
ТЕОРІЯ ТА ЗАСОБИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

УДК 621.396.26

ПРОСТА НИЖНЯ ГРАНИЦЯ ОЦІНКИ КІЛЬКОСТІ ПЕРЕВІРОЧНИХ СИМВОЛІВ У БЛОКОВИХ КОДАХ

Цурко Д.Ю., магістрант

Старков М.О., к.т.н.

Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

Вступ

Передача інформації реальними каналами зв'язку завжди супроводжується певним спотворенням через наявність шумів, від яких позбутися принципово неможливо. Це призводить до того, що при передачі сигналів у малопотужних системах зв'язку або на великі відстані (супутниковий зв'язок), або при значному рівні потужності шуму (наявність прицільної завади) вірогідність появи помилки у повідомленні суттєво зростає. Для подолання цієї проблеми можна збільшити рівень потужності сигналу (тим самим збільшити відношення сигнал/завада) або додати символи, за допомогою яких можна покращити якість зв'язку. Кожен такий символ несе інформацію про певну групу інформаційних символів. Вони називаються перевірочними і відображають унікальності кожній частині інформації, до якої вони були застосовані [1]. Отже, кодування є незамінною операцією для передачі інформації, у випадку коли збільшення потужності корисного сигналу неможливе або невигідне. Дана операція завжди супроводжується зменшенням швидкості передачі каналом зв'язку [2].

Постановка задачі

Задачею теорії оптимального кодування є пошук ефективних кодів та різноманітних кодових границь (Хеммінга, Плоткіна, Гілберта тощо) [3]. Границі використовують для порівняння кодів, а також, щоб показати, наскільки даний код близький до оптимального. Проте зазвичай пошук точної границі є громіздкою операцією. Для швидкої оцінки необхідного числа перевірочних символів при заданій кількості виправлення бітових помилок такі границі не є зручними. Метою даної статті є вивід простої нижньої границі і порівняння реальних блокових кодів з нею

Теоретичні викладки

На базі нижньої границі Плоткіна (1) знайдемо спрощену нижню границю коду (мінімального числа надлишкових символів, які здатні виявити та виправити задану кількість можливих помилок у блочних кодах).

$$\frac{m \cdot d_{\min} - 1}{m - 1} - 1 - \log_2 d_{\min} \leq n - k, \quad (1)$$

де m – довжина алфавіту, n – загальна кількість символів блоку, k – кількість інформаційних символів даного блоку, d_{min} – мінімальна кодова відстань.

Для двійкового коду ($m=2$) дана нерівність матиме вигляд:

$$2 \cdot d_{min} - 2 - \log_2 d_{min} \leq n - k$$

або

$$\frac{d_{min}}{n} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 d_{min}}{d_{min}} \right) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} (1 - R),$$

де $R = k/n$ - інформаційна ємність повідомлення.

Виконаємо граничний перехід $n \rightarrow \infty$ за умови $\frac{d_{min}}{n} \leq 1$, тоді

$$\frac{d_{min}}{n} \leq \frac{1}{2} (1 - R) \quad \text{або} \quad d_{min} \leq \frac{1}{2} (n - k)$$

Оскільки $t_{випр} \leq \frac{d_{min}-1}{2} < \frac{d_{min}}{2}$ то отримаємо просту границю кількості перевірочних символів при блоковому кодуванні:

$$t_{випр} < \frac{1}{4} (n - k) \quad \text{або} \quad k > n - 4 \cdot t_{випр}$$

З приведених математичних співвідношень видно, що для виявлення і виправлення одного помилкового символу інформаційної послідовності необхідно додати не менше 4-х перевірочних.

Результати експериментальних досліджень

Проведемо порівняння даних результатів з реальними кодами. Для цього скористаємося таблицею БЧХ кодів (15, 31, 63, 127, 255) [4] і побудуємо графік, який демонструє відношення реальної кількості перевірочних символів ($n - k$) до значення перевірочних символів, кількість яких визначається знайденою простою границею. максимальної кількості помилок, що можуть бути виправлені ($t_{випр}$) (рис.1).

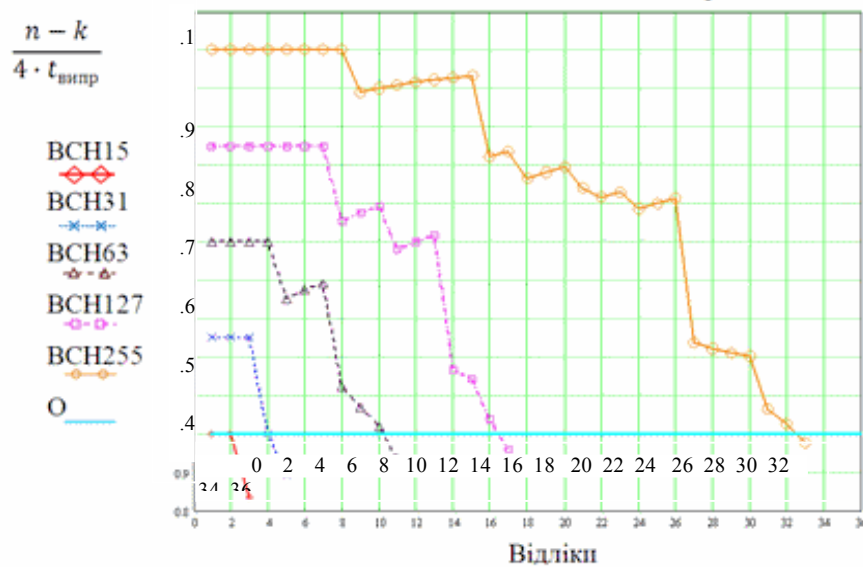


Рис.1. Порівняння БЧХ кодів різної довжини в залежності від кількості перевірочних символів та знайденої простої нижньої границі

Даний графік показує, що при збільшенні перевірочних символів відбувається покращення характеристик коду. Також на графіку вказана границя (O). У цьому випадку її нормоване значення дорівнює 1. Видно, що досягнення границі можливе лише тоді, коли кількість перевірочних символів значно перевищує кількість інформаційних, відбувається перехід встановленої границі (наприклад БЧХ (255;9) або (127;8), які здатні виправити 63 та 31 помилки відповідно). Проте, з урахуванням того, що швидкість передачі інформації відіграє дуже важливу роль, на практиці такі коди не застосовуються.

Для більш швидких кодів (які й здебільшого й використовуються у реальних системах зв'язку) дана оцінка має місце. За рахунок внесення певних припущень вказана границя не є суворою. Та через свою простоту та близькість до точної, може бути використана для спрощення інженерних розрахунків при розробці телекомунікаційної системи.

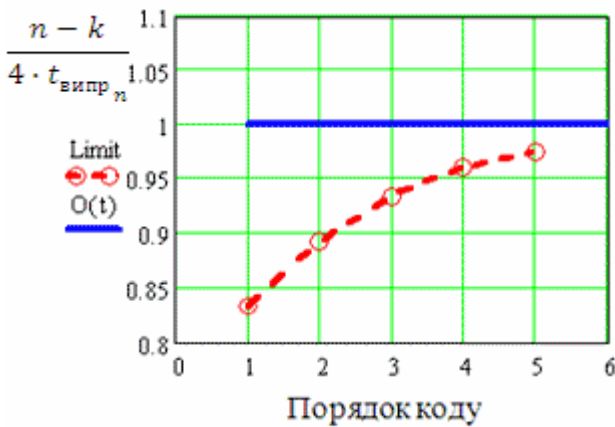


Рис.2. Зростання точності простої нижньої границі в залежності від порядку коду.

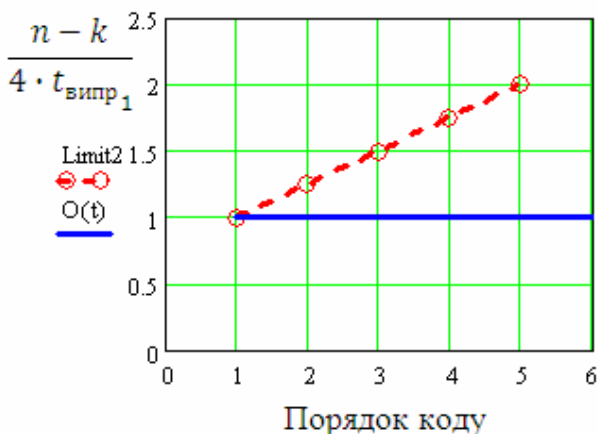


Рис.3. Спадання точності простої нижньої границі в залежності від порядку коду.

Покажемо наскільки точною є знайдена границя. Побудуємо графік відношення $\frac{n-k}{4 \cdot t}$ кодів з максимальною кількістю виправлення помилок в залежності від порядку кода (рис.2). З вигляду даної залежності можна зробити висновок, що при збільшенні довжини блоку, зменшується різниця між теоретичними і реальними значеннями. Найбільша похибка у коді БЧХ (15;5) і складає 17%, а для найкращого – 2.4% (БЧХ (255;9)).

Розглянемо блокові коди різної довжини, які знаходять і виправляють одну символну помилку. Побудуємо графік (рис.3) відношення як і у попередньому випадку, тільки для випадку однієї допустимої помилки. З отриманих результатів видно, що при зростанні довжини кода його необхідна кількість перевірочних символів все більше відрізняється від кількості, передбачених отриманою простою границею. Слід додати, що для блоку довжини 15, дійсна кількість

перевірочних символів співпадає з оціночним. Після цього, кількість реальних перевірочних символів по відношенню до оціночних лінійно зростає. Все це говорить про те, що отримана спрощена границя дає правильні граничні значення майже в усіх випадках (за виключенням максимальної кількості перевірочних символів), а оціночні лише у певній області. Чим більше помилок знайти і виправити може код, тим ближче кількість перевірочних символів реального коду наближається до оціночних значень. Це пояснюється тим, що елементи більш захищених кодів мають більше взаємозв'язків між собою.

Подальший аналіз даних БЧХ кодів та порівняння їх параметрів з оцінкою, приходимо до висновку,

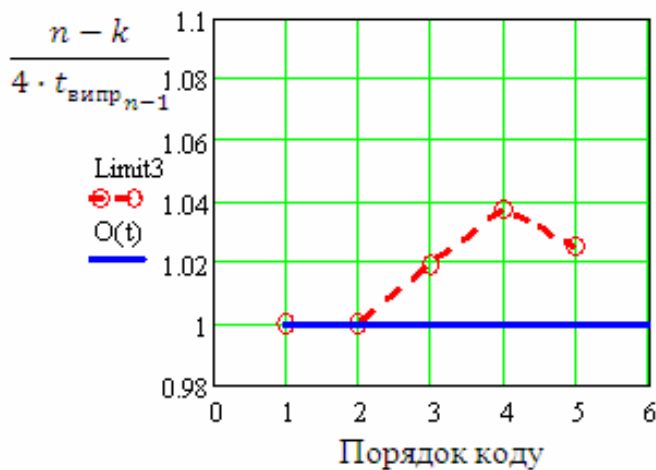


Рис.4. Залежність кількості перевірочних символів до кількості помилок, які можуть бути виправлені та для реальних кодів та проста нижня границя

що найкращі результати спрощена оцінка має при передостанньому значенні кількості помилок, які можуть бути виправлені $t_{\text{випр}_{n-1}}$, де n – відповідає порядковому номеру відліку з максимальним значенням помилок, що можуть бути виправлені (рис.4). Даний графік показує, що найбільше відхилення від оціночного значення досягається у коді БЧХ (127;15) і складає 3.7%. Це говорить про значну точність оцінки у даній області

Висновки

Враховуючи те, що характеристики кода при збільшенні довжини блоку покращуються, то можливість застосування введеної границі для всіх значень лише до відносно довгих послідовностей (границю точності у 90 % подолали коди з $n = 63, 127, 255$) є виправданою, оскільки на практиці короткі блокові послідовності не використовуються. Все це говорить про дійсну можливість застосування знайденої границі для інженерних розрахунків. Використання даної границі у якості оцінки кількості перевірочних символів для блокових кодів у швидкісних системах передачі неможливе через значну похибку. Проте, із ростом кількості перевірочних символів, різниця між оціночними та реальними значеннями прямує до нуля. Це говорить, що для оціночні значення є справедливим лише для більш захищених кодів. Отримані результати є прийнятними для довгих кодових послідовностей у певному наближенні щодо граничного значення кількості перевірочних символів. Тобто, на кожен помилку, яка може бути знайдена і виправлена, необхідно не менше, ніж 4 перевірочних символи при блоко-

вому кодуванні.

Література

1. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М.: ИИЛ, 1963. – 828 с.
3. Липкин И.А. Статистическая радиотехника. Теория информации и кодирования. М.: Вузовская книга, 2002. – 210 с.
4. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

Цурко Д.Ю., Старков М.О. Проста нижня границя кількості перевірочних символів у блокових кодах. На основі границі мінімальної кодової відстані було знайдено граничне значення перевірочних символів для блокових кодів при заданій кількості помилок, які можна виправити. Був проведений аналіз отриманої простої границі по відношенню до деяких відомих BCH кодів. Для даних кодів отримана границя має місце за виключенням випадків, коли кількість перевірочних символів коду максимальна. Показано, що оцінка кількості перевірочних символів по відношенню до заданого числа помилок у кодї, що можуть бути виправлені, є точною лише для добре захищених кодів.

Ключові слова: Блокове кодування, границя Плоткіна, мінімальна кодова відстань.

Цурко Д.Ю., Старков М.А. Простая нижняя граница количества проверочных символов в блочных кодах. На основе границы минимального кодового расстояния было найдено граничное значение проверочных символов для блочных кодов при заданном количестве исправляемых ошибок. Был произведен анализ выведенной простой границы по отношению к некоторым известным BCH кодам. Для данных кодов полученная граница имеет место, за исключением случаев, когда количество проверочных символов максимально. Показано, что оценка количества проверочных символов при заданном числе исправляемых ошибок, является точной только для хорошо защищенных кодов.

Ключевые слова: Блочное кодирование, граница Плоткина, минимальное кодовое расстояние.

Tsurko D.Y., Starkov M.O. A simple lower bound of estimating of the checking symbols quantity. Based on boundary of minimum code distance has been found the boundary value of checking symbols in block codes with a given number of correcting errors. Has been analyzed the derived simple bound in relation to some well-known BCH codes. The obtained bound is valid except when the quantity of checking symbols is a maximum. Has been shown that estimate of the number of checking symbols with a given number of corrected errors is accurate only for highly secure codes.

Key words: Block coding, the Plotkin bound, minimum code distance.