

**ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОМЕРНОЙ  
ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ПОЛУКАУЗАЛЬНОЙ  
И НЕКАУЗАЛЬНОЙ ОБРАБОТКЕ ГАУССОВСКИХ  
ОДНОРОДНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

*Вишневый С.В., аспирант*

*Жук С.Я., д.т.н., профессор*

*Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина*

Методы оптимальной двумерной фильтрации изображений характеризуются огромными вычислительными затратами, что часто делает невозможной их практическую реализацию на ЭВМ. Актуальным является синтез алгоритмов фильтрации, преодолевающие отмеченные трудности.

В [1] разработан подход, основанный на предположении независимости вероятностных характеристик изображения вдоль каждой из его координат, в соответствии с которым фильтрация изображения разделяется на два этапа. На первом этапе выполняется оптимальная одномерная фильтрация изображения соответственно по строкам и столбцам. На втором этапе производится объединение полученных одномерных оценок в каждой точке изображения. В [2] разработан алгоритм объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации, который относится к классу каузальных алгоритмов, и позволяет устранить некоторую избыточность, присущую подходу в [1].

Целью статьи является разработка алгоритмов, которые в отличие от [2], при фильтрации изображений используют дополнительные наблюдения, находящиеся в векторах, сформированных из элементов, расположенных от конца строки и столбца до текущего обрабатываемого отсчета изображения. Учет дополнительных данных позволяет рассматривать фильтрацию изображений как полукаузальную и некаузальную.

**Теоретическое обоснование**

Изображение, схематически представленное на рис.1, записывается в виде матрицы, состоящей из элементов  $x(n, m)$ , которые соответствуют значениям яркости пикселей изображения; искаженные помехой наблюдения, обозначим  $y(n, m)$ , где  $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

Обозначим текущую обрабатываемую точку изображения  $x(n, m)$ . Введем векторы  $X_{n1} = (x(n, 1), \dots, x(n, m-1))$ ,  $X_{m1} = (x(1, m), \dots, x(n-1, m))$ ,  $X_{n2} = (x(n, M), x(n, M-1), \dots, x(n, m+1))$ ,  $X_{m2} = (x(N, m), x(N-1, m), \dots, x(n+1, m))$ , которые содержат элементы изображения согласно рис.1.

Вектори  $X_{n1}$ ,  $X_{m1}$ ,  $X_{n2}$ ,  $X_{m2}$  не включають в себе текущу оброблювану точку  $x(n, m)$ . Векторам  $X_{n1}$ ,  $X_{m1}$ ,  $X_{n2}$ ,  $X_{m2}$  відповідають спостереження  $Y_{n1}$ ,  $Y_{m1}$ ,  $Y_{n2}$ ,  $Y_{m2}$ , а поточною точкою  $x(n, m)$  відповідає поточне спостереження  $y(n, m)$ .

Використання даних, що містяться в векторах  $X_{n1}$ ,  $X_{m1}$ ,  $X_{n2}$  при формуванні оцінки в точці  $x(n, m)$ , що лежить на їх перетині, дозволяє розглядати фільтрацію як напівкаузальну, а використання додаткових даних, що містяться в векторі  $X_{m2}$ , робить обробку зображення некаузальною. Далі для краткості опустимо аргументи  $(n, m)$ .

Згідно методики [1, 2] вираження для знаходження апостеріорної густоти ймовірності  $p(x/Y)$  відліку зображення  $x$  при некаузальній фільтрації можна представити в такій формі:

$$p(x/Y) = \frac{1}{p^3(x)} p(x/Y_{n1}, y) p(x/Y_{m1}) p(x/Y_{n2}) p(x/Y_{m2}) \times \frac{P(Y_{n1}, y) P(Y_{m1}) P(Y_{n2}) P(Y_{m2})}{P(Y)}, \quad (1)$$

де  $p(x/Y_{n1}, y)$  – апостеріорна густина ймовірності поточною оброблюваною точкою, що обчислюється на першому етапі при одновимірній каузальній фільтрації спостережень  $(Y_{n1}, y)$ , де  $y$  – поточне спостереження;  $p(x/Y_{m1})$ ,  $p(x/Y_{n2})$ ,  $p(x/Y_{m2})$  – екстрапольовані густоти ймовірності поточною оброблюваною точкою, що обчислюються на першому етапі при одновимірній каузальній фільтрації спостережень  $Y_{m1}$ ,  $Y_{n2}$  і  $Y_{m2}$  відповідно.

Вираження для обчислення апостеріорної густоти ймовірності  $p(x/Y)$  при напівкаузальній фільтрації має вигляд:

$$p(x/Y) = \frac{1}{p^2(x)} p(x/Y_{n1}, y) p(x/Y_{m1}) p(x/Y_{n2}) \frac{P(Y_{n1}, y) P(Y_{m1}) P(Y_{n2})}{P(Y)}, \quad (2)$$

де для випадку напівкаузальної фільтрації вектор  $Y$  містить  $y$ ,  $Y_{n1}$ ,  $Y_{m1}$ ,  $Y_{n2}$ .

При розв'язанні задачі оптимальної фільтрації широко використовуються випадкові гауссові поля. З метою скорочення об'ємів позначень і не знижуючи загальної розуміння будемо припускати, що гауссове поле є розділимим і описується кореляційною функцією

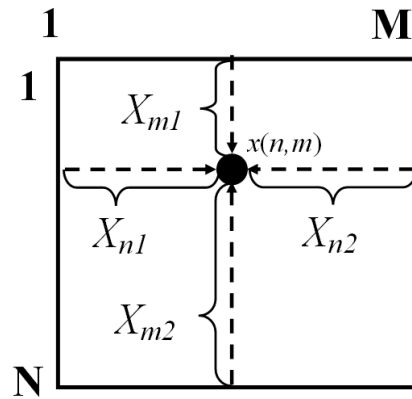


Рис. 1.

$R(\Delta_1, \Delta_2) = \bar{\sigma}^2 \rho_1^{|\Delta_1|} \rho_2^{|\Delta_2|}$ . Рассмотрим вначале случай некаузальной фильтрации, когда плотности вероятности, входящие в выражение (1) будут гауссовскими

$$p(x/Y_{n1}, y) = N(\hat{x}_{n1}, \hat{\sigma}_{n1}^2), \quad p(x/Y_{m1}) = N(x_{m1}^*, \sigma_{m1}^{*2}),$$

$$p(x/Y_{n2}) = N(x_{n2}^*, \sigma_{n2}^{*2}), \quad p(x/Y_{m2}) = N(x_{m2}^*, \sigma_{m2}^{*2}), \quad p(x) = N(\bar{x}, \bar{\sigma}^2).$$

На первом этапе алгоритма объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при некаузальной обработке однородного изображения осуществляется одномерная каузальная калмановская фильтрация вдоль каждой из координат изображения. Одномерная каузальная калмановская фильтрация наблюдений  $(Y_{n1}, y)$  строки изображения описывается выражениями [3]:

$$x_{n1}^*(k, l) = \rho_1 \hat{x}_{n1}(k, l-1); \tag{3}$$

$$\sigma_{n1}^{*2}(k, l) = \rho_1^2 \hat{\sigma}_{n1}^2(k, l-1) + G_1^2; \tag{4}$$

$$K(k, l) = \sigma_{n1}^{*2}(k, l) / (\sigma_{n1}^{*2}(k, l) + R); \tag{5}$$

$$\hat{\sigma}_{n1}^2(k, l) = \sigma_{n1}^{*2}(k, l) - K(k, l) \sigma_{n1}^{*2}(k, l); \tag{6}$$

$$\hat{x}_{n1}(k, l) = x_{n1}^*(k, l) + K(k, l) (y(k, l) - m_y - x_{n1}^*(k, l)), \tag{7}$$

где  $x_{n1}^*(k, l)$ ,  $\hat{x}_{n1}(k, l)$  – экстраполированная и апостериорная оценки;  $\rho_1$  – коэффициент корреляции элементов строки изображения;  $\sigma_{n1}^{*2}(k, l)$ ,  $\hat{\sigma}_{n1}^2(k, l)$  – экстраполированная и апостериорная дисперсии ошибки оценок;  $K(k, l)$  – коэффициент усиления одномерного фильтра Калмана;  $R$  – дисперсия ошибки наблюдения;  $y(k, l)$  – наблюдение случайного поля;  $m_y$  – математическое ожидание случайного поля;  $G_1 = \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho_1^2}$ ;  $\bar{\sigma}$  – СКО случайного поля. Одномерная каузальная калмановская фильтрация наблюдений  $Y_{m1}$ ,  $Y_{n2}$  и  $Y_{m2}$  вдоль остальных координат осуществляется таким же образом с помощью выражений аналогичных (3)-(7).

Поскольку плотности вероятностей в правой части выражения (1) являются гауссовскими, поэтому плотность вероятности  $p(x/Y)$  также будет гауссовской и имеет вид:

$$p(x/Y) = C \exp\left(-\frac{(x - \ddot{x})^2}{2\ddot{\sigma}^2}\right), \tag{8}$$

где  $C$  является константой, а  $p(x/Y) = N(\ddot{x}, \ddot{\sigma}^2)$ .

Приравнивая коэффициенты при  $x$  и  $x^2$  в выражениях (1) и (8) получим выражения для нахождения искомых оценок.

Таким образом, вычисление оценок на втором этапе для текущей обрабатываемой точки изображения при некаузальной фильтрации осуществ-

ляється с помощью выражений:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma_{m1}^{*2} - \sigma_{m1}^{*4} / (\hat{\sigma}_{n1}^2 + \sigma_{m1}^{*2}); \quad (9) \quad \sigma'^2 = -\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4 / (\check{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2); \quad (15)$$

$$\tilde{x} = \hat{x}_{n1} + (x_{m1}^* - \hat{x}_{n1}) \tilde{\sigma}^2 / \sigma_{m1}^{*2}; \quad (10) \quad x' = \check{x} - (\bar{x} - \check{x}) \sigma'^2 / \bar{\sigma}^2; \quad (16)$$

$$\check{\sigma}^2 = -\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4 / (\tilde{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2); \quad (11) \quad \sigma''^2 = \sigma_{m2}^{*2} - \sigma_{m2}^{*4} / (\sigma'^2 + \sigma_{m2}^{*2}); \quad (17)$$

$$\check{x} = \tilde{x} - (\bar{x} - \tilde{x}) \check{\sigma}^2 / \bar{\sigma}^2; \quad (12) \quad x'' = x' + (x_{m2}^* - x') \sigma''^2 / \sigma_{m2}^{*2}; \quad (18)$$

$$\check{\check{\sigma}}^2 = \sigma_{n2}^{*2} - \sigma_{n2}^{*4} / (\check{\sigma}^2 + \sigma_{n2}^{*2}); \quad (13) \quad \check{\check{\sigma}}^2 = -\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4 / (\sigma''^2 - \bar{\sigma}^2); \quad (19)$$

$$\check{\check{x}} = \check{x} + (x_{n2}^* - \check{x}) \check{\check{\sigma}}^2 / \sigma_{n2}^{*2}; \quad (14) \quad \check{\check{x}} = x'' - (\bar{x} - x'') \check{\check{\sigma}}^2 / \bar{\sigma}^2, \quad (20)$$

где  $\hat{x}_{n1}$ ,  $\hat{\sigma}_{n1}^2$  – апостериорные оценка и дисперсия ошибки оценки, рассчитанные для текущей обрабатываемой точки изображения на первом этапе при одномерной каузальной фильтрации наблюдений  $(Y_{n1}, y)$ , при этом  $y$  – наблюдение, соответствующее текущей обрабатываемой точке;  $x_{m1}^*$ ,  $\sigma_{m1}^{*2}$ ,  $x_{n2}^*$ ,  $\sigma_{n2}^{*2}$ ,  $x_{m2}^*$ ,  $\sigma_{m2}^{*2}$  – экстраполированные оценки и дисперсии ошибок оценок, рассчитанные для текущей обрабатываемой точки изображения на первом этапе при одномерной каузальной фильтрации наблюдений соответственно  $Y_{m1}$ ,  $Y_{n2}$  и  $Y_{m2}$ ;  $\bar{x}$ ,  $\bar{\sigma}^2$  – математическое ожидание и дисперсия случайного поля, заданные априорно;  $\check{x}$ ,  $\check{\sigma}^2$  – оценка и дисперсия ошибки оценки, рассчитанные с помощью алгоритма некаузальной фильтрации на втором этапе.

Выражения (9)-(20) описывают вычисления оценки  $\check{\check{x}}$  и дисперсии ошибки оценки  $\check{\check{\sigma}}^2$  для алгоритма объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при некаузальной обработке однородного изображения.

Алгоритм объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при полукаузальной обработке однородного изображения описывается с помощью выражений (9)-(16) и позволяет вычислить оценку  $x'$  и дисперсию ошибки оценки  $\sigma'^2$  в каждой точке изображения.

Для разработанных алгоритмов, при вычислении оценок в каждой точке изображения, на втором этапе используются апостериорные оценки, рассчитанные на первом этапе при фильтрации наблюдений  $(Y_{n1}, y)$ , а также экстраполированные оценки, вычисленные на первом этапе при фильтрации остальных наблюдений. При этом, в отличие от [1], не требуется вычислять дополнительные предварительные оценки рассматриваемой точки по всем полученным измерениям  $(Y_{n1}, y, Y_{n2})$ ,  $(Y_{m1}, y, Y_{m2})$  на рассматрива-

емых строке и столбце изображения соответственно, а также выполнять одноточечную фильтрацию в каждой точке изображения.

### Результаты экспериментальных исследований

Анализ разработанных двухэтапных алгоритмов полукаузальной и некаузальной фильтрации однородных гауссовских изображений проведен на модельном примере с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

Обрабатываемое изображение описывается гауссовским случайным полем с разделимой корреляционной функцией вида [2]:

$$R(\Delta_1, \Delta_2) = \bar{\sigma}^2 \rho_1^{|\Delta_1|} \rho_2^{|\Delta_2|},$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  - приращения в горизонтальном и вертикальном направлении соответственно;  $\rho_1, \rho_2$  - коэффициенты корреляции элементов строк и столбцов соответственно;  $\bar{\sigma}^2$  - дисперсия случайного поля.

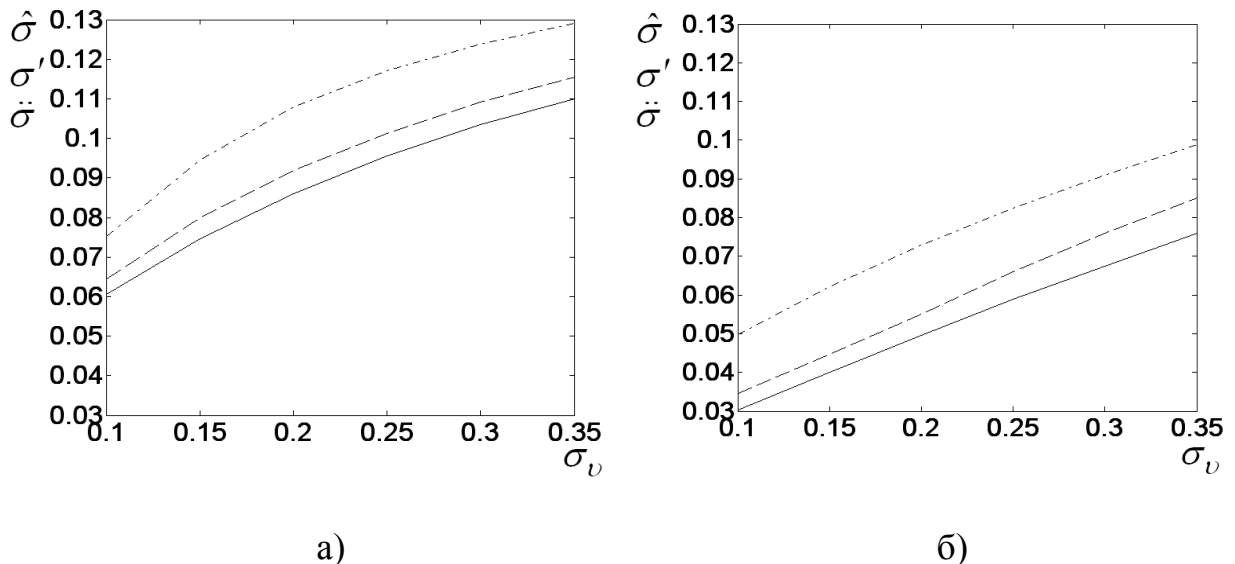


Рис.2

На рис.2.а показаны СКО ошибки оценки  $\hat{\sigma}$  (штрих-пунктирная линия), вычисленные с помощью одномерной каузальной калмановской фильтрации, а также СКО ошибки оценки, вычисленные разработанным алгоритмом при полукаузальной фильтрации  $\sigma'$  (пунктирная линия), и СКО ошибки оценки  $\tilde{\sigma}$  (сплошная линия), рассчитанные разработанным алгоритмом при некаузальной фильтрации в зависимости от СКО помехи  $\sigma_v$ , при фильтрации однородного изображения с СКО  $\bar{\sigma} = 0.15$  и коэффициентами корреляции  $\rho_1 = \rho_2 = 0.75$ . На рис.2.б показаны аналогичные характеристики для случая, когда  $\rho_1 = \rho_2 = 0.98$ .

### Выводы

Разработаны алгоритмы объединения результатов одномерной оптима-

льной фильтрации при полукаузальной и некаузальной обработке однородных гауссовских изображений. В отличие от алгоритмов объединения данных при некаузальной и полукаузальной обработке гауссовских изображений, полученных в [1], не требуется вычислять дополнительные предварительные оценки рассматриваемой точки по всем полученным измерениям  $(Y_{n1}, y, Y_{n2})$ ,  $(Y_{m1}, y, Y_{m2})$  на рассматриваемых строке и столбце изображения соответственно, а также выполнять одноточечную фильтрацию в каждой точке изображения.

Для рассмотренных примеров алгоритм объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при полукаузальной обработке однородных гауссовских изображений позволяет повысить точность рассчитанных оценок на 10%–30% по сравнению с одномерной калмановской фильтрацией. Точность оценок, вычисляемых с помощью алгоритма объединения при некаузальной обработке однородных изображений выше по сравнению с одномерной калмановской фильтрацией на 15%–39%. Разработанные алгоритмы позволяют получить существенное увеличение точности фильтрации однородных гауссовских изображений по сравнению с одномерным методом при незначительном усложнении вычислительных процедур.

#### Литература

1. Грузман И.С., Микерин В.И., Спектор А.А. Двухэтапная фильтрация изображений на основе использования ограниченных данных. // Радиотехника и электроника. – 1995. – Вып. – 5. – С.817–822.
2. Вишневий С.В., Жук С.Я. Алгоритм объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при обработке изображений. // Вісник НТУУ "КПІ" Серія – Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – Вип. – 40. – С.55–60.
3. Жук С.Я. Методы оптимизации дискретных динамических систем со случайной структурой / Монография. К.: НТУУ «КПИ», 2008. – 232с.

*Вишневий С.В., Жук С.Я. Об'єднання результатів одномірної оптимальної фільтрації при напівкаузальній та некаузальній обробці гаусовських однорідних зображень. Синтезовано лінійні алгоритми об'єднання результатів одномірної оптимальної фільтрації при напівкаузальній та некаузальній обробці гаусовських однорідних зображень. Розроблені алгоритми реалізуються в два етапи. На першому етапі виконується одномірна калманівська фільтрація спостережень гаусовського однорідного зображення вздовж кожної із координат, що приймаються до розгляду. На другому етапі виконується об'єднання оцінок, які розраховуються на першому етапі. Аналіз розроблених алгоритмів виконаний на модельному прикладі за допомогою статистичного моделювання на ЕОМ. Проведено порівняння розроблених алгоритмів з відомими алгоритмами. Приведені характеристики точності оцінок, які обчислюються за допомогою розроблених алгоритмів при напівкаузальній та некаузальній обробці гаусовських однорідних зображень.*

**Ключові слова:** напівкаузальна фільтрація зображень, некаузальна фільтрація зображень, об'єднання оцінок, випадкове поле.

*Вишневый С.В., Жук С.Я. Объединение результатов одномерной оптимальной фильтрации при полукаузальной и некаузальной обработке гауссовских однородных изображений. Синтезированы линейные алгоритмы объединения результатов одномерной оптимальной фильтрации при полукаузальной и некаузальной обработке гауссовских однородных изображений. Разработанные алгоритмы реализуются в два этапа. На первом этапе выполняется одномерная калмановская фильтрация наблюдений вдоль каждой из рассматриваемых координат гауссовского однородного изображения. На втором этапе производится объединение оценок, рассчитанных на первом этапе. Анализ разработанных алгоритмов проведен на модельном примере с помощью статистического моделирования на ЭВМ. Проводится сравнение разработанных алгоритмов с известными алгоритмами. Приведены характеристики точности оценок, рассчитанные с помощью разработанных алгоритмов при полукаузальной и некаузальной обработке гауссовских однородных изображений.*

**Ключевые слова:** полукаузальная фильтрация изображений, некаузальная фильтрация изображений, объединение оценок, случайное поле.

*Vishnevyy S.V., Zhuk S.Ya. Uniting of one-dimensional optimal filtering outcomes for semicausal and noncausal processing of Gaussian uniform images. Linear algorithms of uniting of one-dimensional optimal filtering outcomes for semicausal and noncausal processing of Gaussian uniform images are synthesized. Designed algorithms are implemented in two stages. At the first stage the one-dimensional Kalman filtering of Gaussian uniform image observations along each of considered coordinates is executed. At the second stage uniting of computed at the first stage estimations is executed. Analysis of designed algorithms is done on the model example by means of statistical modeling on computer. Comparing of designed algorithm with known algorithms is carried out. Characteristics of accuracy of estimations computed by designed algorithms by means of semicausal and noncausal processing of Gaussian uniform images are shown.*

**Key words:** semicausal filtering of images, noncausal filtering of images, uniting of estimations, random field.