: усі нагрівники мають однакову довжину й конструкцію та рівномірно розподілені за довжиною корпусу; тепловиділення за довжиною нагрівника є рівномірним; тепловий потік та/чи потужність у різних нагрівниках може бути різною; відстанню між сусідніми нагрівниками можна знехтувати; теплопередача між нагрівниками відсутня; температура навколишнього повітря є сталою; теплові потоки від вентиляторів подають як від'ємні теплові потоки від нагрівників.

Для елементарного об'єму нагрівника i завдовжки dx на відстані x від початку координат:

$$\frac{Q^n(x,t)}{l_n} dx - \lambda_k \frac{\partial \theta^k(r,x,t)}{\partial r} \Big|_{r=r_4} - 2\pi r_4 dx - \alpha_5 (\theta^n(x,t) - \theta^{os}) 2\pi r_5 dx - \lambda_n \frac{\partial \theta^n(x,t)}{\partial x} F_{k_5} - \left[-\lambda_n \frac{\partial \theta^n(x,t)}{\partial x} F_{k_5} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda_n \frac{\partial \theta^n(x,t)}{\partial x} F_{k_5} \right) dx \right] = \frac{M_n}{l_n} dx C_n \frac{\partial \theta^n(x,t)}{\partial t},$$

$$\text{де } F_{k_5} = \pi(d_5^2 - d_4^2)/4 = \pi(r_5^2 - r_4^2), \quad Q^n(x,t) = \begin{cases} Q_1^n(t), & 0 \leq x \leq l_n, \\ Q_2^n(t), & l_n + dx \leq x \leq 2l_n, \\ \dots \\ Q_N^n(t), & (N-1)l_n + dx \leq x \leq Nl_n. \end{cases},$$

$Q^n(x,t)$ – щільність теплового потоку в зоні нагрівника в момент часу t на відстані x уздовж руху полімеру; $i = 1 \dots N$ – номер нагрівника; λ_k і λ_n – коефіцієнти теплопровідності корпусу й нагрівника; r – поточний радіус; θ^{os} – температура навколишнього середовища; F_{k_5} – площа кільця, обмеженого колами з радіусами r_5 і r_4 ; M_n – маса нагрівника; C_n – питома масова теплоємність матеріалу нагрівника.

Після перетворень: $\partial \theta^n(x,t)/\partial t = b_1 Q^n(x,t) - b_2 \partial \theta^k(r,x,t)/\partial r \Big|_{r=r_4} - b_3 (\theta^n(x,t) - \theta^{os}) + b_4 \partial^2 \theta^n(x,t)/\partial x^2$,

$$\text{де } b_1 = \frac{1}{M_n C_n}, \quad b_2 = \frac{2\pi r_4 l_n \lambda_k}{M_n C_n}, \quad b_3 = \frac{2\pi r_5 l_n \alpha_5}{M_n C_n}, \quad b_4 = \frac{\lambda_n \pi (r_5^2 - r_4^2) l_n}{M_n C_n}.$$

Межові умови на торцях нагрівників є умовами ідеального теплоізолювання $-\lambda \partial \theta(x,t)/\partial x = 0$:

$$\frac{\partial \theta^n(x,t)}{\partial x} \Big|_{x_p} = 0; \quad \frac{\partial \theta^n(x,t)}{\partial x} \Big|_{x_k} = 0,$$

де x_p і x_k – координати початку й закінчення нагрівника i .

Розподіл температури в корпусі описує рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат:

$$\frac{\partial^2 \theta^k(r,x,t)}{\partial t} = a_k \left(\frac{\partial^2 \theta^k(r,x,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^k(r,x,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta^k(r,x,t)}{\partial x^2} \right),$$

де a_k – коефіцієнт температуропровідності матеріалу корпусу.

Нехай температура зовнішнього шару корпусу дорівнює температурі нагрівника (умова ідеального теплового контакту) $\theta^k(r,x,t) = \theta^n(x,t)$. На внутрішній поверхні має місце межова умова третього роду:

$$-\lambda_k \frac{\partial \theta^k(r,x,t)}{\partial r} \Big|_{r=r_3} = \alpha_3 \left(\theta^p(x,t) - \theta^k(r,x,t) \Big|_{r=r_3} \right).$$

На торцях циліндра – межова умова другого роду $-\lambda \partial \theta^k(r,x,t)/\partial x = q(t)$.

Тепловий потік за довжиною екструдера є значно меншим порівняно з радіальним, тому вважаємо, що $-\lambda_k \frac{\partial \theta^k(r,x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$; $-\lambda_k \frac{\partial \theta^k(r,x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$.

Полімер у екструдері послідовно змінює агрегатний стан. Тому екструдер поділяють на зони нагрівання (полімер у твердій фазі), плавлення (полімер є сумішшю твердої й рідкої фаз) і гомогенізації (полімер у рідкій фазі). Проте за нестационарного режиму чи наявності збурень межі такого поділу «плавають». Стан полімеру визначається тепловими потоками від нагрівників, енергією дисипації, тепловими втратами та іншими збуреннями. При цьому енергія дисипації

$$Q^d = \tau'_{xx} \frac{\partial W_x}{\partial x} + \tau'_{yy} \frac{\partial W_y}{\partial y} + \tau'_{zz} \frac{\partial W_z}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial W_x}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial W_y}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial y} \right),$$

де τ – вектори напружень, а W – тензори швидкостей деформації, що залежать від температури полімеру, фазового складу, густини, типу матеріалу тощо. Оскільки врахування усіх зазначених змінних є окремою задачею, нехай енергія дисипації дорівнюватиме загальній енергії дисипації, віднесеної до довжини екструдера й помноженій на довжину елементарної ділянки.

У зоні нагрівання теплота акумулюється у формі приросту температури твердого полімеру:

$$V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) - \left(V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) + \partial \left(V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) \right) / \partial x dx \right) + Q^d(x,t)dx/l + \\ + \alpha_3 \left(\theta^k(r,x,t) \Big|_{r=r_3} - \theta^p(x,t) \right) 2\pi r_3 dx - \alpha_2 \left(\theta^p(x,t) - \theta^c(r,x,t) \Big|_{r=r_2} \right) 2\pi r_2 dx = \partial \left(F_{k_3} dx \rho_p C_p \theta^p(x,t) \right) / \partial t,$$

де $F_{k_3} = \pi(d_3^2 - d_2^2)/4 = \pi(r_3^2 - r_2^2)$; $V^p(t)$ – лінійна швидкість руху полімеру вздовж осі циліндра; F_{k_3} – площа перерізу полімеру, перпендикулярного до осі x ; ρ_p – густина полімеру; C_p – питома теплоємність полімеру; Q^d – загальна енергія дисипації. Це рівняння, розв'язане в працях [12, 13], можна подати так:

$$V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) - \left(V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) + \partial \left(V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) \right) / \partial x dx \right) + Q^d(x,t)dx/l + \\ + \lambda_k \partial \theta^k(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_3} 2\pi r_3 dx - \lambda_c \partial \theta^c(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_2} 2\pi r_2 dx = \partial \left(F_{k_3} dx \rho_p C_p \theta^p(x,t) \right) / \partial t,$$

де λ_c – коефіцієнт теплопровідності шнека.

Ці рівняння є еквівалентними, оскільки між корпусом і полімером та полімером і шнеком наявний конвективний теплообмін $-\lambda \partial \theta(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_{kp}} = \alpha \left(\theta^p(x,t) - \theta(r,x,t) \Big|_{r=r_{kp}} \right)$, тому будемо користуватися другим із

них у вигляді $\partial \theta^p(x,t) / \partial t = -V^p(t) \partial \theta^p(x,t) / \partial x + b_5 Q^d(x,t) + b_6 \partial \theta^k(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_3} - b_7 \partial \theta^c(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_2}$,

$$\text{де } b_5 = \frac{1}{F_{k_3}\rho_p C_p l}, \quad b_6 = \frac{2\lambda_k \pi r_3}{F_{k_3}\rho_p C_p}, \quad b_7 = \frac{2\lambda_c \pi r_2}{F_{k_3}\rho_p C_p}.$$

У зоні плавлення теплота акумулюється у формі фазових переходів, температура полімеру є сталою ($\partial \theta / \partial x = 0$) і дорівнює температурі плавлення. Тоді сумарний тепловий ефект з акумульованим полімером теплоуезгодженням Q^{new} :

$$Q^d(x,t)dx/l + \lambda_k \partial \theta^k(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_3} 2\pi r_3 dx - \lambda_c \partial \theta^c(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_2} 2\pi r_2 dx = Q^{new}(x,t).$$

Якщо $Q^{new}(x,t)$ поділити на питому теплоту плавлення полімеру, одержимо масу R^p полімеру, розплавленого протягом одиниці часу. Протягом ∂t розплавиться $m_r(x,t) = Q^{new}(x,t) \partial t / R^p$ або

$$m_r(x,t) = b_8 Q^d(x,t) + b_9 \partial \theta^k(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_3} - b_{10} \partial \theta^c(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_2},$$

де $b_8 = dx dt / (l R^p)$, $b_9 = 2\lambda_k \pi r_3 dx dt / R^p$, $b_{10} = 2\lambda_c \pi r_2 dx dt / R^p$.

Коефіцієнт вмісту розплаву в полімері $F^p(x,t + dt) = F^p(x,t) + m^r(x,t) / \left[\pi(r_3^2 - r_2^2) \rho_p dx \right]$

У фазі нагрівання розплаву теплота акумулюється у формі приросту температури рідкого полімеру:

$$V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) - \left(V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) + \partial \left(V^p(t)F_{k_3}\rho_p C_p \theta^p(x,t) \right) / \partial x dx \right) + \\ + \lambda_k \partial \theta^k(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_3} 2\pi r_3 dx - \lambda_c \partial \theta^c(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_2} 2\pi r_2 dx = \partial \left(F_{k_3} dx \rho_p C_p \theta^p(x,t) \right) / \partial t.$$

Після перетворень: $\partial \theta^p(x,t) / \partial t = -V^p(t) \partial \theta^p(x,t) / \partial x + b_{11} \partial \theta^k(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_3} - b_{12} \partial \theta^c(r,x,t) / \partial r \Big|_{r=r_2}$,

$$\text{де } b_{11} = \frac{2\lambda_k \pi r_3}{F_{k_3}\rho_p C_p}, \quad b_{12} = \frac{2\lambda_c \pi r_2}{F_{k_3}\rho_p C_p}.$$

Межевою умовою є умова першого роду $\theta^p(0,t) = \theta_{vh}^p(t)$.

Розподіл температури в шнеку описує рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат

$$\frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial t} = a_c \left[\frac{\partial^2 \theta^c(r, x, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta^c(r, x, t)}{\partial x^2} \right],$$

де a_c – коефіцієнт теплопроводності матеріалу шнека.

На внутрішній і зовнішніх стінках черв'яка:

$$-\lambda_c \frac{\partial \theta^c}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \alpha_1 \left(\theta^V - \theta^C \Big|_{r=r_1} \right); \quad -\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = \alpha_2 \left[\theta^C(r, x, t) \Big|_{r=r_2} - \theta^P(x, t) \right].$$

На торцях черв'яка $-\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial x} = q(t)$.

Тепловий потік за довжиною шнека є значно менший, аніж у радіальному напрямі, тому нехтуємо їм:

$$-\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

Для елементарного об'єму охолодної води завдовжки dx на відстані x від початку координат:

$$V^V(t) \rho_V F_{k1} C_V \theta^V(x, t) - \left(V^V(t) \rho_V F_{k1} C_V \theta^V(x, t) + \partial V^V(t) \rho_V F_{k1} C_V \theta^V(x, t) / \partial x dx \right) + \\ + \alpha_1 2\pi r_1 dx \left(\theta^C(r, x, t) \Big|_{r=r_1} - \theta^V(x, t) \right) = \partial \left(F_{k1} dx \rho_V C_V \theta^V(x, t) \right) / \partial t,$$

де $F_{k1} = \pi d_1^2 / 4 = \pi r_1^2$; $V^V(t)$ – лінійна швидкість руху охолодної води в момент часу t ; ρ_V – густина води; F_{k1} – площа перерізу каналу охолодної води, перпендикулярна до осі x ; C_V – питома теплоємність води.

Після перетворень: $\partial \theta^V(x, t) / \partial t = V^V(t) \partial \theta^V(x, t) / \partial x + b_{13} \left(\theta^C(r, x, t) \Big|_{r=0} - \theta^V(x, t) \right)$, де $b_{13} = \frac{2\pi \alpha_1 r_1}{F_{k1} \rho_V C_V}$.

Межевою умовою є умова першого роду $\theta^V(0, t) = \theta_{vh}^V(t)$, де θ_{vh}^V – температура охолодної води на вході.

Отже, математичний опис теплового режиму екструдера є таким:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta^n(x, t)}{\partial t} &= b_1 Q^n(x, t) - b_2 \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_4} - b_3 (\theta^n(x, t) - \theta^{os}) + b_4 \frac{\partial^2 \theta^n(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial t} &= a_k \left[\frac{\partial^2 \theta^k(r, x, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta^k(r, x, t)}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial \theta^p(x, t)}{\partial t} &= -V^P(t) \frac{\partial \theta^p(x, t)}{\partial x} + b_5 Q^d(x, t) + b_6 \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_3} - b_7 \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} \\ m_r(x, t) &= b_8 Q^d(x, t) + b_9 \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_3} - b_{10} \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} \\ \frac{\partial \theta^p(x, t)}{\partial t} &= -V^P(t) \frac{\partial \theta^p(x, t)}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_3} - b_{12} \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} \\ \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial t} &= a_c \left[\frac{\partial^2 \theta^c(r, x, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta^c(r, x, t)}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial \theta^V(x, t)}{\partial t} &= V^V(t) \frac{\partial \theta^V(x, t)}{\partial x} + b_{13} \left(\theta^C(r, x, t) \Big|_{r=0} - \theta^V(x, t) \right) \end{aligned} \right\}$$

із обмеженнями $\frac{\partial \theta^n(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_p} = 0$; $\frac{\partial \theta^n(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_k} = 0$; $\theta^k(r, x, t) = \theta^n(x, t)$; $-\lambda_k \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$;

$$-\lambda_k \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad -\lambda_k \frac{\partial \theta^k(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_3} = \alpha_3 \left(\theta^P(x, t) - \theta^k(r, x, t) \Big|_{r=r_3} \right); \quad -\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$-\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad -\lambda_c \frac{\partial \theta^c}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \alpha_1 \left(\theta^V - \theta^C \Big|_{r=r_1} \right);$$

$$-\lambda_c \frac{\partial \theta^c(r, x, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = \alpha_2 \left[\theta^C(r, x, t) \Big|_{r=r_2} - \theta^P(x, t) \right]; \quad \theta^P(0, t) = \theta_{vh}^P(t); \quad \theta^V(0, t) = \theta_{vh}^V(t).$$

Висновки. Проаналізовано конструктивні елементи екструдера. Наведено систему диференціальних рівнянь у частинних похідних у циліндричній системі координат з урахуванням розподілу температури вздовж екструдера для кожного з елементів, а також за радіусом корпусу та шнека. Опис дозволяє врахувати вплив кожного з нагрівників. Враховано динамічну зміну фазового складу полімеру впродовж екструдювання.

У подальшому планується розробити дискретну математичну модель для її програмної реалізації.

Список використаної літератури

1. Швецов Г. А. Технология переработки пластических масс / Г. А. Швецов, Д. У. Алимова, М. Д. Барышников. – М. : Химия, 1988. – 521 с.
2. Extruder Melt Temperature Control With Fuzzy Logic / Chamil Abeykoon, Adrian L. Kelly, Peter J. Martin, Kang Li // Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy), 2013. – P. 2250-2555.
3. Tsai C.-C. Fuzzy supervisory predictive PID control of a plastics extruder barrel / Ching-Chih Tsai, Chi-Huang Lu // J. of the Chinese Inst. of Eng. – 1998. – Vol. 21. – № 5. – P. 619-624.
4. Baskaran C. Modelling and Simulation of Hybrid Neuro Fuzzy Controller for Temperature Response Regulation of Plastic Extrusion Plant / C. Baskaran, M. Dharmendirakumar, A. Kayathri // Europ. J. of Sci. Res. – 2012. – Vol. 79. – No. 1. – P. 89-98.
5. Ravi S. Design of Intelligent Self-Tuning GA ANFIS Temperature Controller for Plastic Extrusion System / S. Ravi, M. Sudha, P. A. Balakrishnan // Modelling and Simulation in Engineering. – Hindawi Publ. Corp., 2011.
6. аль Рахим Т. М. А. Автоматизация многозонных экструдеров на основе адаптивных и нечетких позиционных систем управления : дис. ... канд. техн. наук / Аль Таамнех Мохаммед Абдель Рахим. – М., 2003. – 153 с.
7. Elkouss P. F. Physics based model in g and control of reactive extrusion : abstract of PhD diss. / Paul F. Elkouss. – University of Maryland, College Park, College Park, USA.
8. Haley T. A. On-line system identification and control design of an extrusion cooking process. Part I. System identification // T. A. Haley, S. J. Mulvaney // Food control. – 2000. – 11. – P. 103-120.
9. Завальнюк И. П. Управление высокопроизводительной экструзией неоднородных материалов / И. П. Завальнюк // Совр. техн. средства, комплексы и системы. – 2010. – № 1 (25). – С. 141– 147.
10. Wang Y.-T. Modeling and Control for a Thermal Barrel in Plastic Molding Processes / Yin-Tien Wang, Sung-Lin Wu // Tamkang J. of Sci. and Eng. – 2006. – Vol. 9. – No 2. – P. 129-140.
11. Кубрак А. І. Математична модель керування тепловим режимом процесу екструзії полімерних матеріалів / А. І. Кубрак, О. А. Жученко // Вісн. Нац. техн. ун-ту України «Київ. політехн. ін.-т», сер. «Хім. інженерія, екологія та ресурсозбереження». – 2010. – № 2. – С. 107-114.
12. Жученко О. А. Автоматизація процесів керування екструзією полімерних матеріалів в умовах змінних режимів функціонування : дис. ... канд. техн. наук / О. А. Жученко. – К., 2013. – 211 с.
13. Самойлов А. В. Расчет режимов экструзии и мощности нагревателей червячных прессов / А. В. Самойлов // Хим. машиностр. : респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1966. – Вып. 3. – С. 99-104.
14. Пищенко И. А. К вопросу определения коэффициента вязкости для неньютоновских жидкостей / И. А. Пищенко, О. М. Яхно // Хим. машиностр. : респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1966. – Вып. 4. – С. 118-129.
15. Лукашова В. В. Экструзия пенополимерів / В. В. Лукашова, І. О. Мікульонок, Л. Б. Радченко. – К. : НТУУ «КПІ», 2011. – 176 с.
16. Лукач Ю. Е. Исследование теплоотдачи при вязкотекучем движении полимеров в прямолинейных каналах щелевидного сечения / Ю. Е. Лукач, В. Т. Миргородский // Хим. машиностр. : респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1966. – Вып. 4. – С. 77-80.
17. Лукач Ю. Е. К вопросу об интенсивности теплообмена в загрузочной зоне червячных машин / Ю. Е. Лукач, В. Т. Миргородский // Хим. машиностр. : респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1966. – Вып. 3. – С. 21-23.
18. Радченко Л. Б. Основи моделювання і конструювання черв'ячних екструдерів / Л. Б. Радченко, В. І. Сівецький. – К. : Політехніка, 2002. – 152 с.

Надійшла до редакції 19.09.2015

Zhuchenko A. I., Kubrak A. I., Dankevych A. O.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF EXTRUDER THERMAL MODE

A big quantity of polymers is made by single-screw extrusion method. The maintenance of the given temperature provides a production of goods with the desired quality. In is necessary to study the influence of different parameters of the object on the temperature evolution in order to create a modern and high-performance control system. However an investigation in the real life is very unprofitable. That's why it is necessary to create mathematical models of this process.

A literary analysis has shown that extruder is mostly presented as a transfer function or in state-space representation. However these models can't take into account the magnitude of thermal currents directed oppositely to the polymer's movement. The same usage is widely popular and may be used, but this representation can't correspond in full measure to all features of thermal extrusion process.

In this article were analyzed the main structural elements of extruder. A special formula was designed for each of them describing the dynamics of its thermal processes. For extruder there was elaborated the system of differential equations in partial derivative in the cylindrical coordinates system. This system takes in consideration the temperature distribution along the extruder for each of the elements as well as the temperature distribution along the body and the screw. The model allows to include an individual influence of each of the warmers on the temperature field. Also it was taken in account the dynamical change of the phase constitution of the polymer along the material's movement, which not depends on the length of the designated zones. The work was also supplemented with functional relations with temperature in order to specify the density and the heat-transfer coefficient.

In the future investigation it is supposed to work on the discrete mathematical model and its software implementation, based on the given model. The further investigation should also be dedicated to the improvement of the models in order to include the mass transfer and to calculate the hydrodynamic flows with geometric singularities of the given object. It is also important to investigate the equations that describe an allotment of the polymer beads under the external and internal influence.

Keywords: extrusion, mathematical model, distributed parameters, cylindrical coordinates.

References

1. Shvetsov, H.A., Alyмова, D.U. and Baryshnykova, M.D. (1988), *Tekhnolohiya pererabotky plastycheskykh mass* [Plastics processing technology], Khymia, Moscow, USSR.
2. Abeykoon, C., Kelly, A.L., Martin, P.J. and Li, K. (2013), "Extruder Melt Temperature Control With Fuzzy Logic", *Preprints of the 18th IFAC World Congress*, pp. 2250 – 2555.
3. Tsai, C.-C. and Lu, C.-H. (1998), "Fuzzy supervisory predictive PID control of a plastics extruder barrel", *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, vol. 21, no. 5, pp. 619-624.
4. Baskaran, C., Dharmendrakumar, M. and Kayathri A. (2012), "Modelling and Simulation of Hybrid Neuro Fuzzy Controller for Temperature Response Regulation of Plastic Extrusion Plant", *European Journal of Scientific Research*, vol. 79, no. 1, pp. 89-98.
5. Ravi, S., Sudha, M. and Balakrishnan, P.A. (2011). "Design of Intelligent Self-Tuning GA ANFIS Temperature Controller for Plastic Extrusion System", *Modelling and Simulation in Engineering*, Hindawi Publ. Corp.
6. Al Rakhym, T.M.A. (2003), "Automate multi-zone extruders based on adaptive and fuzzy propositional control systems", Abstract of Ph.D. diss., D.Mendeleev University of Chemical Technology, Moscow, Russia.
7. Paul F. (2003), "Elkouss Physics based model in and control of reactive extrusion", Abstract of Ph.D. dissertation, University of Maryland, College Park, College Park, USA.
8. Haley, T.A. and Mulvaney, S.J. (2000), "On-line system identification and control design of an extrusion cooking process: Part I. System identification.", *Foodcontrol*, vol. 11, pp. 103-120.
9. Zavalniuk, Y.P. (2010) "Control of high-performance extrusion heterogeneous materials", *Sovremennye tekhnicheskyye sredstva, komplekxy i systemy*, vol. 1, no. 25, pp. 141-147.
10. Yin-Tien Wang and Sung-Lin Wu (2006), "Modeling and Control for a Thermal Barrel in Plastic Molding Processes", *Tamkang Journal of Science and Engineering*, vol. 9, no. 2, pp. 129-140.
11. Kubrak A.I. and Zhuchenko O.A. (2010) "Mathematical model of thermal mode control of extrusion process of polymeric materials", *Khimichna inzheneriia, ekolohiia ta resursozberezhennia*, vol. 2, pp. 107-114.
12. Zhuchenko, O.A. (2013), "Automation of control processes by extrusion of polymeric materials in changing modes of operation", Abstract of PhD dissertation, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine.
13. Samoilov, A.V. (1966), "Calculation of extrusion conditions and power worm presses heaters", *Khym. mashynostroenye*, vol. 3, pp. 99-104.
14. Pyschenko, Y.A. and Yakhno O.M. (1966), "On the question of determining the viscosity of non-Newtonian fluids", *Khym. mashynostroenye*, vol. 4, pp. 118-129.
15. Lukashova V.V., Mikulonok, I.O. and Radchenko L.B. (2011), *Ekstruziia pinopolimeriv* [Extrusion of Foaming], Politehnika, Kyiv, Ukraine.
16. Lukach, Ju.E., Mirgorodskii, V.T. (1966), "Study of heat transfer when moving viscous polymers in straight channel slot-like cross-section", *Khym. mashynostroenye*, vol. 4, p. 77-80.
17. Lukach, Ju.E., Mirgorodskii, V.T. (1966), "The problem of the heat transfer rate in the feed zone worm machines", *Khym. mashynostroenye*, vol. 3, p. 21-23.
18. Radchenko, L.B. and Sivetskii, V.I. (2002), *Osnovy modelyuvannya i konstruyuvannya cherv'yachnih ekstruderiv* [Fundamentals of modeling and designing screw extruder], Politehnika, Kyiv, Ukraine.