

УДК 531.383

## ВИЗНАЧЕННЯ ПОХИБКИ ГІРОТЕОДОЛІТУ ПРИ ДІЇ ВИПАДКОВОЇ ВІБРАЦІЇ

Мураховський С. А.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
м. Київ, Україна

*Проведено порівняльний аналіз існуючих робіт, присвячених аналізу динаміки гіротеодолітів при вібрації основи. Показано актуальність поставленої задачі визначення вібраційної похибки при випадкових збуреннях. Проведено аналіз динаміки гіротеодоліту при випадковій вібрації основи. Отримано загальну формулу для визначення середнього значення вібраційної похибки. Отримана залежність за формою співпадає з виразом вібраційної похибки при регулярній вібрації. Проаналізовано вплив параметрів приладу та зовнішніх факторів на величину похибки. Проведено моделювання динаміки гіротеодоліту при випадковій вібрації. Показано відповідність отриманих теоретичних результатів програмним експериментам. В подальшому передбачені дослідження, спрямовані на зменшення дисперсії вихідного сигналу гіротеодоліту за допомогою фільтру Калмана.*

**Ключові слова:** гіротеодоліт, вібраційна похибка, випадкова вібрація.

### Вступ

Сучасні вимоги, що висуваються до гіротеодолітів, передбачають можливість роботи приладу в умовах частково рухомої основи, тобто без спеціальних пристосувань, що забезпечують незбурюваність вібраціями, при цьому характеристики вібрації, частота і амплітуда, здебільшого є випадковими величинами. Існує багато робіт [1...3], в яких проведено дослідження динаміки гіротеодолітів при вібрації. Однак у наведених роботах основну увагу приділено випадку регулярної гармонійної вібрації, а при експлуатації приладу характеристики вібрації суттєво відрізняються від гармонічного закону, тобто задачу визначення вібраційної похибки гіротеодоліту за умов випадкових вібраційних збурень не розглянуто. Тому пропонується аналіз динаміки гіротеодоліту при дії випадкової вібрації, а також визначення загального опису вібраційної похибки.

### Постановка задачі

Розглянемо рівняння руху чутливого елемента (ЧЕ) гіротеодоліту з кутів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  [3]:

$$\begin{cases} H\ddot{\beta} + (F_{KC} + f_{\alpha})\dot{\alpha} + H\omega_3 \cos \varphi_g (1 + \kappa) \cdot \alpha = mgl[\gamma \cdot n_x(t) + \beta \cdot n_z(t)] \\ -H\dot{\alpha} + f_{\beta}\dot{\beta} + mgl\beta = -mgl \cdot n_x(t) + H\omega_3 \sin \varphi_g \\ T_{\gamma}^2 \ddot{\gamma} + 2\xi_{\gamma} T_{\gamma} \dot{\gamma} + \gamma = n_z(t) \end{cases}, \quad (1)$$

де  $\kappa = \frac{K_{KC}}{H\omega_3 \cos \varphi_g}$ ;  $n_x(t) = n(t) \cos(\varepsilon + \psi_0)$ ;  $n_z(t) = n(t) \sin(\varepsilon + \psi_0)$  – проекції пе-

ревантаження точки підвісу гіротеодоліту;  $\varepsilon$  – кут відхилення напрямку вібрації від площини меридіану;  $\psi_0$  – кут відхилення курсової риски приладу від

площини меридіану;  $H$  – кінетичний момент гіроскопу;  $m$  – маса чутливого елемента;  $l$  – зміщення центру мас ЧЕ відносно точки підвісу;  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути повороту чутливого елемента відносно корпусу приладу;  $f_\alpha, f_\beta$  – коефіцієнти в'язкого тертя;  $T_\gamma, \xi_\gamma$  – стала часу та відносний коефіцієнт загасання коливань з кута  $\gamma$ ;  $\omega_3$  – кутова швидкість обертання Землі;  $\varphi_g$  – географічна широта місця встановлення приладу;  $K_{KC}$  – коефіцієнт компенсаційного зв'язку;  $F_{KC}$  – коефіцієнт демпфування, пропорційний коефіцієнту компенсаційного зв'язку.

За дії гармонічної поступальної вібрації  $n(t) = n_m \sin \omega t$  вібраційну похибку гіротеодоліта можна визначити за відомою формулою [3]

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\omega_{pr} n_m^2}{4\omega_3 \cos \varphi_g} [N_\gamma(\omega) + N_\beta(\omega)] \sin 2(\varepsilon + \psi_0),$$

де  $N_\gamma(\omega), N_\beta(\omega)$  – відповідні амплітудно-частотні характеристики гіротеодоліту;  $\omega_{pr} = \frac{mgl}{H}$ .

Перевантаження точки підвісу ЧЕ гіротеодоліта  $n(t)$  вважатимемо стаціонарним випадковим процесом. Експериментальні дослідження доводять, що можна також вважати процес поступальної вібрації близьким до нормального, який повністю визначається математичним сподіванням  $M[n(t)]$  і кореляційною функцією  $K_n(\tau)$ :

$$M[n(t)] = 0, \\ K_n(\tau) = \sigma_n^2 e^{-\mu_n |\tau|} \left( \cos \lambda_n \tau + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n |\tau| \right), \quad (2)$$

де  $\sigma_n^2$  – дисперсія амплітуди перевантаження,  $\lambda_n$  – переважаюча частота поступальної вібрації,  $\mu_n$  – коефіцієнт кореляційної функції, що характеризує нерегулярність вібрації.

Математичне сподівання  $M[n(t)]$  обрано рівним нулю, виходячи з очевидного фізичного змісту вібраційного перевантаження. Кореляційній функції (2) відповідає спектральна щільність, яка характеризує розподіл інтенсивності коливань за частотою

$$S_n(\omega) = \frac{2\mu_n \sigma_n^2}{\pi} \frac{b_n^2}{\omega^4 + 2a_n \omega^2 + b_n^4},$$

де  $a_n = \mu_n^2 - \lambda_n^2, b_n^2 = \mu_n^2 + \lambda_n^2$ .

### **Розв'язання поставленої задачі**

Для визначення похибки гіротеодоліта в усталеному режимі при дії випадкової вібрації визначимо математичне сподівання від першого рівняння системи (1):

$$M[\alpha(t)] = \frac{mgl}{H\omega_3 \cos \varphi_g (1 + \kappa)} (M[\gamma(t) \cdot n_x(t)] + M[\beta(t) \cdot n_z(t)]) \quad (3)$$

Відтак, вібраційна похибка буде пропорційна сумі кореляційних моментів, які визначають ступінь взаємозв'язку між проекціями перевантаження точки підвісу гіротеодоліту та коливаннями ЧЕ по кутах  $\beta$  і  $\gamma$ .

Розглянемо першу складову в дужках у правій частині виразу (3):

$$M[\gamma(t) \cdot n_x(t)] = \cos(\varepsilon + \psi_0) M[\gamma(t) \cdot n(t)] \quad (4)$$

З третього рівняння системи (1) отримуємо передатну функцію гіротеодоліту по куту  $\gamma$

$$W_\gamma(p) = \frac{\sin(\varepsilon + \psi_0)}{T_\gamma^2 p^2 + 2\xi_\gamma T_\gamma p + 1} \quad (5)$$

Отже, вихідна величина  $\gamma(t)$ , що характеризує коливання чутливого елемента відносно головної осі гіроскопа, буде корельованою із вхідною випадковою поступальною вібрацією  $n(t)$ . Для характеристики кореляційного зв'язку між  $\gamma(t)$  і  $n(t)$  введемо взаємну кореляційну функцію вихідного та вхідного сигналів

$$K_{\gamma n}(\tau) = M[\gamma(t) \cdot n(t + \tau)]. \quad (6)$$

Для лінійної стаціонарної системи, із передатною функцією (5), взаємну спектральну щільність вихідної та вхідної змінної можна визначити через співвідношення [4]

$$S_{\gamma n}(\omega) = W_\gamma(-j\omega) S_n(\omega),$$

де  $W_\gamma(-j\omega) = \frac{\sin(\varepsilon + \psi_0)}{-T_\gamma^2 \omega^2 - j2\xi_\gamma T_\gamma \omega + 1}$  – комплексно-спряжена частотна передатна функція.

Взаємна кореляційна функція  $K_{\gamma n}(\tau)$  визначається за відомою взаємною спектральною щільністю  $S_{\gamma n}(\omega)$

$$K_{\gamma n}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\gamma n}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\gamma(-j\omega) S_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7)$$

Якщо покласти в виразах (6), (7)  $\tau = 0$ , отримуємо

$$M[\gamma(t) \cdot n(t)] = \sin(\varepsilon + \psi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_n(\omega)}{-T_\gamma^2 \omega^2 - j2\xi_\gamma T_\gamma \omega + 1} d\omega.$$

Отже,

$$\begin{aligned} M[\gamma(t) \cdot n_x(t)] &= \frac{\sin 2(\varepsilon + \psi_0)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{-T_\gamma^2 \omega^2 - j2\xi_\gamma T_\gamma \omega + 1} \cdot \frac{2\mu_n \sigma_n^2}{\pi} \cdot \frac{b_n^2}{\omega^4 + 2a_n \omega^2 + b_n^4} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon + \psi_0) \frac{\omega_\gamma^2 (b_n^2 + \omega_\gamma^2 + 4\mu_n \mu_\gamma + 2a_n)}{(b_n^2 + \omega_\gamma^2 + 2\mu_n \mu_\gamma)^2 - 4\lambda_n^2 \omega_\gamma^2 (1 - \xi_\gamma^2)} \sigma_n^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\omega_\gamma = \frac{1}{T_\gamma}$  – власна частота по куту  $\gamma$ ,  $\mu_\gamma = \frac{\xi_\gamma}{T_\gamma}$  – коефіцієнт загасання коливань по куту  $\gamma$ .

Розглянемо другу складову в правій частині виразу (3)

$$M[\beta(t) \cdot n_Z(t)] = \sin(\varepsilon + \psi_0) M[\beta(t) \cdot n(t)]. \quad (9)$$

Для визначення кореляційного зв'язку між вхідним вібраційним перевантаженням  $n(t)$  та коливаннями ЧЕ гіротеодоліта з кута  $\beta(t)$  запишемо перші два рівняння з системи (1) у першому наближенні

$$\begin{cases} H\dot{\beta} + (F_{KC} + f_\alpha)\dot{\alpha} + H\omega_3 \cos \varphi_g (1 + \kappa) \cdot \alpha = 0 \\ -H\dot{\alpha} + f_\beta \dot{\beta} + mgl\beta = -mgl \cos(\varepsilon + \psi_0) \cdot n(t) \end{cases} \quad (10)$$

Звідки отримаємо передатну функцію

$$W_\beta(p) = \frac{\beta(p)}{n(p)} = \frac{-\cos(\varepsilon + \psi_0)(T_1 p + 1)}{T_{\alpha\beta}^2 p^2 + 2\xi_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} p + 1}, \text{ де } T_1 = \frac{F_{KC} + f_\alpha}{k_\alpha}, \xi_{\alpha\beta} = \frac{k_\alpha f_\beta + f_\beta \cdot mgl}{2T_{\alpha\beta}},$$

$$T_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{(F_{KC} + f_\alpha)f_\beta + H^2}{k_\alpha mgl}}, \quad k_\alpha = H\omega_3 \cos \varphi_g (1 + \kappa).$$

Внаслідок аналогічних міркувань, як для кореляційного зв'язку між  $n(t)$  і  $\gamma(t)$ , можна записати взаємну кореляційну функцію для вхідного перевантаження  $n(t)$  та кута  $\beta(t)$  як

$$K_{\beta n}(\tau) = M[\beta(t) \cdot n(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\beta n}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\beta(-j\omega) S_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Звідки при  $\tau = 0$ , отримуємо:

$$M[\beta(t) \cdot n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\beta(-j\omega) S_n(\omega) d\omega = -\cos(\varepsilon + \psi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-jT_1\omega + 1) S_n(\omega)}{-T_{\alpha\beta}^2 \omega^2 - j2\xi_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \omega + 1} d\omega.$$

Тоді,

$$M[\beta(t) \cdot n_Z(t)] = -\frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon + \psi_0) \frac{2d_1 b_n^2 (\mu_n + \mu_{\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta}^2 (\omega_{\alpha\beta}^2 + b_n^2 + 4\mu_n \mu_{\alpha\beta} + 2a_n)}{(b_n^2 + \omega_{\alpha\beta}^2 + 2\mu_n \mu_{\alpha\beta})^2 - 4\lambda_n^2 \omega_{\alpha\beta}^2 (1 - \xi_{\alpha\beta}^2)} \sigma_n^2, \quad (11)$$

де  $\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{T_{\alpha\beta}}$  – частота і  $\mu_{\alpha\beta} = \frac{\xi_{\alpha\beta}}{T_{\alpha\beta}}$  – коефіцієнт загасання прецесійних коливань.

Підставимо вирази (8) і (11) у рівняння (3):

$$M[\alpha(t)] = \frac{1}{2} \frac{mgl \cdot \sigma_n^2}{H\omega_3 \cos \varphi_g (1 + \kappa)} (N_\gamma + N_\beta) \sin 2(\varepsilon + \psi_0), \quad (12)$$

$$\text{де } N_{\gamma} = \frac{\omega_{\gamma}^2 (b_n^2 + \omega_{\gamma}^2 + 4\mu_n \mu_{\gamma} + 2a_n)}{(b_n^2 + \omega_{\gamma}^2 + 2\mu_n \mu_{\gamma})^2 - 4\lambda_n^2 \omega_{\gamma}^2 (1 - \xi_{\gamma}^2)},$$

$$N_{\beta} = -\frac{2T_1 b_n^2 (\mu_n + \mu_{\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta}^2 (\omega_{\alpha\beta}^2 + b_n^2 + 4\mu_n \mu_{\alpha\beta} + 2a_n)}{(b_n^2 + \omega_{\alpha\beta}^2 + 2\mu_n \mu_{\alpha\beta})^2 - 4\lambda_n^2 \omega_{\alpha\beta}^2 (1 - \xi_{\alpha\beta}^2)}.$$

Отже, математичне сподівання вібраційної похибки гіротеодоліту при випадковій вібрації  $M[\alpha(t)]$  буде залежати від багатьох чинників. По-перше, за аналогією з регулярною вібрацією, середнє значення залежатиме від напрямку поступальної випадкової вібрації, і буде досягати максимуму при  $\varepsilon + \psi_0 = 45^\circ$ . По-друге, математичне сподівання  $M[\alpha(t)]$  залежатиме від дисперсії амплітуди перевантаження  $\sigma_n^2$ , аналогічно квадрату амплітуди регулярної вібрації. Нарешті, воно буде також залежати від переважаючої частоти та ступеня нерегулярності вхідної випадкової вібрації, а також від характеристик гіротеодоліту, як динамічної системи. Слід зауважити, що при розрахунку похибки на практиці в більшості випадків можна знехтувати складовою  $N_{\beta}$  у порівнянні з  $N_{\gamma}$ , оскільки вони відрізняються на два порядки, при переважаючій частоті випадкової вібрації  $\lambda_n$  більше 1 Гц.

### Моделювання динаміки гіротеодоліту при дії випадкової вібрації

При моделюванні динаміки гіротеодоліту за умов випадкової вібрації, перш за все необхідно сформулювати випадковий процес  $n(t)$ , який має нульове середнє значення та кореляційну функцію, що описується виразом (2). У нашому випадку використаємо формувальний фільтр, який описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 n(t)}{dt^2} + 2\mu_n \frac{dn(t)}{dt} + b_n^2 n(t) = \sqrt{\frac{2\mu_n b_n^2}{\pi}} \sigma_{\zeta} \zeta(t), \quad (13)$$

де  $\sigma_{\zeta}$  - середнє квадратичне відхилення білого шуму  $\zeta(t)$ .

При моделюванні використовуватимемо систему рівнянь (1), яка доповнена рівнянням формувального фільтру (13). Результати моделювання динаміки гіротеодоліту представлені на рис. 1. Параметри приладу:  $H = 0.4$  Нмс,  $m = 1$  кг,  $l = 0.08$  м,  $f_{\alpha} = 0.005$  Нмс,  $f_{\beta} = 0$ ,  $T_{\gamma} = 0.1$  с,  $\xi_{\gamma} = 0$ ,  $\kappa = 0$ . Параметри руху основи:  $\psi_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 45^\circ$ ,  $\lambda_n = 5$  с<sup>-1</sup>,  $\sigma_n = 0.0014$ ,  $\xi_n = 0.01$ . Розраховане середнє значення вібраційної похибки за формулою (12):

$$M[\alpha(t)] = 2.1^\circ.$$

Із поданого графіку видно, що розраховані значення вібраційної похибки повністю відповідають отриманим в результаті моделювання процесам  $\alpha(t)$  на виході гіротеодоліту.

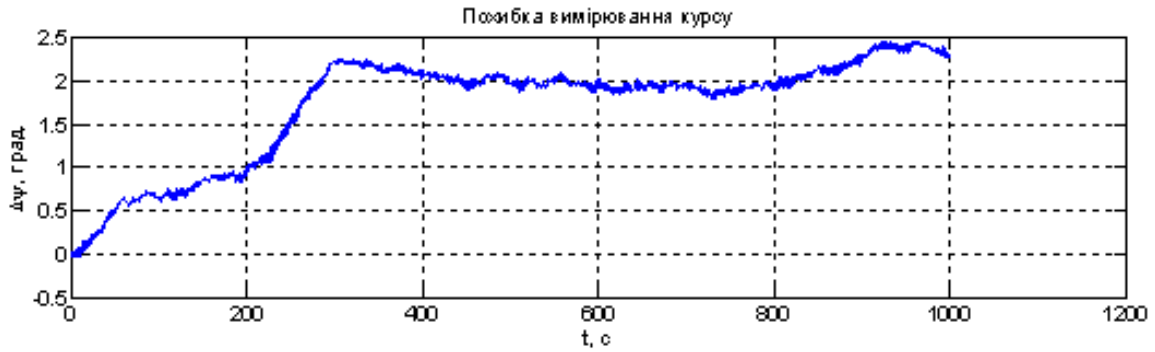


Рис. 1. Моделювання динаміки гіротеодоліту при випадковій вібрації.

Отже, формула (12) може використовуватись для розрахунків при відомих параметрах приладу і характеристиках вібрації – напрямку, середньому квадратичному відхиленні, переважаючій частоті та нерегулярності вібрації.

Як показано в роботі [3], постійну складову вібраційної похибки можливо суттєво зменшити, використовуючи алгоритмічну компенсацію, що основана на використанні залежності

$$\sin\langle\alpha\rangle = \frac{\langle\dot{\alpha}\gamma\rangle}{\omega_3 \cos\varphi_g}. \quad (14)$$

Відповідно, можна також провести моделювання алгоритмічної компенсації вібраційної похибки з використанням формули (14). Результати такого моделювання представлені на рис. 2.

Параметри приладу:  $H = 0.4$  Нмс,  $m = 1$  кг,  $l = 0.08$  м,  $f_\alpha = 0.005$  Нмс,  $f_\beta = 0$ ,  $T_\gamma = 0.1$  с,  $\xi_\gamma = 0$ ,  $\kappa = 50$ . Параметри руху основи:  $\psi_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 45^\circ$ ,  $\lambda_n = 5$  с<sup>-1</sup>,  $\sigma_n = 0.0038$ ,  $\xi_n = 0.01$ . Розраховане середнє значення вібраційної похибки за формулою (12)

$$M[\alpha(t)] = 14.5^\circ.$$

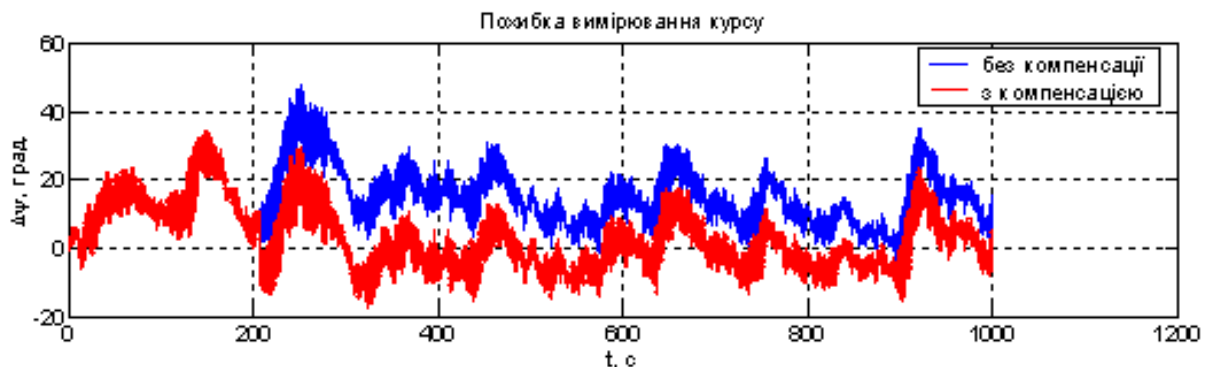


Рис. 2. Моделювання алгоритмічної компенсації.

Проведені програмні експерименти свідчать про те, що процес алгоритмічної компенсації вібраційної похибки гіротеодоліту при випадковій вібрації основи призводить до виключення більшої частини постійної складової  $M[\alpha(t)]$ , аналогічно до випадку регулярної вібрації.

### **Висновки**

При випадковій вібрації основи середня похибка гіротеодоліту описується виразом, за формою аналогічним виразу вібраційної похибки за умов регулярної вібрації. Основними чинниками, що впливають на середнє значення похибки, є напрямок вібрації, середнє квадратичне відхилення амплітуди вібраційного перевантаження, а також переважаюча частота та коефіцієнт нерегулярності вібрації. Аналіз виразу  $M[\alpha(t)]$  також свідчить про те, що зміна динамічних характеристик гіротеодоліту з кута  $\gamma$ , зокрема введення керування, може привести до зменшення середнього значення вібраційної похибки.

Як показали результати моделювання, отримана залежність для  $M[\alpha(t)]$  може використовуватись для практичних розрахунків. Показана можливість алгоритмічної компенсації постійної складової вібраційної похибки.

Окрім середнього значення вібраційної похибки на точність гіротеодоліту також впливає амплітуда коливань ЧЕ в азимуті, яку при випадковій вібрації основи можна охарактеризувати середнім квадратичним відхиленням  $\sigma_\alpha$ , або дисперсією  $D[\alpha(t)] = \sigma_\alpha^2$ . Подальші дослідження можуть бути спрямовані на визначення шляхів зменшення дисперсії коливань чутливого елемента, наприклад за допомогою фільтру Калмана.

### **Література**

1. Лазарев Ю. Ф. О погрешностях гироскопа в компенсационном режиме при поступательной вибрации точки подвеса / Ю. Ф. Лазарев, П.С. Мироненко, Г.В. Литовко // Вестник КПИ. Приборостроение. – 1982. – Вып. 12. – С. 26 – 28.
2. Лазарев Ю. Ф. Обобщенная форма представления систематической погрешности наземного гироскопа, обусловленной вибрацией / Ю. Ф. Лазарев, П.С. Мироненко // Механика гироскопических систем. – 1987. – Вып. 6. – С. 23 – 27.
3. Мураховский С.А. Динамика наземного компенсационного маятникового гироскопа / С.А. Мураховский, Ю. Ф. Лазарев, П.С. Мироненко // Вісник Інженерної академії України. – 2010. – Вип. 2. – С. 125 – 130.
4. Ривкин С.С. Статистический синтез гироскопических устройств – Л.: Судостроение, 1970. – 422 с.

*Надійшла до редакції  
1 лютого 2013 року*

© Мураховський С. А., 2013