

ВПЛИВ ГІРОСКОПІЧНИХ ЕФЕКТІВ НА КОЛИВАННЯ ВАЛУ ЦЕНТРИФУГИ

Babenko A., Lavrenko Ia., Kurenkov N.
The National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (babenko.ae@gmail.com,
lavrenko.iaroslav@gmail.com, kurenkov.nikolay@vandex.ua)

INFLUENCE OF GYROSCOPIC EFFECT ON FLUCTUATIONS OF THE CENTRIFUGE SHAFT

Розглянуті коливання лабораторної центрифуги. Досліджені коливання з врахуванням шести степенів вільності.

При малих кутах нутації визначаються кутові швидкості прямих та обернених прецесій, траєкторії руху симетричного гіроскопа. Експериментально визначені жорсткості пружних опор центрифуги. Знайдені залежності власних частот від частоти і напрямку обертання центрифуги. Показана кореляція результатів числового і експериментального дослідження власних частот. Прийнята в статті модель гіроскопа розрахована на її використання при вирішенні ряду прикладних задач.

Ключові слова: Коливання, власні частоти, гіроскопічні ефекти, центрифуга, діаграма Кемпбелла.

Вступ. Центрифуги, ротор яких розміщений на гнучкому валу і має велику швидкість обертання, відносяться до класу машин, при проектуванні і розрахунку яких необхідно враховувати гіроскопічні ефекти.

Центрифуга складається з корпусу, який закріплений на пружних опорах. Вал центрифуги закріплений у на підшипниках, пружні деформації яких необхідно також враховувати.

Центрифуги зазвичай мають змінний комплект роторів з різними масами та моментами інерції, діапазон їх робочих швидкостей досить широкий (до 75000 об/хв), тому вказані фактори впливають на коливання. Загальна теорія коливань вертикальних роторів розглянута в роботах [1, 2].

Ротор центрифуги являє собою циліндр, який обертається навколо вертикальної осі. Вал центрифуги приводиться в рух електродвигуном, ротор якого знаходиться на валу (див. рис.), а статор та корпус закріплені на пружних опорах. Опори сконструйовані таким чином, щоб дозволити центрифугі повертатись відносно платформи.

Актуальність. Від параметрів руху центрифуги залежить якість виконання необхідних робіт. Перехідні процеси можуть погіршувати вихідну продукцію. Ті ж самі процеси суттєво впливають на виникнення вібрацій, які викликають руйнування, тому вивчення динамічних характеристик центрифуги є актуальною задачею при проектуванні.

Метою роботи є вибір розрахункової моделі конструкції центрифуги Pico 21, вивчення впливу гіроскопічних ефектів на власні частоти коливань та експериментальна перевірка запропонованої моделі і методики аналізу динамічних характеристик центрифуги.

Збільшення кутової швидкості може помітно впливати на рух і деформації осі ротора гіроскопа. Динаміка центрифуги має багато спільного з динамікою гіроскопічних систем. Одна з перших робіт, присвячена динаміці гіроскопа з пружною віссю, належить Магнусу [3, 4]. Пізніше коливання вільного гіроскопа з пружним валом досліджувались Маундером та Уипелом [5, 6]. Стійкість руху гіроскопа з врахуванням пружних властивостей осі ротора розглядали В.В. Крементуло [7].

Найпростішими задачами про коливання валу з диском, площина якого здатна відхилятися від початкового положення, є задачі про двоопорний вал з розташованим на ньому диском. Рух механічної системи, у якій ротор розташований посередині підшипникових вузлів, розглянуто досить широко [8, 9]. Особливістю коливань таких валів є те, що прогин перетину валу, де прикріплений диск, супроводжується поворотом перетину, тому відхилення центру валу супроводжується поворотом площини диску і, відповідно, одночасно має місце прецесія центру валу та кутова прецесія диску. Кутова прецесія диску викликає додаткові сили в наслідок гіроскопічних ефектів [10, 11].

Одним з можливих підходів до вивчення питань динаміки твердого тіла та теорії гіроскопів є використання методу кінетостатики. В цьому випадку, до сил, що діють на тіло, додаються сили інерції його частинок і задача динаміки перетворюється у задачу статичної, яка вирішується методами статичної динаміки твердого

тіла. В особливості такий підхід можливий тоді, коли рух тіла задано, а визначаються ті чи інші прикладені до нього сили. При вивченні гіроскопічних ефектів використання методу кінестатики часто дає досить просте рішення задачі. При вирішенні задачі динаміки твердого тіла методом кінестатики є доцільним звести усі сили інерції частин тіла до головної сили та головного моменту. Головний момент сил інерції твердого тіла відіграє основну роль в теорії гіроскопічних явищ і називається гіроскопічним моментом.

Центрифугу з ротором, який обертається можна розглядати як систему з багатьма степенями свободи. При складанні диференціальних рівнянь руху таких систем можна використати теорему про зміну моментів

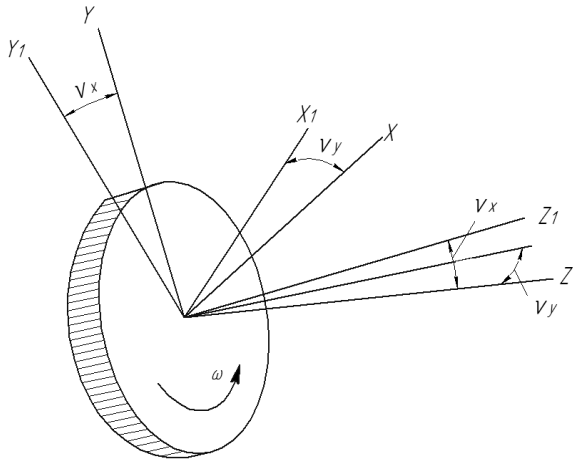


Рис. 1. Обертання диска насадженого на невагомий вал

кількості руху. Якщо швидкість обертання вала та моменти інерції насаджених на нього дисків відносно невеликі, частоту власних коливань вала можна визначити за тими ж формулами, що і частоту коливань балки з зосередженими масами. В протилежному випадку вагомий вплив на характер коливань вносять кутові переміщення.

Розглянемо кутові деформації на прикладі одного диска, насадженого на невагомий вал, що обертається з кутовою швидкістю ω .

Математична модель. В результаті пружних деформацій вала вісь обертання диска z_1 складає з нерухомих координатними площинами zy та zx малі кути ϑ_x та ϑ_y (рис.1). Моменти інерції диска відносно пов'язаних з ним осей x_1, y_1, z_1 позначимо: $I_{z_1} = I_0$; $I_{x_1} = I_{y_1} = I_1$.

Лабораторну центрифугу (рис.2) типу Рісо 21 можна звести до еквівалентної системи з трьох тіл (статора, анкера та ротора), одне з яких не обертається, тому виведемо систему рівнянь для лабораторної центрифуги Рісо 21, яка має сумарно 14 степенів вільності для всіх її елементів.

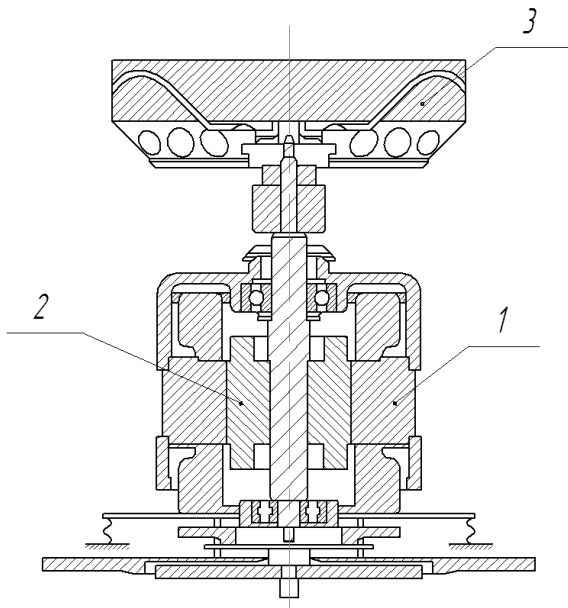


Рис. 2. Ескіз центрифуги Рісо 21

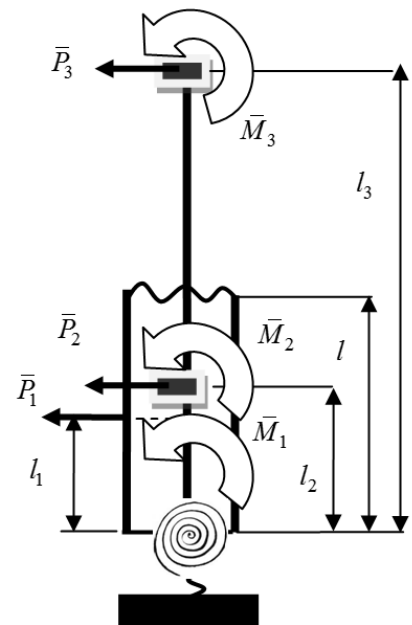


Рис. 3. Розрахункова схема центрифуги

Центрифуга представляє собою ротор 3, що обертається навколо вертикальної осі, який приводиться до обертання електродвигуном, анкер якого 2, сидить на тій самій осі, а статор та корпус 1 закріплені на пружних опорах.

Для визначення власних частот розроблена розрахункова схема, яка наведена на рис.3, яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується. На наведеній схемі $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ - сили та моменти інерції статора, анкера та ротора відповідно.

Із показаних в одній площині трьох мас обертаються лише дві (анкер і ротор), тому для подальших розрахунків кутова швидкість статора дорівнює нулю.

Для чисельного розрахунку використовувались наступні параметри центрифуги:

$$m_R = 0,507 \text{ кг}, \quad m_A = 0,6 \text{ кг}, \quad m_S = 2,4 \text{ кг}, \quad l = 86 \text{ мм}, \quad l_1 = 45 \text{ мм}, \quad l_2 = 32 \text{ мм}, \quad l_3 = 120 \text{ мм}, \quad I_R = 882 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \\ I_{R0} = 1529 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \quad I_A = 93 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \quad I_{A0} = 425 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \quad I_S = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \quad I_{S0} = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2$$

Власні частоти цієї системи, без врахування дисипативних сил, будемо шукати за методом Д'аламбера [12], записавши переміщення та кут повороту кожного тіла як лінійну функцію від прикладених на систему сил та моментів. Вплив цих сил/моментів виражається за допомогою коефіцієнтів жорсткості δ_{ij} .

$$W = -P_1 \cdot \delta_{11} - P_2 \cdot \delta_{12} - P_3 \cdot \delta_{13} - M_1 \cdot \delta_{14} - M_2 \cdot \delta_{15} - M_3 \cdot \delta_{16} \quad (1)$$

Великий вплив на динаміку роторної системи має жорсткість. Для обрахунку власних частот центрифуги необхідно враховувати пружні опори, характеристики яких визначались експериментально.

Позначимо δ_{ij} - переміщення/поворот диску під дією одиничної сили/моменту. Розрахунок коефіцієнтів проводився аналітично та наведений нижче.

Одиничні переміщення будуть являти собою суму 2-х переміщень: переміщення тіла, як абсолютно твердого за рахунок пружних опор (w_0 , θ_0 - переміщення та кут повороту у защемленні) та деформації валу центрифуги ($w|_x$). Кути повороту, аналогічно переміщенням, вираховуються з тих самих міркувань.

За методом початкових параметрів [13] визначаються переміщення:

Для статора:

$$\delta_{11} = w_0(\bar{P}_1) + \theta_0(\bar{P}_1)l_1 = 1/C_Q + l_1^2/C_M, \quad \delta_{12} = w_0(\bar{P}_1) + \theta_0(\bar{P}_1)l_2 = 1/C_Q + l_1 \cdot l_2/C_M,$$

$$\delta_{13} = w_0(\bar{P}_1) + \theta_0(\bar{P}_1)l_3 = 1/C_Q + l_1 \cdot l_3/C_M, \quad \delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{44} = \delta_{45} = \delta_{46} = 1/C_M.$$

де C_M і C_Q - жорсткості опор для кута повороту у прогину відповідно.

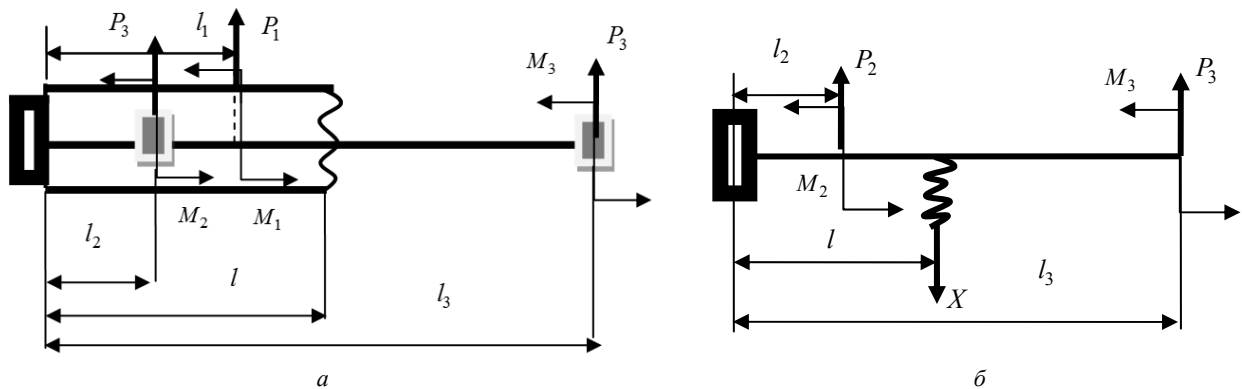


Рис. 4. Розрахункова схема: а- зовнішня, б- валу

Для визначення переміщень/повороту анкера і ротора необхідно знайти реакцію у підшипнику. Для цього ми розв'язуємо статично невизначену систему (див. схему рис.5 та рис.6) :



Рис. 5. Розрахункова схема від одиничної сили для анкера Рис. 6. Розрахункова схема від одиничної сили для ротора

Запишемо переміщення валу у підшипнику від зовнішніх одиничних сил :

$$w(\bar{P}_2)_{x=l} = 1/EI \left[l_2 \cdot l^2/2 - l^3/6 + (l-l_2)^3/6 \right] = 1/EI \left[(3l_2l^2 - l^3 + (l-l_2)^3)/6 \right] = \\ = 1/6EI (3l_2l^2 - l^3 + l^3 - 3l^2l_2 + 3ll_2^2 - l_2^3) = 1/6EI (3ll_2^2 - l_2^3),$$

З іншого боку теж саме переміщення від реакції :

$$w\left(X_{\bar{P}_2}\right)_{x=l} = X/C_{\Pi} + Xl^3/3EI = X\left(1/C_{\Pi} + l^3/3EI\right), \quad X\left(1/C_{\Pi} + l^3/3EI\right) = 1/6EI\left(3l_2^2 - l_2^3\right),$$

$$X\left(\bar{P}_2\right) = \left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right),$$

Після знайденого значення реакції підшипника знаходимо початкові зусилля у защемленому кінці :

$$M_0 = l_2 - l \cdot \left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right), \quad Q_0 = -1 + \left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right), \quad w|_{x=l_2} = 1/EI\left[M_0l_2^2/2 + Q_0l_2^3/6\right],$$

Записуємо переміщення анкера від прогину вала:

$$w|_{x=l_2} = 1/EI\left\{l_2^2/2\left[l_2 - l\left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right)\right] + l_2^3/6\left[-1 + \left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right)\right]\right\},$$

Остаточне переміщення анкера :

$$\delta_{22} = w_0\left(\bar{P}_2\right) + \theta_0\left(\bar{P}_2\right)l_2 + w|_{x=l_2},$$

$$\delta_{22} = 1/C_Q + l_2^2/C_M + 1/EI\left\{l_2^2/2\left[l_2 - l\left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right)\right] + l_2^3/6\left[-1 + \left(3l - l_2\right)l_2^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right)\right]\right\},$$

де C_{Π} – жорсткість підшипника

Аналогічні розрахунки проводяться і від дії одиничного моменту. Далі розраховуємо по аналогії усі інші коефіцієнти:

$$X\left(\bar{P}_3\right) = \left(3l_3 - l\right)l^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right),$$

$$\delta_{23} = 1/C_Q + l_3l_2/C_M + 1/EI \cdot l_2^2/6\left\{\left(3l_3 - l_2\right) - \left(3l - l_2\right)\left(3l_3 - l\right)l^2 / \left(6EI/C_{\Pi} + 2l^3\right)\right\},$$

$$\delta_{24} = l_2/C_M, \quad \delta_{34} = l_3/C_M,$$

$$X\left(M_2\right) = \left(2l - l_2\right)l_2 / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3\right), \quad \delta_{25} = l_2/C_M + 1/EI \cdot l_2^2/6\left\{3 - \left(3l - l_2\right)\left(2l_2 - l_2^2\right) / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right)\right\},$$

$$X\left(M_3\right) = l^2 / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right), \quad \delta_{26} = l_2/C_M + 1/EI \cdot l_2^2/6\left\{3 - \left(3l - l_2\right)l^2 / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right)\right\},$$

$$\delta_{33} = 1/C_Q + l_3^2/C_M + 1/3EI_2\left(l_3 - S\right)^3 + 1/3EI_2\left(\left(l_3 - l\right)^3 - \left(l_3 - S\right)^3\right) + 1/EI\left(\left(l_3^3 - \left(l_3 - l\right)^3\right) / 3 - X\left(\bar{P}_3\right) \cdot l^2\left(3l_3 - l\right) / 6\right),$$

де S – відстань до зміни жорсткості валу, так як вал має ділянки переходу з різними діаметрами, а X – реакція у підшипнику за рахунок одиничної сили P_3

$$\delta_{35} = l_3/C_M + 1/EI \cdot l_2/6\left\{3\left(2l_3 - l_2\right) - \left(3l_3 - l\right)l^2 \cdot \left(2l - l_2\right) / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right)\right\},$$

$$\delta_{36} = l_3/C_M + 1/2EI_2\left(l_3 - S\right)^2 + 1/2EI_2\left(2l_3 - S\right)S - S/EI \cdot l^2 / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right)\left(S^3/3 + l_3l - S\left(l_3 - l\right) / 2\right),$$

$$\delta_{55} = 1/C_M + 1/EI \cdot l_2/2\left\{2 - \left(2l - l_2\right)^2 l_2 / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right)\right\},$$

$$\delta_{56} = 1/C_M + 1/EI \cdot l_2/2\left\{2 - \left(2l - l_2\right)l^2 / \left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right)\right\},$$

$$\delta_{66} = 1/C_M + 1/EI_2\left(l_3 - S\right) + 1/EI S - l^4 / 2EI\left(2EI/C_{\Pi} + 2l^3/3\right),$$

В результаті отримано всі необхідні коефіцієнти.

Записуємо вирази для сил і моментів кожного тіла, що знаходиться на валу. Сили, що діють на елементи системи [10, 12, 14]:

$$P_{SX} = m_S \cdot d^2x_1/dt^2; \quad P_{AX} = m_A \cdot d^2x_2/dt^2; \quad P_{RX} = m_R \cdot d^2x_3/dt^2; \quad (2)$$

$$P_{SY} = m_S \cdot d^2y_1/dt^2; \quad P_{AY} = m_A \cdot d^2y_2/dt^2; \quad P_{RY} = m_R \cdot d^2y_3/dt^2. \quad (3)$$

Для визначення моментів [10], що впливають на маси з боку вала, використовуємо формулу, згідно якої похідна за часом від моменту кількості руху дорівнює моменту зовнішніх сил. Кутова швидкість обертання анкера і ротора відносно осі z_1 дорівнює ω , відповідно моменти кількості руху відносно цієї осі $L_{AZ1} = I_{A0} \cdot \omega$, $L_{RZ1} = I_{R0} \cdot \omega$, $L_{SZ1} = 0$.

Кутова швидкість обертання відносно пов'язаної з масами осі x_i дорівнює $d\vartheta_{x_i}/dt$, а моменти кількості руху відповідно:

$$L_{AX1} = I_A \cdot d\vartheta_{x2}/dt, \quad L_{RX1} = I_R \cdot d\vartheta_{x3}/dt, \quad L_{SX1} = I_S \cdot d\vartheta_{x1}/dt.$$

Кутова швидкість обертання відносно осі y_i дорівнює $d\vartheta_{y_i}/dt$ та відповідно :

$$L_{AY1} = I_A \cdot d\vartheta_{y2}/dt, \quad L_{RY1} = I_R \cdot d\vartheta_{y3}/dt, \quad L_{SY1} = I_S \cdot d\vartheta_{y1}/dt.$$

Моменти кількості руху відносно нерухомих осей x, y знайдемо, спроектувавши на ці осі моменти $L_{X_1}, L_{Y_1}, L_{Z_1}$:

$$L_{AX} = L_{AX_1} + L_{AZ_1} \cdot \vartheta_{y_2} = I_A \cdot d\vartheta_{x_2}/dt + I_{A0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{y_2}, \quad L_{AY} = L_{AY_1} - L_{AZ_1} \cdot \vartheta_{x_2} = I_A \cdot d\vartheta_{y_2}/dt - I_{A0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{x_2};$$

$$L_{RX} = L_{RX_1} + L_{RZ_1} \cdot \vartheta_{y_3} = I_R \cdot d\vartheta_{x_3}/dt + I_{R0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{y_3}, \quad L_{RY} = L_{RY_1} - L_{RZ_1} \cdot \vartheta_{x_3} = I_R \cdot d\vartheta_{y_3}/dt - I_{R0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{x_3};$$

$$L_{SX} = L_{SX_1} + L_{SZ_1} \cdot \vartheta_{y_1} = I_S \cdot d\vartheta_{x_1}/dt, \quad L_{SY} = L_{SY_1} - L_{SZ_1} \cdot \vartheta_{x_1} = I_S \cdot d\vartheta_{y_1}/dt.$$

Моменти сил, що прикладені до мас відносно осей x та y знайдемо за формулами:

$$M_{AX} = d/dt L_{AX} = I_A d^2\vartheta_{x_2}/dt^2 + I_{A0}\omega d\vartheta_{y_2}/dt; \quad M_{AY} = d/dt L_{AY} = I_A d^2\vartheta_{y_2}/dt^2 - I_{A0}\omega d\vartheta_{x_2}/dt; \quad (4)$$

$$M_{RX} = d/dt L_{RX} = I_R d^2\vartheta_{x_3}/dt^2 + I_{R0}\omega d\vartheta_{y_3}/dt; \quad M_{RY} = d/dt L_{RY} = I_R d^2\vartheta_{y_3}/dt^2 - I_{R0}\omega d\vartheta_{x_3}/dt; \quad (5)$$

$$M_{SX} = d/dt L_{SX} = I_S d^2\vartheta_{x_1}/dt^2; \quad M_{SY} = d/dt L_{SY} = I_S d^2\vartheta_{y_1}/dt^2. \quad (6)$$

Використовуючи позначення, визначаємо переміщення диску x, y, ϑ_X та ϑ_Y за формулою (1) через діючі сили (2), (3) і моменти (4), (5), (6):

$$x_1 = -m_S \cdot d^2x_1/dt^2 \cdot \delta_{11} - m_A \cdot d^2x_2/dt^2 \cdot \delta_{12} - m_R \cdot d^2x_3/dt^2 \cdot \delta_{13} - I_S \cdot d^2\vartheta_{Y_1}/dt^2 \cdot \delta_{14} -$$

$$- (I_A \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_2}/dt) \cdot \delta_{15} - (I_R \cdot d^2\vartheta_{Y_3}/dt^2 - I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_3}/dt) \cdot \delta_{16};$$

$$y_1 = -m_S \cdot d^2y_1/dt^2 \cdot \delta_{11} - m_A \cdot d^2y_2/dt^2 \cdot \delta_{12} - m_R \cdot d^2y_3/dt^2 \cdot \delta_{13} + I_S \cdot d^2\vartheta_{X_1}/dt^2 \cdot \delta_{14} +$$

$$+ (I_A \cdot d^2\vartheta_{X_2}/dt^2 + I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_2}/dt) \cdot \delta_{15} + (I_R \cdot d^2\vartheta_{X_3}/dt^2 + I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_3}/dt) \cdot \delta_{16};$$

$$x_2 = -m_S \cdot d^2x_1/dt^2 \cdot \delta_{12} - m_A \cdot d^2x_2/dt^2 \cdot \delta_{22} - m_R \cdot d^2x_3/dt^2 \cdot \delta_{23} - I_S \cdot d^2\vartheta_{Y_1}/dt^2 \cdot \delta_{24} -$$

$$- (I_A \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_2}/dt) \cdot \delta_{25} - (I_R \cdot d^2\vartheta_{Y_3}/dt^2 - I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_3}/dt) \cdot \delta_{26};$$

$$y_2 = -m_S \cdot d^2y_1/dt^2 \cdot \delta_{12} - m_A \cdot d^2y_2/dt^2 \cdot \delta_{22} - m_R \cdot d^2y_3/dt^2 \cdot \delta_{23} + I_S \cdot d^2\vartheta_{X_1}/dt^2 \cdot \delta_{24} +$$

$$+ (I_A \cdot d^2\vartheta_{X_2}/dt^2 + I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_2}/dt) \cdot \delta_{25} + (I_R \cdot d^2\vartheta_{X_3}/dt^2 + I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_3}/dt) \cdot \delta_{26};$$

$$x_3 = -m_S \cdot d^2x_1/dt^2 \cdot \delta_{13} - m_A \cdot d^2x_2/dt^2 \cdot \delta_{23} - m_R \cdot d^2x_3/dt^2 \cdot \delta_{33} - I_S \cdot d^2\vartheta_{Y_1}/dt^2 \cdot \delta_{34} -$$

$$- (I_A \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_2}/dt) \cdot \delta_{35} - (I_R \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_3}/dt) \cdot \delta_{36};$$

$$y_3 = -m_S \cdot d^2y_1/dt^2 \cdot \delta_{13} - m_A \cdot d^2y_2/dt^2 \cdot \delta_{23} - m_R \cdot d^2y_3/dt^2 \cdot \delta_{33} + I_S \cdot d^2\vartheta_{X_1}/dt^2 \cdot \delta_{34} +$$

$$+ (I_A \cdot d^2\vartheta_{X_2}/dt^2 + I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_2}/dt) \cdot \delta_{35} + (I_R \cdot d^2\vartheta_{X_3}/dt^2 + I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_3}/dt) \cdot \delta_{36};$$

$$\vartheta_{Y_1} = -m_S \cdot d^2x_1/dt^2 \cdot \delta_{14} - m_A \cdot d^2x_2/dt^2 \cdot \delta_{24} - m_R \cdot d^2x_3/dt^2 \cdot \delta_{34} - I_S \cdot d^2\vartheta_{Y_1}/dt^2 \cdot \delta_{44} -$$

$$- (I_A \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_2}/dt) \cdot \delta_{45} - (I_R \cdot d^2\vartheta_{Y_3}/dt^2 - I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_3}/dt) \cdot \delta_{46};$$

$$-\vartheta_{X_1} = -m_S \cdot d^2y_1/dt^2 \cdot \delta_{14} - m_A \cdot d^2y_2/dt^2 \cdot \delta_{24} - m_R \cdot d^2y_3/dt^2 \cdot \delta_{34} + I_S \cdot d^2\vartheta_{X_1}/dt^2 \cdot \delta_{44} +$$

$$+ (I_A \cdot d^2\vartheta_{X_2}/dt^2 + I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_2}/dt) \cdot \delta_{45} + (I_R \cdot d^2\vartheta_{X_3}/dt^2 + I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_3}/dt) \cdot \delta_{46};$$

$$\vartheta_{Y_2} = -m_S \cdot d^2x_1/dt^2 \cdot \delta_{15} - m_A \cdot d^2x_2/dt^2 \cdot \delta_{25} - m_R \cdot d^2x_3/dt^2 \cdot \delta_{35} - I_S \cdot d^2\vartheta_{Y_1}/dt^2 \cdot \delta_{45} -$$

$$- (I_A \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_2}/dt) \cdot \delta_{55} - (I_R \cdot d^2\vartheta_{Y_3}/dt^2 - I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_3}/dt) \cdot \delta_{56};$$

$$-\vartheta_{X_2} = -m_S \cdot d^2y_1/dt^2 \cdot \delta_{15} - m_A \cdot d^2y_2/dt^2 \cdot \delta_{25} - m_R \cdot d^2y_3/dt^2 \cdot \delta_{35} + I_S \cdot d^2\vartheta_{X_1}/dt^2 \cdot \delta_{45} +$$

$$+ (I_A \cdot d^2\vartheta_{X_2}/dt^2 + I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_2}/dt) \cdot \delta_{55} + (I_R \cdot d^2\vartheta_{X_3}/dt^2 + I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_3}/dt) \cdot \delta_{56};$$

$$\vartheta_{Y_3} = -m_S \cdot d^2x_1/dt^2 \cdot \delta_{16} - m_A \cdot d^2x_2/dt^2 \cdot \delta_{26} - m_R \cdot d^2x_3/dt^2 \cdot \delta_{36} - I_S \cdot d^2\vartheta_{Y_1}/dt^2 \cdot \delta_{46} -$$

$$- (I_A \cdot d^2\vartheta_{Y_2}/dt^2 - I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_2}/dt) \cdot \delta_{56} - (I_R \cdot d^2\vartheta_{Y_3}/dt^2 - I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{X_3}/dt) \cdot \delta_{66};$$

$$-\vartheta_{X_3} = -m_S \cdot d^2y_1/dt^2 \cdot \delta_{16} - m_A \cdot d^2y_2/dt^2 \cdot \delta_{26} - m_R \cdot d^2y_3/dt^2 \cdot \delta_{36} + I_S \cdot d^2\vartheta_{X_1}/dt^2 \cdot \delta_{46} +$$

$$+ (I_A \cdot d^2\vartheta_{X_2}/dt^2 + I_{A0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_2}/dt) \cdot \delta_{56} + (I_R \cdot d^2\vartheta_{X_3}/dt^2 + I_{R0} \cdot \omega \cdot d\vartheta_{Y_3}/dt) \cdot \delta_{66};$$

Для прямого обертання система має розв'язок у вигляді:

$$x_1 = A_1 \cos pt; \quad y_1 = A_1 \sin pt; \quad \vartheta_{Y_1} = \vartheta_1 \cos pt; \quad \vartheta_{X_1} = -\vartheta_1 \sin pt;$$

$$x_2 = A_2 \cos pt; \quad y_2 = A_2 \sin pt; \quad \vartheta_{Y_2} = \vartheta_2 \cos pt; \quad \vartheta_{X_2} = -\vartheta_2 \sin pt;$$

$$x_3 = A_3 \cos pt; y_3 = A_3 \sin pt; \vartheta_{Y_3} = \vartheta_3 \cos pt; \vartheta_{X_3} = -\vartheta_3 \sin pt.$$

Для оберненого обертання у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos pt; y_1 = -A_1 \sin pt; \vartheta_{Y_1} = \vartheta_1 \cos pt; \vartheta_{X_1} = \vartheta_1 \sin pt; \\ x_2 &= A_2 \cos pt; y_2 = -A_2 \sin pt; \vartheta_{Y_2} = \vartheta_2 \cos pt; \vartheta_{X_2} = \vartheta_2 \sin pt; \\ x_3 &= A_3 \cos pt; y_3 = -A_3 \sin pt; \vartheta_{Y_3} = \vartheta_3 \cos pt; \vartheta_{X_3} = \vartheta_3 \sin pt. \end{aligned}$$

Обидва розв'язки відповідають обертальному руху зігнутої осі вала з кутовою швидкістю p , причому в першому випадку зігнута вісь обертається в тому ж напрямку, що і сам вал (пряме обертання зігнутої осі), а в другому випадку – в бік, протилежну обертання валу (протилежне обертання зігнутої осі).

Величини A та ϑ представляють собою прогин та кут нахилу дотичної до зігнутої осі валу в точці закріплення диску.

Підставляючи у вище наведену систему рівнянь значення x, y, ϑ_X та ϑ_Y з формул для прямого та оберненого обертання, маємо:

$$\begin{aligned} A_1(-1 + p^2 m_S \delta_{11}) + A_2(p^2 m_A \delta_{12}) + A_3(p^2 m_R \delta_{13}) + \vartheta_1(p^2 I_S) \delta_{14} + \vartheta_2(p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{15} + \vartheta_3(p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{16} &= 0; \\ A_1(p^2 m_S \delta_{12}) + A_2(-1 + p^2 m_A \delta_{22}) + A_3(p^2 m_R \delta_{23}) + \vartheta_1(p^2 I_S) \delta_{24} + \vartheta_2(p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{25} + \vartheta_3(p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{26} &= 0; \\ A_1(p^2 m_S \delta_{13}) + A_2(p^2 m_A \delta_{23}) + A_3(-1 + p^2 m_R \delta_{33}) + \vartheta_1(p^2 I_S) \delta_{34} + \vartheta_2(p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{35} + \vartheta_3(p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{36} &= 0; \\ A_1(p^2 m_S \delta_{14}) + A_2(p^2 m_A \delta_{24}) + A_3(p^2 m_R \delta_{34}) + \vartheta_1[-1 + p^2 I_S \delta_{44}] + \vartheta_2(p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{45} + \vartheta_3(p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{46} &= 0; \\ A_1(p^2 m_S \delta_{15}) + A_2(p^2 m_A \delta_{25}) + A_3(p^2 m_R \delta_{35}) + \vartheta_1(p^2 I_S) \delta_{45} + \vartheta_2[-1 + (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{55}] + \vartheta_3(p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{56} &= 0; \\ A_1(p^2 m_S \delta_{16}) + A_2(p^2 m_A \delta_{26}) + A_3(p^2 m_R \delta_{36}) + \vartheta_1(p^2 I_S) \delta_{46} + \vartheta_2(p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{56} + \vartheta_3[-1 + (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{66}] &= 0; \end{aligned}$$

де «+» відповідає оберненому, а «-» - прямому обертанню.

Прирівнявши до нуля визначник цієї системи рівнянь, отримаємо рівняння для визначення частот:

$$\begin{vmatrix} -1 + p^2 m_S \delta_{11} & p^2 m_A \delta_{12} & p^2 m_R \delta_{13} & p^2 I_S \delta_{14} & (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{15} & (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{16} \\ p^2 m_S \delta_{12} & -1 + p^2 m_A \delta_{22} & p^2 m_R \delta_{23} & p^2 I_S \delta_{24} & (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{25} & (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{26} \\ p^2 m_S \delta_{13} & p^2 m_A \delta_{23} & -1 + p^2 m_R \delta_{33} & p^2 I_S \delta_{34} & (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{35} & (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{36} \\ p^2 m_S \delta_{14} & p^2 m_A \delta_{24} & p^2 m_R \delta_{34} & -1 + p^2 I_S \delta_{44} & (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{45} & (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{46} \\ p^2 m_S \delta_{15} & p^2 m_A \delta_{25} & p^2 m_R \delta_{35} & p^2 I_S \delta_{45} & -1 + (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{55} & (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{56} \\ p^2 m_S \delta_{16} & p^2 m_A \delta_{26} & p^2 m_R \delta_{36} & p^2 I_S \delta_{46} & (p^2 I_A \pm p\omega I_{A0}) \delta_{56} & -1 + (p^2 I_R \pm p\omega I_{R0}) \delta_{66} \end{vmatrix} = 0.$$

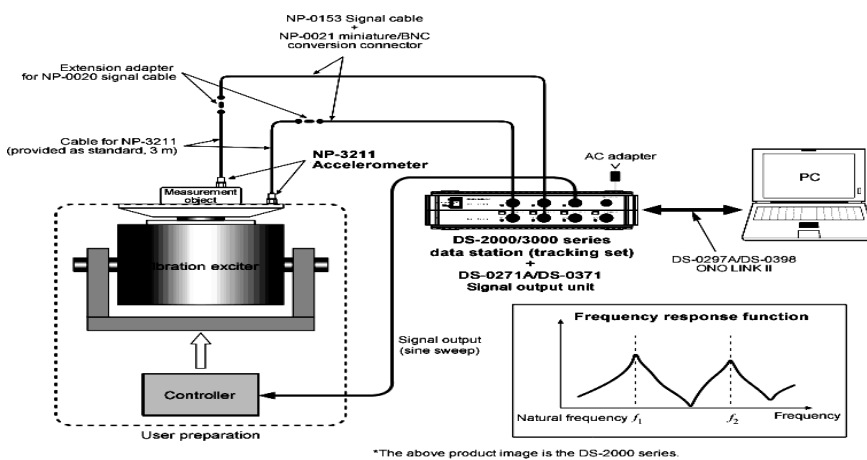


Рис. 7. Схематичне зображення стенду експериментального дослідження

Отже, розв'язавши рівняння для визначення частот, отримаємо залежності власних частот від частоти обертання валу p . В залежності від напрямку обертання валу, власні частоти можуть як збільшуватися (пряма прецесія) так і зменшуватися (обернена прецесія). Із збільшенням частоти p - різниця частот між прямою і оберненою прецесією збільшується. Таким чином, для кожного ступеня вільності, ми маємо дві резонансні частоти.

Експериментальне дослідження. Досліджувались коливання лабораторної центрифуги PICO 21, яка застосовується в медицині для швидкого приготування зразків [15, 16, 17]. Нестабільність функціонування центрифуги погіршує отримані результати під час роботи.

Експериментальні дослідження проводились з частковим використанням лабораторної бази інституту механіки Отто-фон-Геріке Університету Магдебурга (Німеччина).

Використання малого збурення руху є одним з методів визначення спектру досліджуваного об'єкту.

За допомогою багатоканальної станції DS-0271A, яка входить до пристрою DS-2000, який передає вихідний розгорнутий сигнал до датчика коливань вимірювались шуми та вібрації.

Випробування проведено за допомогою датчика віброзбурення який генерує сигнал від 10 Гц до 200 Гц та прискоренням 30 м/с², а потім за допомогою усереднення вихідного сигналу визначаються функції частотної характеристики вібрації та прискорення частин досліджуваного об'єкту.

Пристрій DS-2000 дозволяє визначити пікові значення амплітуд коливань в залежності від об'єкту дослідження. Коефіцієнти жорсткості були визначені з використанням методу половинної потужності ширини полоси. Інтегруючи отримані функції існує можливість відображати та оцінювати залежності швидкість/сила (мобільність), переміщення/сила (піддатливість), сила/прискорення (динамічна маса), сила/швидкість (механічний опір), сила/переміщення (динамічна жорсткість).

Більш точні вимірювання можливі, якщо датчик збурень має роз'єм для підключення зовнішнього вхідного сигналу. Синхронне вимірювання здійснюється за рахунок вхідного сигналу від DS-0271A.

Для визначення жорсткості пружних опор була створена методика на основі використання вібростенду, який збуджує коливання, за якими визначаються динамічні характеристики опор при розтягуванні та зсуві. Результати досліджень наведені нижче.

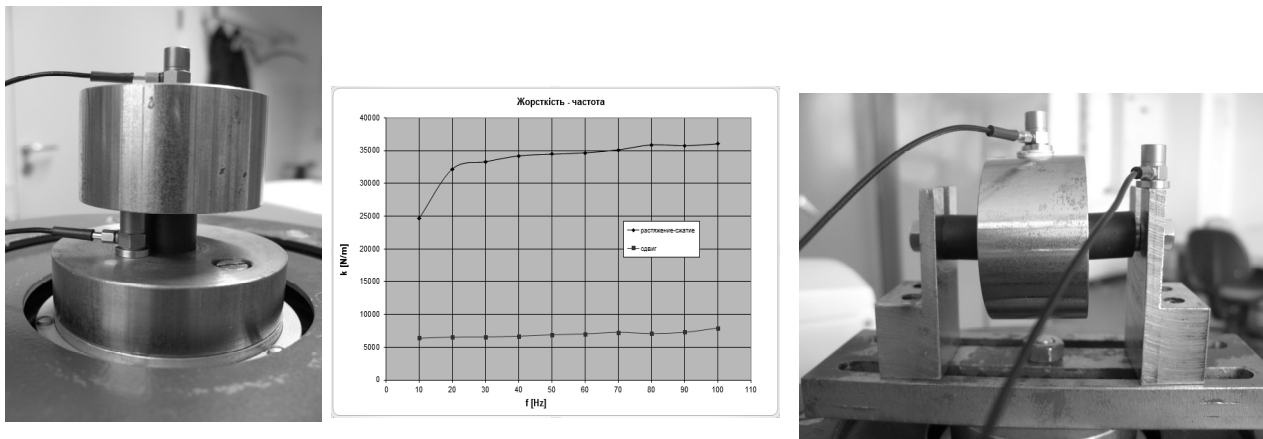


Рис. 8. Стенд експериментального дослідження жорсткості пружних опор

На діаграмі (рис.8) наведені залежності жорсткості пружної опори центрифуги від частоти.

За допомогою лазера Triangulation Displacement Sensors Opto NCDT 2220 (micro - epsilon) ILD 2220 – 100 направлявся промінь на тіло, що обертається, та фіксувався сигнал за допомогою підсилювача типу NP-3414 вбудованого в лазер. Пристрій DS-2000 отримує цей сигнал, а DS-0227 аналізує його. Результати обробки отриманих даних та траєкторій руху тіла відображаються на екрані ПК.



Рис. 9. Стенд експериментального визначення залежності власних частот від частоти обертання

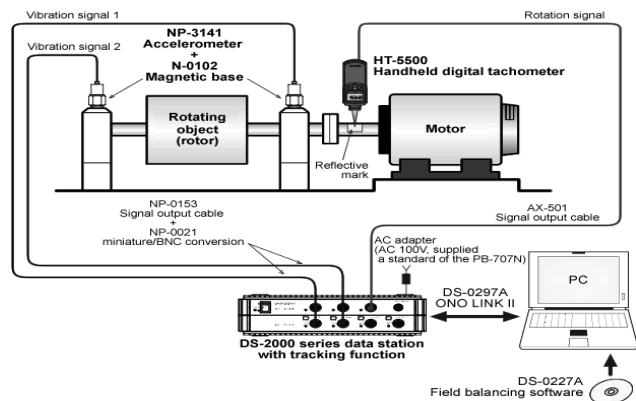


Рис. 10. Схематичне зображення стенду експериментального дослідження

Порівнювались результати отримані експериментально та аналітичним шляхом. Результати співставлення наведені нижче.

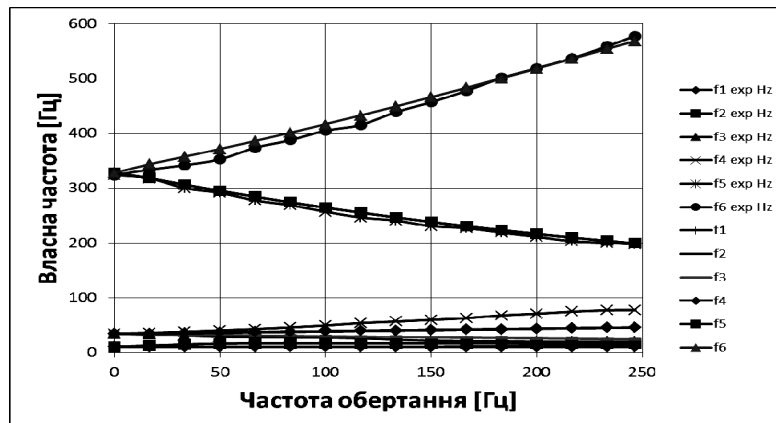


Рис. 11. Зображення кореляції результатів числового та експериментального визначення залежності власних частот від частоти обертання

Висновки

1. Показано, що існуючі розрахункові моделі не достатньо точно описують роботу реальної конструкції центрифуги Рісо 21. Тому запропонована нова розрахункова модель, яка відображає реальну конструкцію та динамічну поведінку центрифуги Рісо 21 з достатньою точністю.
2. Аналітичним шляхом на основі використання методів кінестатики та використання параметрів запропонованої моделі, отримана залежність впливу гіроскопічних ефектів на власні частоти коливань центрифуги.
3. Розроблена експериментальна методика визначення динамічних параметрів центрифуги. На її основі визначені жорсткість опор і вплив швидкості обертання на власні частоти.
4. Показано, що розрахункові і експериментальні залежності мають досить високу ступінь кореляції.

Анотація.

Рассмотрены колебания лабораторной центрифуги. Исследованы колебания с учетом шести степеней свободы. При малых углах нутации определяются угловые скорости прямых и обратных прецессий, траектории движения симметричного гироскопа. Экспериментально определены жесткости упругих опор центрифуги. Найдены зависимости собственных частот от частоты и направления вращения центрифуги. Показана корреляция результатов числового и экспериментального определения значений собственных частот. Принятая в статье модель гироскопа рассчитана на ее использование при решении ряда прикладных задач.

Ключевые слова: Колебания, собственные частоты, гироскопические эффекты, центрифуга, диаграмма Кемпбелла.

Abstract.

Purpose. Definition of influence of gyroscopic effect on vibrations of a laboratory centrifuge.

Design/methodology/approach. Vibrations take into account six degrees of freedom. With small angles of a nutation angular speeds of forward and back precession, trajectories of movement of a symmetric gyroscope. Experimentally were defined rigidity of elastic support of a centrifuge. Were found dependences of own frequencies depending on frequency and direction of rotation of a centrifuge. The correlation of results of numerical and experimental definition of values of own frequencies were shown. The model of a gyroscope accepted in article is calculated on its use at the solution of a number of applied tasks.

Findings. With influence of gyroscopic effect on every degree of freedom we have two resonant frequencies instead of one.

Originality/value. This research was important and original in field of vibrations of medical machines, which usually work with high values of frequencies. It shows changes of own frequency depending on work frequency. It can help to avoid a resonance during operation.

Keywords: Vibrations, own frequency, gyroscopic effects, vibrations of centrifuge, Campbell's chart.

1. Зейтман М.Ф., Кушуль М.Я. Изгибные колебания вертикальных роторов в гравитационном поле. Машиноведение, 1968, №5;
2. Кушуль М.Я. Движение гироскопа с гибкой осью под действием силы тяжести и упругих связей при малых углах нутации и устойчивости его вертикального вращения. ПММ, 1968, т.32, вып.4
3. Magnus K. Die Schwingungen des Kreisels mit der Massen elastisch gekoppelt ist. Proc. of the conference on vibration at Göttingen and Kassel, 6-8 October 1938, VDI – Verlag, 1939;

4. Magnus K. Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kreiselgeräten. Z. angew. Math. und Mech., 1940, Bd. 20, Heft 3
5. Маундер Л. Собственные частоты колебаний свободного гироскопа с упругим валом, установленного в кардановом подвесе. Механика, сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1961, №5 (69);
6. Уиттел А.П.Р., Маундер Л. Колебания свободного гироскопа с неоднородно упругой осью. Механика, сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1964, №6 (88)
7. Крементуло В.В. Применение второго метода Ляпунова к изучению устойчивости движения гироскопа с учетом упругих свойств оси ротора. ПММ, 1961, т.25, вып. 3, стр.579
8. Гусаров А.А. Автоматическая балансировка роторов машин. – М.: Наука, 1979. – 306с.,
9. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск, ТГУ, 1985. – 84с.
10. Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. Колебания машин. М., Машиностроение, 1964. – 308с.
11. Звиногородский Н.В., Кушуль М.Я. Исследование вибраций быстроходных веретен. Изв. АН СССР, ОТН, №10, 1956.
12. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. К., 1985. – 328с.
13. Лурье А.И. Аналитическая механика. М., 1961. – 824с.
14. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974. – 431с.
15. Fischer J., Strackeljan J.: Some considerations of modelling internal friction in rotor shaft connections, Proceedings of 12th World Congress in Mechanism and Machine Science IFToMM 2007.
16. Fischer J., Strackeljan J.: Stability Analyses of High Speed lab centrifuges considering internal damping in rotor shafts, Technische Mechanik, Band 26, Heft 2, pp 131-147, 2006.
17. Фишер Й., Штракельян Е., МКЕ-модельвання та дослідження стабільності систем швидкохідних роторів. 7-а IFToMM-Конференція динаміки роторів, Відень, Австрія, Жовтень 2006.

REFERENCES

1. Zeytman M.F. Kushul M.J. Yzhybnye kolebaniya vertykalnyh rotorov v hravytatsyonnom pole. Mashynovedenye, 1968, no. 5.
2. Kushul M.J. Dvijenie gyroskopa s hybkoy osyu pod deistviem syli tyajesty i uprygih svoystv pry malyh uhlah nutatsyy i ystoichivosti ego vertykalnogo vrascheniya. PMM, 1968, t.32, vyp.4
3. Magnus K. Die Schwingungen des Kreisels mit der Massen elastisch gekoppelt ist. Proc. of the conference on vibration at Göttingen and Kassel, 6-8 October 1938, VDI – Verlag, 1939;
4. Magnus K. Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kreiselgeräten. Z. angew. Math. und Mech., 1940, Bd. 20, Heft 3
5. Maunder L. Sobstvennye frequency oscillations of a free gyroscope with elastic shaft, setting in Mount gimbal. Mechanics, Sat. Trans. and obz. foreign lang. period. lit., 1961, no. 5, 69
6. Uyppe A.P.R., Maunder L. Fluctuations freely gyroscope with neodnorodno upruhoy osyu. Mechanics, Sat. Trans. and obz. foreign lang. period. lit., 1964, no. 6, 88
7. Krementulo V. Application of the method of Lyapunov echoes rolled Study Stability motion gyroscope with accounting elastic properties wasps rotor. PMM, 1961, t.25, no. 3, p.579
8. Gusarov A.A. Automatic balancing rotorov machines. Moscow: Nauka, 1979. 306p.,
9. Nesterenko V. Automatic balancing rotorov pryborov and machines so mnogimi degrees of freedom. Tomsk, Tomsk State University, 1985. 84p.
10. Dymenbeg F.M., Shatalov K.T., Gusarov A.A. Fluctuations machines. Moscow, Mashinostroenie, 1964. 308p.
11. Zvynohorodskyy N.V., Kushul M.J. Study vybratsyy bystrohodnyh spindles. Izv. AN SSSR, OTN, no. 10, 1956.
12. Pavlovsky M.A., Putyata T.V. Theoretical mechanics. Kyiv, 1985. 328p.
13. Lurie A.I. Analytycheskaya mechanics. Moscow, 1961. 824p.
14. Arnold V.I. Mathematical Methods Classical Mechanics. Nauka, 1974. 431p.
15. Fischer J., Strackeljan J.: Some considerations of modelling internal friction in rotor shaft connections, Proceedings of 12th World Congress in Mechanism and Machine Science IFToMM 2007.
16. Fischer J., Strackeljan J.: Stability Analyses of High Speed lab centrifuges considering internal damping in rotor shafts, Technische Mechanik, Band 26, Heft 2, pp 131-147, 2006.
17. Fischer J., Strackeljan J.: FEM-Simulation and stability analyses of high speed rotor systems .7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 2006.