

О ПОВЕРХНОСТЯХ НАГРУЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ С РАЗЛИЧНОЙ РЕАКЦИЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Kucher N., Kucher V.

G.S.Pisarenko Institute for Problems of Strength National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

(kucher@ipp.kyiv.ua)

ABOUT LOADING SURFACES OF MATERIALS, WHICH HAVE DIFFERENT TENSILE AND COMPRESSION STRENGTH

Представлена поверхность нагружения изотропного материала, который по разному сопротивляется растяжению и сжатию. Предполагается, что поверхность в начале пластического течения совпадает с начальной поверхностью текучести, а в предельном случае, при разрушении – с поверхностью разрушения. Для определения их параметров используется обобщенный критерий Писаренко-Лебедева для структурно-неоднородных материалов. В качестве меры процесса деформирования привлекается нормированная интенсивность пластических деформаций. Предложена методика описания эволюции поверхности нагружения при активном сложном деформировании на основе базовых опытов на растяжение, сжатие и чистый сдвиг.

Ключевые слова: критерии текучести и прочности, анизотропно упрочняющиеся среды, меры упрочнения, поверхность нагружения.

Введение

Значительная часть изотропных материалов характеризуется различной механической реакцией при растяжении и сжатии. При этом существенно отличаются их диаграммы деформирования в зависимости от вида нагружения и прочностные характеристики материалов [1, 2]. Прогнозирование деформирования таких структур, в большинстве случаев, выполняется в рамках упругопластических моделей с изотропным, кинематическим или изотропно-кинематическим упрочнением [3-5].

Использование гипотезы о единой кривой, в качестве которой привлекается зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, может рассматриваться только как первое приближение в упругопластических расчетах деформирования материалов, которые по разному сопротивляются растяжению и сжатию.

В [1, 2, 6, 7] показано, что поверхности нагружения таких материалов при активном деформировании изменяют свою первоначальную форму. Ее эволюция зависит от истории напряженно-деформированного состояния. В частности, для описания поверхностей нагружения с анизотропным упрочнением могут использоваться две меры процесса деформирования, связанные с параметрами Одквиста для максимальной и минимальной пластической деформации [6, 7]. Упомянутые модели деформирования имеют ограниченную область применимости, и требуют более строгой экспериментальной проверки, хотя и позволяют описать ряд эффектов сложного нагружения.

Целью настоящей работы является разработка поверхностей нагружения с анизотропным упрочнением для более точного описания сложных процессов упругопластического деформирования материалов с различной реакцией при растяжении и сжатии.

В работе рассматривается подход для описания эволюции поверхности нагружения для материалов, которые по разному сопротивляются при растяжении и сжатии. Предполагается, что такая поверхность нагружения в начале пластического течения совпадает с поверхностью текучести, а предельном случае, при разрушении – с поверхностью разрушения. Для определения параметров поверхности текучести и поверхности разрушения используется критерий Писаренко-Лебедева для структурно неоднородных материалов. В качестве меры процесса деформирования привлекается нормированная интенсивность пластических деформаций. Излагается методика конкретизации параметров поверхности нагружения, исходя из результатов опытов на растяжение, сжатие и чистый сдвиг.

Поверхности нагружения материалов с различной реакцией при растяжении и сжатии

Согласно обобщенного критерия Писаренко-Лебедева для структурно неоднородных материалов [1, 2] начальная поверхность текучести определяется соотношением

$$\chi\sigma_i + (1-\chi)\cdot\sigma_1 \cdot A^{1-K_\sigma} - \sigma_y^+ = 0, \quad (1)$$

где $\chi = \sigma_y^+ / \sigma_y^-$ – параметр, определяющий вклад в микродеформирование сдвиговой деформации, σ_y^+ , σ_y^- – пределы текучести материала при растяжении и сжатии, σ_1 – интенсивность напряжений, σ_1 – максимальное главное напряжение, A – характеристика структуры материала, $K_\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sigma_1$ – параметр жесткости напряженного состояния, $\sigma_k = (k = 1, 2, 3)$ – главные напряжения.

Если заменить в выражении (1) пределы текучести σ_y^+ и σ_y^- на соответствующие пределы прочности σ_b^+ и σ_b^- , то получим соотношения, определяющие предельную поверхность разрушения.

Обработка данных большого числа результатов испытаний [1, 2] показала, что параметр A практически не изменяется в процессе деформирования и может быть принят постоянным.

В частности, A можно определить по данным испытаний материала на чистый сдвиг (скручивание тонкостенной трубки) [1, 2]. Тогда

$$A = \frac{\sigma_b^+ - \sqrt{3}\tilde{\chi} \cdot \tau_b}{(1-\tilde{\chi}) \tau_b}, \quad (2)$$

где $\tilde{\chi} = \sigma_b^+ / \sigma_b^-$, τ_b – предельное значение напряжения сдвига. Другие методики для определения этого параметра изложены в [1, 2].

Критерий предельного состояния Писаренко и Лебедева [1, 2] позволяет точнее определить разрушающие напряжения в материалах, чем критерии Кулона-Мора, Мизеса, Марина-Ху, Баландина П.П., Боткина А.И. – Миролюбова И.Н. и др. [8, 9]. В результате его применения имеет место лучшее соответствие расчетных и опытных данных (в том числе, сталей, различных марок графита, хрупких терморезистивных пластмасс, чугунов, металлокерамических композиций, пенопластов и др.) [1-2, 8-9].

Однако при решении упругопластических задач в качестве поверхности нагружения данный подход, как нам кажется, до настоящего времени не использовался. По видимому, это связано с трудностями определения параметра χ в процессе пластического деформирования.

На рис. 1 приведены диаграммы начальной текучести и прочности для плоского напряженного состояния высокопрочного чугуна, вычисленные на основе критерия (1) при $A = 0,75$. Точками P_1, P_2, P_4, P_5 отмечены результаты опытов [10]. σ_θ, σ_z – главные напряжения.

Аналогичные соотношения, описывающие поверхности начальной текучести и предельной прочности, имеют место и для ковкого чугуна [11].

Как видно из рис. 1, поверхность нагружения при активном деформировании должна испытывать анизотропное расширение, связанное с различными механическими характеристиками материала при растяжении и сжатии. В предельном случае она должна совпадать с поверхностью разрушения. Чем больше различие между диаграммами деформирования при растяжении и сжатии, тем сильнее сказываются эффекты анизотропии на эволюции поверхности нагружения.

Отметим, что эффект Баушингера при таком подходе не описывается.

Для определения параметра χ воспользуемся зависимостями напряжений от пластических деформаций, полученными из опытов на растяжение и сжатие образцов [10], представив их в безразмерном виде. Обозначим

$$q = \frac{\varepsilon^{+P}}{\varepsilon_b^{+P}}, \quad g = \frac{\varepsilon^{-P}}{\varepsilon_b^{-P}}, \quad (3)$$

где $\varepsilon^{+P}, \varepsilon^{-P}$ – пластические деформации при растяжении и сжатии, возникающие в направлении действующих усилий, $\varepsilon_b^{+P}, \varepsilon_b^{-P}$ – предельные значения этих же величин. Такие соотношения, связывающие напряжения σ^+, σ^- и безразмерные пластические деформации q, g для высокопрочного чугуна [10], приведены на рис. 2.

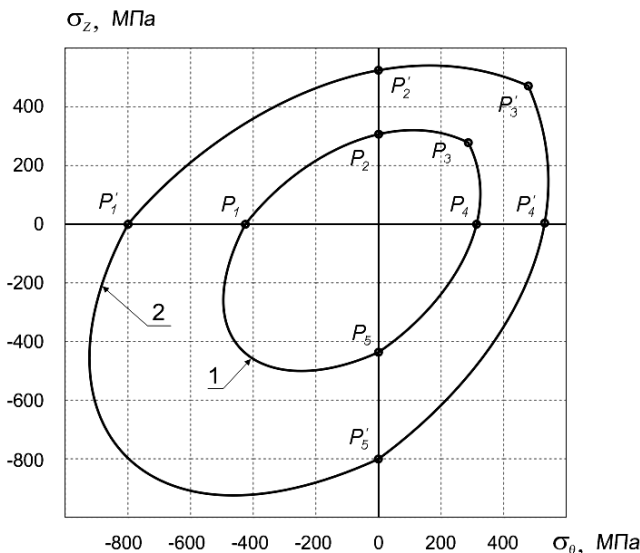


Рис. 1. Диаграммы начальной текучести (1) и предельной прочности (2) высокопрочного чугуна

Следовательно, параметр χ можно интерпретировать как отношение ординат точек, лежащих на кривых (1) и (2) для выбранной абсциссы.

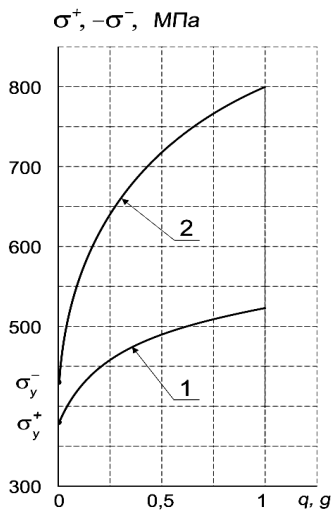


Рис. 2. Зависимость напряжений при растяжении (1) и сжатии (2) высокопрочного чугуна от безразмерных пластических деформаций

Чтобы определить χ в текущий момент времени для сложного напряженного состояния, введем понятие эквивалентных пластических деформаций для материалов, которые по разному сопротивляются растяжению и сжатию. Это легче сделать, если перейти к главным напряжениям и главным пластическим деформациям. При этом каждому главному напряжению σ_k будет соответствовать полная ϵ_k и пластическая ϵ_k^p компоненты тензора деформации.

Для простоты изложения методики конкретизации поверхности нагружения такого класса материалов ограничимся рассмотрением случая плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$).

По аналогии с эквивалентным напряжением для сложного напряженного состояния, как это сделано в [1, 2], введем понятие эквивалентной пластической деформации, которую определим соотношением

$$\epsilon_{eq}^p = \xi \epsilon_i^p + \frac{2}{3}(1-\xi) (\epsilon_1^p - \epsilon_3^p) H(\sigma_1), \quad (4)$$

где ξ – параметр масштабирования, который равен $\epsilon_b^{+p} / \epsilon_b^{-p}$, ϵ_i^p – интенсивность пластических деформаций, $H(x)$ – единичная функция Хевисайда. При $x \leq 0$ $H(x)=0$ и $H(x)=1$, если $x > 0$.

Отметим, что эквивалентная пластическая деформация, как и интенсивность пластических деформаций согласно (4), является положительной величиной, при этом $0 \leq \epsilon_{eq}^p \leq \epsilon_b^{+p}$. Кроме того в точках P_1, P_2, P_4, P_5 она равна предельному значению ϵ_b^{+p} .

Так как плоскому напряженному состоянию соответствует трехмерное деформированное состояние, такие процессы удобнее анализировать в плоскостях S_1S_2 и $\mathcal{E}_1^p\mathcal{E}_2^p$ пятимерных девиаторных пространств А.А.Ильюшина S_5, \mathcal{E}_5^p [12]. Тогда

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_1 - 0,5\sigma_2), \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_2, \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_1^p = \sqrt{\frac{3}{2}}\epsilon_1^p, \quad \mathcal{E}_2^p = \frac{\sqrt{2}}{2}(\epsilon_2^p - \epsilon_3^p). \quad (6)$$

Для построения экспериментально определенной предельной поверхности разрушения в девиаторной плоскости S_1S_2 необходимо определить величины S_1 и S_2 , используя соотношения (5), подставив в них предельные значения σ_{1b} и σ_{2b} , исходя из рис. 1. Вычисленные диаграммы начальной текучести и разрушения в девиаторной плоскости для высокопрочного чугуна показаны на рис. 3.

Как видно из рис. 3, диаграммы симметричны относительно прямой, проходящей через начало координат и точку P_3 , что соответствует требованию инвариантности предельных поверхностей изотропных материалов к направлениям главных осей [1, 2].

Для вычисления предельных значений пластических деформаций для лучевых траекторий нагружения воспользуемся гипотезой о том, что для изотропных материалов простому нагружению соответствует простое деформирование. При этом направления главных осей напряжений и пластических деформаций совпадают между собой.

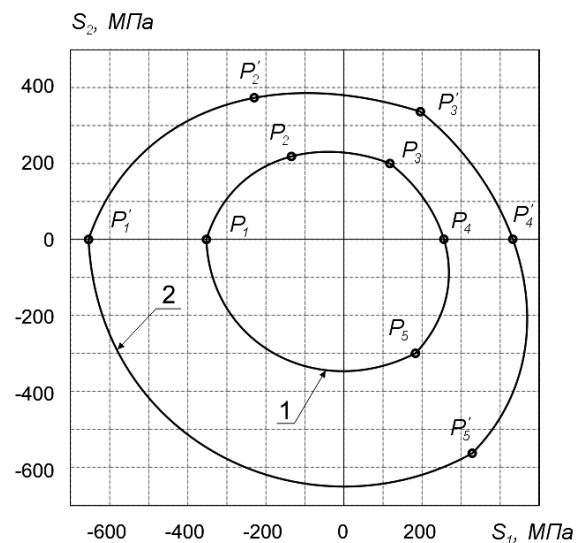


Рис. 3. Диаграммы текучести (1) и предельной прочности (2) высокопрочного чугуна в девиаторном пространстве напряжений

Учитывая, что в момент разрушения эквивалентная пластическая деформация ε_{eq}^p равна величине ε_b^{+p} и для пластически несжимаемых материалов $\varepsilon_3^p = -(\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p)$, из соотношения (4) следует

$$\xi \varepsilon_i^p + \frac{2}{3}(1-\xi) (2\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p) \cdot H(\sigma_1) = \varepsilon_b^{+p}. \quad (7)$$

Обозначим через k тангенс наклона линейной траектории нагружения в девиаторном сечении S_1S_2 . Тогда из соотношений $S_2/S_1 = d\varepsilon_2^p/d\varepsilon_1^p = k$, на основе представления (7) получим значение $\varepsilon_1^p = \varepsilon_{1b}^p$ при разрушении для данной лучевой траектории нагружения. При этом

$$\varepsilon_{1b}^p = \frac{1,5 \cdot \varepsilon_b^{+p}}{(1-\xi) (2+k) H(\sigma_1) + \sqrt{3} \cdot \xi \sqrt{1+k+k^2}}. \quad (8)$$

Значение другой компоненты предельной деформации вычисляется из выражения $\varepsilon_{2b}^p = k\varepsilon_{1b}^p$. Задавая различные значения параметру k , получим искомые предельные величины. Предельные значения пластической деформации для рассматриваемых лучевых траекторий нагружения в пространстве А.А. Ильюшина показаны на рис. 4.

Отметим некоторые особенности предельной поверхности пластических деформаций. Более точно ее следовало бы назвать поверхностью ресурса пластических деформаций, которым обладает материал находящийся в исходном недеформированном состоянии.

В точках $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5$ значения вычисленных пластических деформаций полностью соответствуют предельным величинам, которые получены из опытов на растяжение, сжатие и двухстороннее равномерное растяжение. Как и поверхность разрушения (см. рис. 3), она является выпуклой и симметричной относительно прямой, проходящей через начало координат и точку P'_3 . Значения максимальной интенсивности пластической деформации различны для различных направлений нагружения или направлений деформирования.

Для описания эволюции рассматриваемых поверхностей нам необходимы значения параметра χ для произвольных точек в пространствах напряжений и предельное значение эквивалентной пластической деформации.

Предположим, что из упругопластического расчета нам известны значения главных напряжений и приращения главных пластических деформаций в некоторый момент времени. Используя соотношения (8), мы можем определить $\varepsilon_{1b}^p, \varepsilon_{2b}^p$, а затем и предельное значение интенсивности пластической деформации ε_{ib}^p для данного направления

$$\varepsilon_{ib}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{1b}^p)^2 + \varepsilon_{1b}^p \varepsilon_{2b}^p + (\varepsilon_{2b}^p)^2}. \quad (9)$$

Обобщая представление (3) на случай сложного напряженного состояния, введем нормированную величину интенсивности напряжений следующим образом

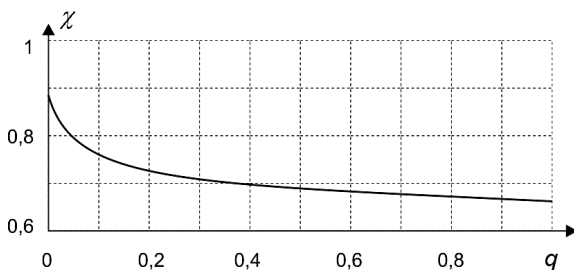


Рис. 5. Зависимости параметра χ от безразмерной величины q

$$q = \frac{\varepsilon_i^p}{\varepsilon_{ib}^p}. \quad (10)$$

Этот параметр для лучевой траектории изменяется от нуля до единицы. В случае одноосного напряженного состояния соотношение (10) совпадает с первым соотношением (3).

Экспериментально полученные зависимости параметра χ от нормированной интенсивности пластической деформации для высокопрочного чугуна приведены на рис. 5.

В дальнейшем при анализе процессов деформирования мы ограничимся траекториями

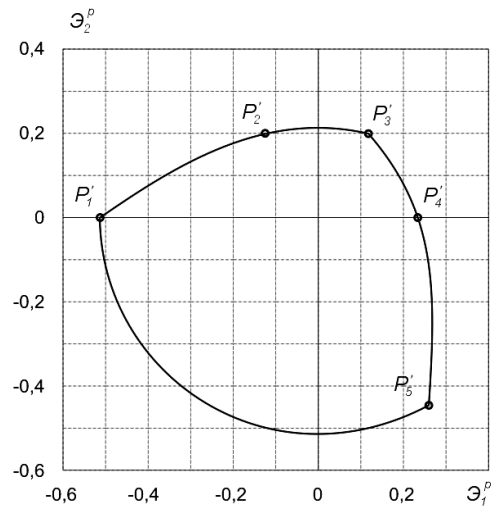


Рис. 4. Поверхность предельных пластических деформаций высокопрочного чугуна для простых нагружений

деформации малой кривизны или достаточно близкими к ним [12]. Любая такая траектория может быть представлена в виде кусочно-линейной траектории, состоящей из совокупности прямолинейных участков.

В качестве первого приближения, как и в теории течения, будем предполагать, что после излома траектории деформации направления главных осей тензоров девиатора напряжения и приращения пластических деформаций совпадают.

Если в некоторый момент времени (например, в точке B – см. рис. 6), траектория пластической деформации претерпевает излом, то остаточный ресурс пластичности материала определяется гомотетически уменьшенной поверхностью.

Как следует из рис. 6, поверхность ресурса пластичности при движении по лучевой траектории AB' гомотетически уменьшается и в пределе стремится к нулю в точке B' . Интенсивности нормированной пластической деформации на каждом участке определяется размерами поверхности ресурса пластичности, которые показаны в виде штриховых линий на рис. 6 с центрами в точках излома B и C .

В качестве меры процесса на втором линейном участке используется безразмерный параметр q , определяемый выражением

$$q = q_1 + (1 - q_1) \frac{\varepsilon_i^p}{\varepsilon_{ib}^p} \quad (11)$$

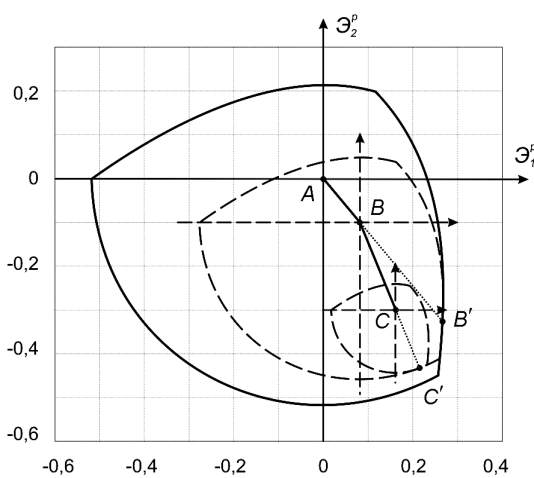


Рис. 6. Эволюция поверхности ресурса пластичности в процессе деформирования для кусочно-линейных траекторий

Аналогичные соотношения справедливы для любого последующего n -го участка, если заменить индекс 1 на $(n - 1)$ в вышеназванных выражениях.

При таком представлении площадь поверхности ресурса пластичности будет, в предельном случае стремиться к нулю, а параметр q – к единице.

Для определения функции упрочнения $\delta^+(q)$, для которой должны выполняются условия

$$\delta^+(0) = \sigma_y^+, \quad \delta^+(1) = \sigma_b^+ \quad (12)$$

можно воспользоваться исходной диаграммой растяжения с привлечением метода наименьших квадратов, выбрав наиболее подходящую аппроксимирующую функцию.

Для аппроксимации параметров $\chi(q)$ и функции упрочнения $\sigma_y^+(q)$ высокопрочного чугуна можно принять [13]

$$\chi(q) = (a_1 + b_1 q)^{-1/c_1}, \quad \delta^+(q) = a_2 (q + b_2)^{c_2}. \quad (13)$$

Здесь $a_1 = 7,4566$; $b_1 = 904,5652$; $c_1 = 16,2930$; $a_2 = 522,9398$ МПа; $b_2 = 0,05271$; $c_2 = 0,1099$.

Тогда выражение, описывающее эволюцию поверхности нагружения, имеет вид

$$f = \chi(q) \sigma_i + [1 - \chi(q)] \cdot \sigma_1 \cdot A^{1-K_\sigma} - \delta^+(q) \leq 0. \quad (14)$$

Такое представление поверхности позволяет точнее описать начальную поверхность текучести и ее трансформацию в процессе деформирования в зависимости от величины нормированной интенсивности пластических деформаций.

Для конкретизации поверхности нагружения в виде (14) необходимы следующие эксперименты:

1. Опыты на одноосные растяжение и сжатие для определения диаграмм деформирования материала.
2. Опыт на чистый сдвиг (скручивание тонкостенной трубки) для вычисления структурного параметра A .

Выводы

Для прогнозирования упругопластических процессов сложного активного деформирования на основе критериев Писаренко-Лебедева сформулирована поверхность нагружения учитывающая анизотропное упрочнение материалов. Такая поверхность позволяет описать достаточно общие законы деформирования и применима при расчетах более широкого класса материалов, чем известные модели с изотропно-кинематическим упрочнением. Разработаны методики конкретизации параметров предложенных соотношений, исходя из результатов базовых опытов на растяжение, сжатие и чистый сдвиг.

Анотація. Запропонована поверхня навантаження для ізотропних матеріалів, котрі по-різному опираються розтягання та стисненню. Припускається, що така поверхня навантаження на початку пластичної течії співпадає з початковою поверхнею течії, а в граничному випадку, при руйнуванні - з поверхнею руйнування. Для визначення параметрів початкової поверхні течії та поверхні руйнування використовується критерій Писаренка-Лебедева для структурно-неоднорідних матеріалів. Запропонована методика опису еволюції поверхні навантаження в процесі активного деформування для траєкторій пластичних деформацій малої кривизни або достатньо близьких до них на основі базових експериментів на розтяг, стиск та чистий зсув. За міру процесу деформування використовується нормована інтенсивність пластичних деформацій.

Ключові слова: критерії течіння та міцності, анізотропно зміцнюючі середовища, міри зміцнення, поверхня навантаження.

Abstract. The loading surface is proposed for isotropic materials with different tensile and compressive strength. It is assumed that this surface coincides with the initial yield surface at the beginning of the plastic yielding and coincides with the failure surface in the limiting case, at fracture. To determine the parameters of the initial yield surface and the fracture surface, the Pisarenko-Lebedev criterion for structurally inhomogeneous materials is used. The procedure for describing the loading surface evolution during the active deformation is proposed for plastic strain paths of small curvature, or sufficiently close to them, based on the basic tension, compression and pure-shear experiments. The normalized plastic strain intensity is used as a deformation measure.

Keywords: yield and strength criteria, anisotropically hardening media, measure of hardening, loading surface.

1. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.
2. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под ред. академика НАН Украины А.А.Лебедева. - Киев: Издательский дом "Ин Юре", 2003. – 540 с.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – Москва: Наука, 1969. - 420 с.
4. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. - Київ: Вища школа, 2002. – 308 с.
5. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Ленинград: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 223 с.
6. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic – damage model for concrete // Intern. Journal of Solid Structures. – 1989. – Vol. 25. – P. 299-326.
7. Umit Cicekli, George Z. Voyiadjis, Rashid K. Abu Al-Rub. A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete // Intern. Journal of Plasticity. – 2007. – Vol. 23. – P. 1874-1900.
8. Yu M.N. Twin Sheory and its aplication (in Chinese) Seine Press. Beijing, 1998. – 834 p.
9. Matsuoka H., Hoshikawa T., Ueno K. A general failure criterion and stress-strain relation for granular materials to metals // Soils Fond. – 1990. – Vol. 30, N 2. - P. 119-127.
10. Ламашевский В.П., Кучер В.Н. Экспериментальное исследование особенностей деформирования высокопрочного чугуна при растяжении и сжатии // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2010. - Вып. 33. - С. 190-197.
11. Ламашевский В.П., Маковецкий И.В. Деформирование и прочность ковкого чугуна при сложном напряженном состоянии // Пробл. прочности. – 2005. - №5. – С. 71 -83.
12. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – Москва: Изд-во Моск-го ун-та, 1978. – 287 с.
13. Бахвалов Н.С. Численные методы. – Москва: Наука, 1975. – Т.1. – 632 с.

REFERENCES

1. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. Deformirovanie i prochnost' materialov pri slozhnom naprjazhenom sostojanii (Deformation and durability at a difficult tension) Kyiv, Naukova dumka, 1976, 416 p.
2. Lebedev A.A., Koval'chuk B.I., Giginjak F.F., Lamashevskij V.P. Mehanicheskie svojstva konstrukcionnyh materialov pri slozhnom naprjazhenom sostojanii (Mechanical properties of constructional materials at a difficult tension). Kyiv: Izdatel'skij dom "In Jure", 2003, 540 p.
3. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti (Bases of the theory of plasticity) Moscow: Nauka, 1969, 420 p.
4. Mozharovs'kij M.S. Teoriya pruzhnosti, plastichnosti i povzuchosti (Theory of elasticity, plasticity and creep) Kyiv: Vyshsha shkola, 2002, 308 p.
5. Novozhilov V.V., Kadashevich Ju.I. Mikronaprjazhenija v konstrukcionnyh materialah (Microtension in constructional materials) Leningrad: Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1990, 223 p.
6. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E., Intern. Journal of Solid Structures, 1989, vol. 25, pp. 299-326.
7. Umit Cicekli, George Z. Voyiadjis, Rashid K. Abu Al-Rub, Intern. Journal of Plasticity, 2007, vol. 23, pp. 1874-1900.
8. Yu M.N. Twin Sheory und its aplication (in Chinese) Seine Press. Beijing, 1998, 834 p.
9. Matsuoka H., Hoshikawa T., Ueno K., Soils Fond, 1990, vol. 30, no 2, pp. 119-127.
10. Lamashevskij V.P., Kucher V.N., International scientific and technical collection "Reliability and durability of cars and constructions", 2010, no 33, pp. 190-197.
11. Lamashevskij V.P., Makovetskij I.V., Strength of Materials, 2005, no 5. pp. 71-83.
12. Il'jushin A.A. Mehanika sploshnoj sredy (Mechanics of the continuous environment). Moscow: Mosk-go's publishing house un-that, 1978, 287 p.
13. Bahvalov N.S. Chislennye metody (Numerical methods). Moscow: Nauka, 1975, vol. 1, 632 p.