РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 631.372.061

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ МАТРИЦІ ДЕГРАДАЦШЇ ОБРАЗУ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ АДАМАРА

Рибін О.І., д.т.н., професор, Іванюк Н.О., аспірантка
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

Вступ

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) знайшло широке розповсюдження в різних галузях сучасної техніки у вигляді швидких (ШПФ) перетворень [1,2]. Найбільш важливою властивістю дискретного перетворення Фур'є є те, що результатом множення циркулянтної матриці $\overline{\overline{G}}$ сигналу в натуральних координатах праворуч і ліворуч на матричні оператори $\overline{\overline{F}}_{í}, \overline{\overline{F}}_{í}^{*T}$ цього перетворення є матриця діагональна (комплексних амплітуд спектру), тобто

$$\overline{\overline{F}}_{í}^{*T} \times \overline{\overline{G}} \times \overline{\overline{F}}_{í} = \overline{\overline{G}}_{\omega} \text{ або } \overline{\overline{F}}_{í} \times \overline{\overline{G}}^{T} \times \overline{\overline{F}}_{í}^{*T} = \overline{\overline{G}}_{\omega} \qquad (1)$$

де * - знак комплексного спряження; $\overline{\overline{F}}_{í}, \overline{\overline{F}}_{í}^{*T}$ - матричні нормовані (діленням кожного рядка матриці на формат N) дискретні оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є; $\overline{\overline{G}}_{\omega}$ - діагональна матриця комплексних амплітуд спектра Фур'є; ^{T} - знак транспонування.

Останнім часом значного поширення набули ортогональні перетворення, які не є спорідненими з перетворенням Фур'є (наприклад, косинусне [3], Адамара [4], Хаара [5], REX [6,7], «нормальні» [8 - 12] і т.ін.). Для таких перетворень (з матричними операторами $\overline{\overline{W}}_{í}, \overline{\overline{W}}_{í}^{*T}$) множення виду (1) не дає в результаті діагональної матриці

$$\overline{\overline{W}}_{í}^{*T} \times \overline{\overline{G}} \times \overline{\overline{W}}_{í} = \overline{\overline{G}}_{\xi} \qquad (2)$$

тобто спектральна матриця $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ вже не є діагональною, хоча має певну структуру, яка визначається видом дискретного перетворення $\overline{\overline{W}}_{í}$. Так, якщо матриця $\overline{\overline{W}}_{í}$ є дискретним матричним оператором перетворення Адамара, матриця $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ є блочно-діагональною.

Широке розповсюдження ортогональних перетворень, відмінних від перетворення Фур'є зумовлене їх зручністю для розв'язання таких задач, як , наприклад, стиснення сигналів, їх архівація, розпізнавання образів тощо.

В той самий час для тих самих сигналів часто необхідно розв'язувати і такі задачі, як їх проходження лінійними інерційними колами. В цьому випадку доцільно використовувати кратні перетворення [13 - 17]. Саме кратні перетворення відкривають шляхи для створення множини дискретних перетворень Фур'є, алгоритми яких відрізняються від загальноприйнятих. Для цього зауважимо, що матричні оператори перетворення Фур'є можна представити у вигляді добутків

$$\overline{\overline{F}}_н = \overline{\overline{W}}_н \times \overline{\overline{P}}_н,\ \ \overline{\overline{F}}_н^{*T} = \overline{\overline{P}}_н^{*T} \times \overline{\overline{W}}_н^{*T},\ \ \overline{\overline{F}}_н = \overline{\overline{P}}_н^{*T} \times \overline{\overline{W}}_н, \tag{3а}$$

або

$$\overline{\overline{F}}_н = \overline{\overline{\Pi}}_н \times \overline{\overline{W}}_н,\ \ \overline{\overline{F}}_н^{*T} = \overline{\overline{\Pi}}_н^{*T} \times \overline{\overline{W}}_н^{*T}, \tag{3б}$$

де $\overline{\overline{P}}_н$, $\overline{\overline{P}}_н^{*T}$, $\overline{\overline{\Pi}}_н$, $\overline{\overline{\Pi}}_н^{*T}$ - матриці власних векторів [13 - 15].

Для розв'язання ряду задач [18] з метою підвищення точності обчислень доцільно обчислювати матрицю $\overline{\overline{G}}_\xi$ в (2), використовуючи символьні вирази для її елементів β_{ij}. У подальшому розглянемо процедуру обчислень елементів матриць $\overline{\overline{G}}_\xi$, $\overline{\overline{P}}_i$ та $\overline{\overline{G}}_\omega$ для випадку, коли $\overline{\overline{W}}_i$ є нормованим матричним оператором перетворення Адамара.

Формування матриці $\overline{\overline{G}}_\xi$

У випадку, коли матриця $\overline{\overline{W}}_i$ є матричним дискретним перетворенням Адамара, матриця $\overline{\overline{G}}_\xi$ є блочно-діагональною з підматрицями головної діагоналі (за зростанням номерів рядків) порядків 1, 1, 2, 4, 8,…, 2^k,…, $N/2$, де N — порядок матриці $\overline{\overline{G}}_\xi$. Матриця $\overline{\overline{G}}$ в (1), (2) є циркулянтною і складається з дискретних відліків $g_0, g_1, g_2, ..., g_{M-1}$; $M \leq N$) функції *g(t)* в натуральних координатах. При цьому нумерація відліків g_i є зворотною відносно нумерації стовпців рядка.

Елементи β_{ij} матриці $\overline{\overline{G}}_\xi$ є комбінаціями відліків g_i з коефіцієнтами b_{ij}. Якщо в лінійних комбінаціях відліків g_i з коефіцієнтами b_{ij} записувати впорядковано за зростанням номерів i (враховуючи і відліки з нульовими коефіцієнтами) отримаємо наступні формалізовані результати, які у подальшому дозволять сформувати алгоритм побудови матриці $\overline{\overline{G}}_\xi$ без множень матриць (2). Перший елемент діагоналі β_{00} має коефіцієнти $b_{00} = 1, 1, 1, ..., 1, ...$, тобто коефіцієнти при усіх відліках g_i (i = 0, 1, 2 ,…,M-1) однакові (повторюються з періодом $2^0 = 1$). Наступний елемент β_{11} має $b_{11} = 1, -1, 1, -1, ..., 1, -1, ...$, тобто період повторень індексів дорівнює $2^1 = 2$. Третім елементом блочно-діагональної матриці $\overline{\overline{G}}_\xi$ є матриця другого порядку з елементами $\beta_{22} = \beta_{33}$ та $\beta_{23} = -\beta_{32}$, для яких $b_{22} = 1, 0, -1, 0, ..., 1, 0, -1, 0, ...$, а $b_{23} = 0, 1, 0, -1, ..., 0, 1, 0, -1,$ тобто період повторень коефіцієнтів при відліках дорівнює $2^2 = 4$. Четвертий елемент діагоналі являє собою вже матрицю восьмого порядку. Цю матрицю можна розбити на чотири підматриці $\overline{\overline{\beta}}_{44,55} = \overline{\overline{\beta}}_{66,77}$, $\overline{\overline{\beta}}_{46,57} = -\overline{\overline{\beta}}_{64,75}$, коефіцієнти при відліках в яких мають вигляд

$\overline{\overline{b}}_{44,55} =$

	4	5
4	$1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, 0, 1/2, \ldots,$ $1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, 0, 1/2, \ldots$	$0, 1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2, \ldots,$ $0, 1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2, \ldots$
5	$0, -1/2, 0, -1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, \ldots,$ $0, -1/2, 0, -1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, \ldots$	$1, -1/2, 0, 1/2, -1, 1/2, 0, -1/2, \ldots,$ $1, -1/2, 0, 1/2, -1, 1/2, 0, -1/2, \ldots$

$\overline{\overline{b}}_{46,57} =$

	6	7
4	$0, 1/2, 1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, \ldots,$ $0, 1/2, 1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, \ldots$	$0, -1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, \ldots,$ $0, -1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, \ldots$
5	$0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2, 0, 1/2, \ldots,$ $0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2, 0, 1/2, \ldots$	$0, -1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, -1, 1/2, \ldots,$ $0, -1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, -1, 1/2, \ldots$

Матриця діагоналі в $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ восьмого порядку складається з чотирьох матриць четвертого порядку $\overline{\overline{\beta}}_{8,8;11,11} = \overline{\overline{\beta}}_{12,12;15,15}$ та $\overline{\overline{\beta}}_{8,12;11,15} = -\overline{\overline{\beta}}_{12,8;15,11}$. Матриця $\overline{\overline{\beta}}_{8,8;11,11}$, складається з чотирьох підматриць четвертого порядку $\overline{\overline{\beta}}_{8,8;9,9;}$ $\overline{\overline{\beta}}_{10,10;11,11;}$ $\overline{\overline{\beta}}_{8,10;9,11} = -\overline{\overline{\beta}}_{10,8;11,9}$. Коефіцієнти b_{ij} при відліках g_i цих матриць мають наступний вигляд

$\overline{\overline{b}}_{8,8;9,9} =$

	8	9
8	$1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -3/4,$ $-1, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, \ldots,$ $1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -3/4,$ $-1, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, \ldots,$	$0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4,$ $0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, \ldots,$ $0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4,$ $0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, \ldots,$
9	$0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4,$ $0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, \ldots,$ $0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4,$ $0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, \ldots,$	$1, -3/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, 3/4,$ $-1, 3/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, -3/4, \ldots,$ $1, -3/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, 3/4,$ $-1, 3/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, -3/4, \ldots,$

$\overline{\overline{b}}_{10,10;11,11} =$

	10	11
10	$1, 1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, -1/4,$ $-1, -1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, 1/4, \ldots,$ $1, 1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, -1/4,$ $-1, -1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, 1/4, \ldots,$	$0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4,$ $0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4, \ldots,$ $0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4,$ $0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4, \ldots,$
11	$0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4,$ $0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4, \ldots,$ $0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4,$ $0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4, \ldots,$	$1, -1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, 1/4,$ $-1, 1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, -1/4, \ldots,$ $1, -1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, 1/4,$ $-1, 1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, -1/4, \ldots,$

$\overline{\overline{b}}_{8,10;10,11} =$

	10	11
8	0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, ..., 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, ...,	0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, ..., 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, ...,
10	0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, ..., 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, ...,	0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, ..., 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, ...,

Матриця $\overline{\overline{\beta}}_{8,12;11,15}$ також складається з чотирьох матриць четвертого порядку $\overline{\overline{\beta}}_{8,12;9,13}; \overline{\overline{\beta}}_{10,14;11,15}; \overline{\overline{\beta}}_{10,12;11,13} = -\overline{\overline{\beta}}_{8,14;9,15}$. Коефіцієнти b_{ij} при відліках g_i цих матриць мають наступний вигляд

$\overline{\overline{b}}_{8,12;9,13} =$

	12	13
8	0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −3/4, −1, −3/4, −1/2, −1/4, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −3/4, −1, −3/4, −1/2, −1/4	0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, ..., 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, ...,
9	0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, ..., 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, ...,	0, −1/4, 1/2, −3/4, 1, −3/4, 1/2, −1/4, 0, 1/4, −1/2, 3/4, −1, 3/4, −1/2, ..., 1/4..., 0, −1/4, 1/2, −3/4, 1, −1/4, 0, 1/4, −1/2, 3/4, −1, 3/4, −1/2, ..., 1/4,

$\overline{\overline{b}}_{10,14;11,15} =$

	14	15
10	0, −1/4, −1/2, 1/4, 1, 1/4, −1/2, −1/4, 0, 1/4, 1/2, −1/4, −1, −1/4, 1/2, 1/4, ..., 0, −1/4, −1/2, 1/4, 1, 1/4, −1/2, −1/4, 0, 1/4, 1/2, −1/4, −1, −1/4, 1/2, 1/4, ...	0, 1/4, 0, −3/4, 0, 3/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 3/4, 0, −3/4, 0, 1/4, ..., 0, 1/4, 0, −3/4, 0, 3/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 3/4, 0, −3/4, 0, 1/4, ...,
11	0, −1/4, 0, 3/4, 0, −3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −3/4, 0, 3/4, 0, −1/4, ..., 0, −1/4, 0, 3/4, 0, −3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −3/4, 0, 3/4, 0, −1/4, ...,	0, 1/4, −1/2, −1/4, 1, −1/4, −1/2, 1/4, 0, −1/4, 1/2, 1/4, −1, 1/4, 1/2, −1/4..., 0, 1/4, −1/2, −1/4, 1, −1/4, −1/2, 1/4, 0, −1/4, 1/2, 1/4, −1, 1/4, 1/2, −1/4, ...

$\overline{\overline{b}}_{8,14;9,15} =$

	14	15
8	0, −1/4, −1/2, −1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, ..., 0, −1/4, −1/2, −1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, −1/4, −1/2, −1/4, ...	0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, ..., 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, ...,
14	0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, ..., 0, −1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, 0, −1/4, 0, −1/4, 0, 1/4, ...,	0, 1/4, −1/2, 1/4, 0, −1/4, 1/2, −1/4, 0, −1/4, 1/2, −1/4, 0, 1/4, −1/2, 1/4..., 0, 1/4, −1/2, 1/4, 0, −1/4, 1/2, −1/4, 0, −1/4, 1/2, −1/4, 0, 1/4, −1/2, 1/4, ...

Нарешті, матриця шістнадцятого порядку складається з чотирьох матриць восьмого порядку $\overline{\overline{\beta}}_{16,16;\,23,\,23}=\overline{\overline{\beta}}_{24,24;\,31,\,31};\overline{\overline{\beta}}_{16,24;\,23,\,31}=-\overline{\overline{\beta}}_{24,16;\,31,\,23}$. Кожна з матриць має також певну структуру, аналогічну структурі матриць, розглянутих раніше. Так, матриця $\overline{\overline{\beta}}_{16,16;\,23,\,23}$ складається з чотирьох матриць четвертого порядку $\overline{\overline{\beta}}_{16,16;\,19,\,19};\overline{\overline{\beta}}_{20,20;\,23,\,23}$ та $\overline{\overline{\beta}}_{16,20;\,19,\,23}=-\overline{\overline{\beta}}_{20,16;\,23,\,19}$. В свою чергу матриця $\overline{\overline{\beta}}_{16,16;\,19,\,19}$ складається з чотирьох матриць $\overline{\overline{\beta}}_{16,16;\,17,\,17};\overline{\overline{\beta}}_{18,18;\,19,\,19}$ та $\overline{\overline{\beta}}_{16,18;\,17,\,19}=-\overline{\overline{\beta}}_{18,16;\,19,\,17}$. Коефіцієнти b_{ij} перед відліками g_i цих матриць мають наступний вигляд

$\overline{\overline{b}}_{16,16;17,17} =$

	16	17
16	1, 7/8, 6/8, 5/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −5/8, −6/8, −7/8, −1, −7/8, −6/8, −5/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, ..., 1, 7/8, 6/8, 5/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −5/8, −6/8, −7/8, −1, −7/8, −6/8, −5/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, ...,	0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, ..., 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, ...,
17	0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, ..., 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, ...,	1, −7/8, 6/8, −5/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 5/8, −6/8, 7/8, −1, 7/8, −6/8, 5/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −5/8, 6/8, −7/8, ..., 1, −7/8, 6/8, −5/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 5/8, −6/8, 7/8, −1, 7/8, −6/8, 5/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −5/8, 6/8, −7/8, ...,

$\overline{\overline{b}}_{18,18;19,19} =$

	18	19
18	1, 1/8, −6/8, −1/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, 1/8, 6/8, −1/8, −1, −1/8, 6/8, 1/8, −1/2, −1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 1/8, −6/8, 1/8, ..., 1, 1/8, −6/8, −1/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, 4/8, 1/8, 6/8, −1/8, −1, −1/8, 6/8, 1/8, −1/2, −1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, −1/8, −6/8, 1/8, ...,	0, 7/8, 0, −5/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −5/8, 0, 7/8, 0, −7/8, 0, 5/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 5/8, 0, −7/8, ..., 0, 7/8, 0, −5/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −5/8, 0, 7/8, 0, −7/8, 0, 5/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 5/8, 0, −7/8, ...,
19	0, −7/8, 0, 5/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 5/8, 0, −7/8, 0, 7/8, 0, −5/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −5/8, 0, 7/8, ..., 0, −7/8, 0, 5/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 5/8, 0, −7/8, 0, 7/8, 0, −5/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −5/8, 0, 7/8, ...,	1, −1/8, −6/8, 1/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, −1/8, 6/8, 1/8, −1, 1/8, 6/8, −1/8, −1/2, 1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, 1/8, −6/8, −1/8, ..., 1, −1/8, −6/8, 1/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, −1/8, 6/8, 1/8, −1, −1/8, 6/8, −1/8, −1/2, 1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, 1/8, −6/8, −1/8, ...,

$\overline{\overline{b}}_{16,18;17,19} =$

	18	19
16	0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, ..., 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, ...,	0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, ..., 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, ...,
17	0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, ..., 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, ...,	0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, ..., 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, ...,

Матриця $\overline{\overline{\beta}}_{16,20;19,23}$ складається з чотирьох матриць $\overline{\overline{\beta}}_{16,20;17,21}; \overline{\overline{\beta}}_{18,22;19,23}$ та $\overline{\overline{\beta}}_{16,22;17,23} = -\overline{\overline{\beta}}_{18,20;19,21}$. Коефіцієнти b_{ij} цих матриць мають наступний вигляд

$\overline{\overline{b}}_{16,20;17,21} =$

	18	19
16	0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, ..., 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, ...,	0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, ..., 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, ...,
17	0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, ..., 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, ...,	0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, ..., 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, ...,

$\overline{\overline{b}}_{18,22;19,23} =$

	22	23
18	0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, −1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, −1/8, 2/8, 1/8, ..., 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, −1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, −1/8, 2/8, 1/8, ...,	0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, ..., 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, ...,
19	0, −1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, ..., 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, ...,	0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, 1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, 1/8, 2/8, −1/8, ..., 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, 1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, 1/8, 2/8, −1/8, ...,

$\overline{\overline{b}}_{16,22;17,23} = -\overline{\overline{b}}_{18,20;19,21} =$

	22	23
16	0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, ..., 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, ...,	0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, ..., 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, ...,
17	0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, ..., 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, ...,	0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, ...,

Матриця $\overline{\overline{\beta}}_{20,20;\,23,\,23}$ також складається з чотирьох матриць $\overline{\overline{\beta}}_{20,20;\,21,\,21}$; $\overline{\overline{\beta}}_{22,22;\,23,\,23}$ та $\overline{\overline{\beta}}_{20,22;\,21,\,23} = -\overline{\overline{\beta}}_{22,20;\,23,\,21}$. Їх матриці коефіцієнтів перед відліками g_i мають наступний вигляд

$\bar{\bar{b}}_{20,20;\,21,21} =$

	20	21
20	1, 5/8, −2/8, −1/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 1/8, −2/8, −5/8, −1, −5/8, −2/8, 1/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −1/8, 2/8, 5/8, ..., 1, 5/8, −2/8, −1/8, −4/8, −3/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 1/8, −2/8, −5/8, −1, −5/8, −2/8, 1/8, 4/8, 3/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, −3/8, −4/8, −1/8, 2/8, 5/8, ...,	0, 3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, −3/8, ..., 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, −3/8, ...,
21	0, −3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, 3/8, ..., 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, 3/8, ...,	1, −5/8, 2/8, 1/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −1/8, −2/8, 5/8, −1, 5/8, −2/8, −1/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 1/8, 2/8, −5/8, ..., 1, −5/8, 2/8, 1/8, −4/8, 3/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, −3/8, 4/8, −1/8, −2/8, 5/8, −1, 5/8, −2/8, −1/8, 4/8, −3/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, 3/8, −4/8, 1/8, 2/8, −5/8, ...,

$\bar{\bar{b}}_{22,22;\,23,23} =$

	22	23
22	1, 3/8, −2/8, −3/8, −4/8, −1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 3/8, 2/8, −3/8, −1, −3/8, 2/8, 3/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, −3/8, −2/8, 3/8, ..., 1, 3/8, −2/8, −3/8, −4/8, −1/8, 2/8, 1/8, 0, −1/8, −2/8, 1/8, 4/8, 3/8, 2/8, −3/8, −1, −3/8, 2/8, 3/8, 4/8, 1/8, −2/8, −1/8, 0, 1/8, 2/8, −1/8, −4/8, −3/8, −2/8, 3/8, ...,	0, 5/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 5/8, 0, −5/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −5/8, ..., 0, 5/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 5/8, 0, −5/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −5/8, ...,
23	0, −5/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −5/8, 0, 5/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 5/8, ..., 0, −5/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −1/8, 0, 3/8, 0, −1/8, 0, −5/8, 0, 5/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 0, −3/8, 0, 1/8, 0, 5/8, ...,	1, −3/8, −2/8, 3/8, −4/8, 1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, −3/8, 2/8, 3/8, −1, 3/8, 2/8, −3/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, 3/8, −2/8, −3/8, ..., 1, −3/8, −2/8, 3/8, −4/8, 1/8, 2/8, −1/8, 0, 1/8, −2/8, −1/8, 4/8, −3/8, 2/8, 3/8, −1, 3/8, 2/8, −3/8, 4/8, −1/8, −2/8, 1/8, 0, −1/8, 2/8, 1/8, −4/8, 3/8, −2/8, −3/8, ...,

$\bar{\bar{b}}_{20,22;\,21,23} = -\bar{\bar{b}}_{22,20;\,23,21} =$

	22	23
20	0, 3/8, 6/8, 3/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 3/8, 6/8, 3/8, 0, −3/8, −6/8, −3/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −3/8, −6/8, −3/8, ..., 0, 3/8, 6/8, 3/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, −1/8, −2/8, −1/8, 0, 3/8, 6/8, 3/8, 0, −3/8, −6/8, −3/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 0, −3/8, −6/8, −3/8, ...,	0, −3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, ..., 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, ...,
21	0, 3/8, 0, −3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, ..., 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, 3/8, 0, −3/8, 0, −3/8, 0, 3/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, 1/8, 0, −1/8, 0, −3/8, 0, 3/8, ...,	0, −3/8, 6/8, −3/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −3/8, 6/8, −3/8, 0, 3/8, −6/8, 3/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 3/8, −6/8, 3/8, ..., 0, −3/8, 6/8, −3/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, 1/8, −2/8, 1/8, 0, −3/8, 6/8, −3/8, 0, 3/8, −6/8, 3/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, −1/8, 2/8, −1/8, 0, 3/8, −6/8, 3/8, ...,

Аналогічним чином можна представити матрицю $\overline{\overline{\beta}}_{20,24;\,23,\,31}$ та її складові (матриці менших порядків).

Алгоритм формування коефіцієнтів b_{ij} матриці $\overline{\overline{G}}_{\xi}$

Формування коефіцієнтів матриці $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ за закономірностями, які можна помітити за отриманими формулами для коефіцієнтів при відліках імпульсної характеристики, дозволяє значно зекономити кількість операцій, які використовуються при обчисленні такої матриці. Крім того при обчисленні коефіцієнтів має місце велика додавань та віднімань тих самих відліків. Якщо розглядати не самі коефіцієнти, а ваги відліків, то за рахунок обмеженої розрядності операнд виникне велика операційна похибка. Можливість безпосереднього формування коефіцієнтів b_{ij} дозволяє уникнути як громіздких обчислень, так і накопичення великої операційної похибки.

За основу приймемо матрицю $\overline{\overline{\beta}}_{2,2;\,3,\,3}$, в якій елемент β_{22} має коефіцієнти $b_{2,\,2}$, які дорівнюють $1,\,0,\,-1,\,0,\ldots$, що можна отримати з кусочно-лінійної функції, з вершинами, які мають значення 1 та -1. За елементом $b_{2,\,2}$ можна отримати елемент $b_{4,\,4}$ матриці $\overline{\overline{b}}_{4,4;\,7,7}$ Для цього слід знайти середні значення між значеннями коефіцієнтів елемента $b_{2,\,2}$. Тоді отримаємо коефіцієнти, які дорівнюють $1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, 0, 1/2, \ldots$, причому, як і слід було очікувати, період повторень коефіцієнтів збільшився вдвічі. Таку операцію обчислень, яка призводить до збільшення вдвічі періоду з одночасним обчисленням проміжних середніх значень будемо називати «розширенням» послідовності коефіцієнтів. Наступний елемент головної діагоналі $b_{5,\,5}$ (з непарними індексами) отримуємо з елемента $b_{4,\,4}$ множенням елементів його послідовності коефіцієнтів на ряд чисел $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ Таку операцію будемо називати «приведенням». Аналогічно до $b_{4,\,4}$ елемент $b_{4,\,6}$ отримуємо з $b_{2,\,3}$ «розширенням», $b_{5,\,7}$ отримуємо з $b_{4,\,6}$ «приведенням». Елемент $b_{4,\,5}$ отримуємо з $b_{2,\,3}$ тобто з елемента, який знаходиться поруч і праворуч від елемента $b_{2,\,2}$ «розширенням» та заміною нулями елементів, які знаходилися в $b_{2,\,3}$ Тобто «розширенням» отримаємо

$$0, 1/2, 1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 1/2, 0, -1/2, -1, -1/2, \ldots,$$

а заміна нулями дає

$$0, 1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2, \ldots$$

Операцію заміни нулями тих чисел, що були (ненульовими та нульовими) в клітині $b_{2,\,3}$ будемо називати «проріджуванням». Елементи ряду клітини $b_{5,\,6}$ отримаємо «приведенням» з подвійним кроком, тобто множенням послідовності коефіцієнтів в $b_{4,\,5}$ на

$1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots$ Крім того, $b_{4,5} = -b_{5,4}; b_{5,6} = -b_{4,7}$. Всі інші елементи матриці $\bar{\bar{b}}_{4,4;7,7}$ знаходять з вже знайдених на основі згаданої вище симетрії.

Елементи матриці восьмого порядку $\bar{\bar{b}}_{8,8;15,15}$ можна знайти за елементами матриці $\bar{\bar{b}}_{4,4;7,7}$ наступним чином. Елементи $b_{8,8}, b_{8,10}, b_{8,12}, b_{8,14}, b_{10,8}, b_{10,10}, b_{10,12}, b_{10,14}$ (з парними індексами) отримуємо з елементів $b_{4,4}, b_{4,5}, b_{4,6}, b_{4,7}, b_{5,4}, b_{5,5}, b_{5,6}, b_{5,7}$ відповідно їх «розширенням». Елементи $b_{9,9}, b_{9,11}, b_{9,13}, b_{9,15}, b_{11,9}, b_{11,11}, b_{11,13}, b_{11,15}$ отримаємо з елементів $b_{8,8}, b_{8,10}, b_{8,12}, b_{8,14}, b_{10,8}, b_{10,10}, b_{10,12}, b_{10,14}$ (в тих самих діагоналях) відповідно їх «приведенням». Елементи $b_{8,9}, b_{8,13}$ які знаходяться праворуч від елементів, які були утворені «розширенням» з елементів з парними індексами) отримуємо з елементів $b_{4,5}$, $b_{4,7}$ їх «розширенням» з «проріджуванням». Елементи $b_{9,10}, b_{9,14}$ (тих самих діагоналей, що й $b_{8,9}, b_{8,13}$) отримуємо «приведенням» з подвійним кроком з елементів $b_{8,9}, b_{8,13}$, а $b_{8,11} = -b_{9,10}$ та $b_{8,14} = -b_{9,13}$. Елементи $b_{9,12}, b_{9,15}$ отримуємо з $b_{8,11}, b_{8,14}$ (в тих самих діагоналях) відповідно їх «приведенням». Крім зазначених елементів, починаючи з матриці восьмого порядку, існують елементи, які не підпадають під вищезгадані правила. Це елементи $b_{10,11} = -b_{11,10}$ та $b_{10,15} = -b_{11,14}$, які знаходяться в діагоналі, що починається елементами $b_{8,9}, b_{8,13}$. Ці елементи є останніми в своїх діагоналях в сенсі правила їх формування, оскільки структура усіх матриць, порядків восьмого і більших прив'язана до матриць четвертого порядку (матриця діагоналі $\bar{\bar{G}}_{\xi}$ складається зі структурних матриць другого порядку).

Елементи $b_{10,11}, b_{10,15} = b_{10,11+5}$ отримаємо з елементів $b_{8,8}, b_{8,12} = b_{8,8+4}$ відповідно їх «прорідженням» та «приведенням» з подвійним кроком. Проілюструємо тепер алгоритм на прикладі матриці шістнадцятого порядку, що можна далі узагальнити на матрицю будь-якого порядку $N = 2^n$, n—ціле число.

Враховуючи клітинну структуру матриці (клітини четвертого порядку) та симетрію (з урахуванням знаку) клітин, розглянемо алгоритм формування верхньотрикутної частини матриці шістнадцятого порядку (разом з головною діагоналлю).

1. Сформуємо елементи з парними індексами (отримувані з елементів попередньої матриці восьмого порядку подвоєнням індексів). Це елементи
   $b_{16,16}, b_{16,18}, b_{16,20}, b_{16,22}, b_{16,24}, b_{16,26}, b_{16,28}, b_{16,30}$, $b_{18,18}, b_{18,20}, b_{18,22}, b_{18,24}, b_{18,26}$, $b_{18,28}, b_{18,30}, b_{20,20}$, $b_{20,22}, b_{20,24}, b_{20,26}, b_{20,28}, b_{20,30}, b_{22,22}, b_{22,24}, b_{22,26}, b_{22,28}, b_{22,30}$, які

отримуємо «розширенням» з елементів $b_{8,8}, b_{8,9}, b_{8,10}, b_{8,11}, b_{8,12}, b_{8,13}, b_{8,14}$, $b_{8,15}, b_{9,9}, b_{9,10}, b_{9,11}, b_{9,12}, b_{9,13}, b_{9,14}, b_{9,15}, b_{10,10}, b_{10,11}, b_{10,11}, b_{10,12}, b_{10,13}, b_{10,15}, b_{11,11}, b_{11,12}, b_{11,13}$, $b_{11,14}, b_{11,15}$ відповідно.

2. Сформуємо елементи діагоналей, до яких належать елементи, сформовані в п. 1. Це $b_{17,17}, b_{17,19}, b_{17,21}, b_{17,23}, b_{17,25}, b_{17,27}, b_{17,29}, b_{17,31}, b_{19,19}, b_{19,21}$, $b_{19,23}, b_{19,25}, b_{19,27}, b_{19,29}, b_{19,31}, b_{21,21}, b_{21,23}, b_{21,25}, b_{21,27}, b_{21,29}, b_{21,31}, b_{23,23}, b_{23,25}, b_{23,25}, b_{23,27}$, $b_{23,29}, b_{23,31}$, які отримуємо «приведенням» з елементів $b_{16,16}, b_{16,18}, b_{16,20}, b_{16,22}, b_{16,24}, b_{16,26}, b_{16,28}, b_{16,30}, b_{18,18}, b_{18,20}, b_{18,22}, b_{18,24}, b_{18,26}$, $b_{18,28}, b_{18,30}, b_{20,20}, b_{20,22}, b_{20,24}, b_{20,26}, b_{20,28}, b_{20,30}, b_{22,22}, b_{22,24}, b_{22,26}, b_{22,28}, b_{22,30}$ відповідно.
3. Сформуємо елементи $b_{16,17}, b_{16,21}, b_{16,25}, b_{19,29}, b_{20,21}, b_{20,25}, b_{20,29}$, по елементам попередньої матриці (матриці восьмого порядку), які знаходяться праворуч від елементів з парними індексами, тобто по елементам $b_{8,9}, b_{8,11}, b_{8,13}, b_{8,15}, b_{10,11}, b_{10,13}, b_{10,15}$. Ці елементи знаходимо з відповідних елементів попередньої матриці «розмноженням» та «проріджуванням».
4. Наступні елементи клітин четвертого порядку (які знаходяться в тих самих діагоналях, що й елементи, знайдені в п.3), тобто $b_{17,18}, b_{17,22}, b_{17,26}, b_{17,30}, b_{21,22}, b_{21,26}, b_{21,30}$ знаходимо з елементів $b_{16,17}, b_{16,21}, b_{16,25}$, $b_{20,21}, b_{20,25}, b_{20,29}$ «приведенням» у два кроки.
5. Елементи $b_{16,17+2}, b_{16,21+2}, b_{16,25+2}, b_{20,21+2}, b_{20,25+2}, b_{20,29+2}$ мають знаки коефіцієнтів перед відліками протилежні до відповідних $b_{17,18}, b_{17,22}, b_{17,26}, b_{17,30}, b_{21,22}$, $b_{21,26}, b_{21,30}$.
6. Прикінцеві елементи клітин четвертого порядку (треті елементи других діагоналей) $b_{18,19}, b_{18,23}, b_{18,27}, b_{18,31}, b_{22,23}$, $b_{22,31}$, знайдемо за елементами $b_{16,16}$, $b_{16,20}$, $b_{16,24}$, $b_{16,28}$, $b_{20,20}$, $b_{20,28}$ шляхом «проріджування» та «приведення» за два кроки.
7. Усі інші елементи знаходять, враховуючи симетрію (з точністю до знаку) елементів матриці.

Таким чином, алгоритм формування коефіцієнтів b_{ij} матриці $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ для матриці 32-го порядку можна ілюструвати за допомогою рисунку 1, на якому позначено наступні операції, введені в роботі: 1 – операція «розширення», 2 – операція «приведення», 3 – операція «розширення з проріджуванням», 4 – операція «приведення з подвійним кроком», 5 – операція «інверсія», 6 – операція «проріджування з подвійним кроком»

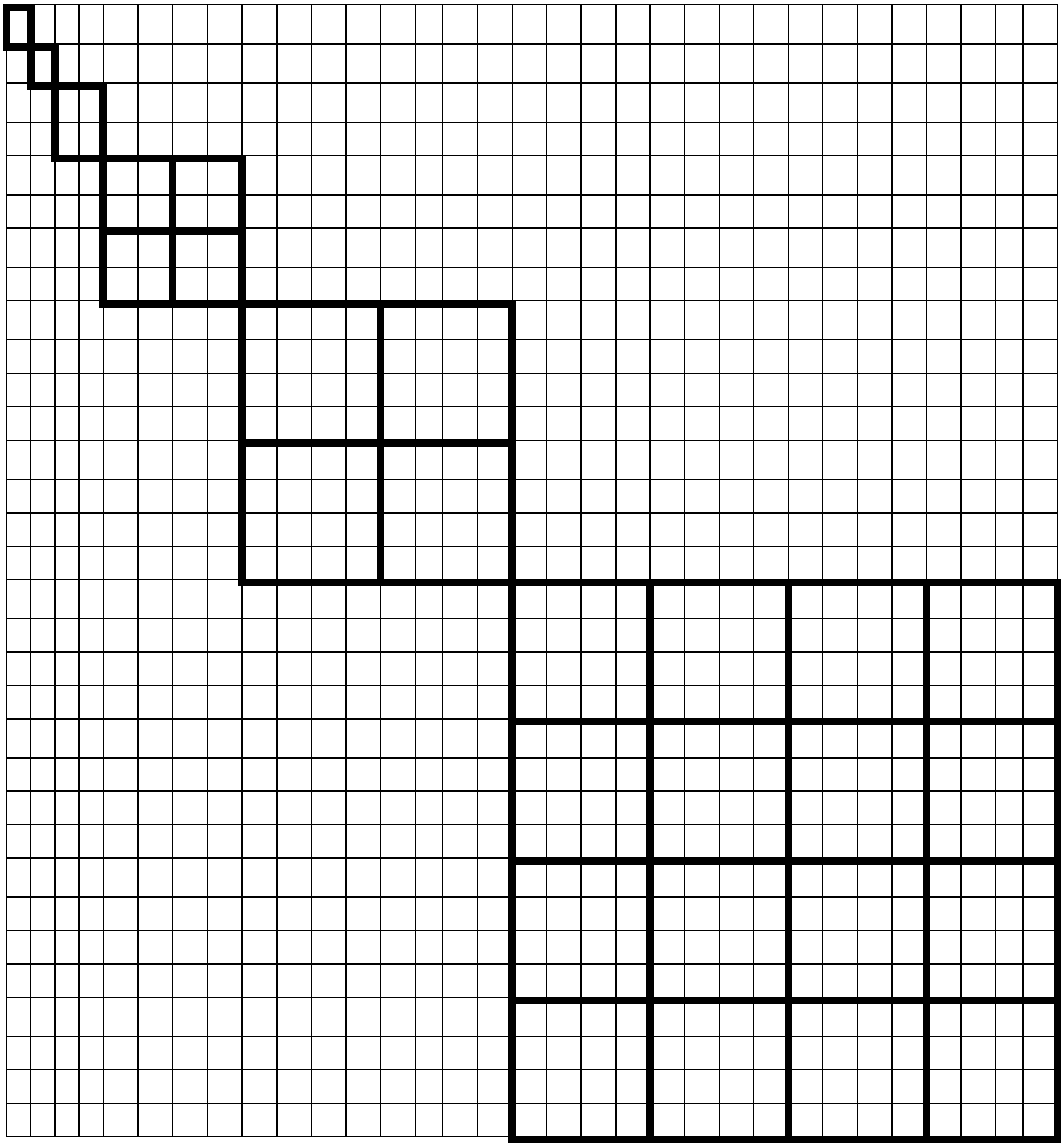

Рис. 1

Для підтвердження теоретичних викладок та розрахунків коефіцієнтів b_{ij} матриці $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ була написана комп'ютерна програма в середовищі Matlab. Дана програма дозволяє сформувати матрицю $\overline{\overline{G}}_{\xi}$ будь-якого порядку та використовуючи вище згадані операції «розширення», «приведення» і т.д. розрахувати її коефіцієнти.

Висновки

1. Запропоновано алгоритм формування коефіцієнтів b_{ij} при відліках імпульсної характеристики матриці деградації образу $\overline{\overline{G}}_{\xi}$, який (враховую-

чи блочно-діагональну структуру цієї матриці) дозволяє значно спростити обчислення такої матриці будь-якого порядку.

2. Отримувані символьні вирази елементів матриці деградації дозволили значно підвищити точність обчислень за рахунок відсутності операцій додавань-віднімань тих самих чисел (відліків), що є обов'язковим при використанні чисельних методів формування.

3. Розроблений алгоритм дозволяє значно скоротити кількість трудоємних операцій (множення-ділення) при формуванні матриці $\overline{\overline{G}}_{\xi}$, що значно спрощує алгоритм такого формування.

4. Запропонований алгоритм легко реалізується на ЕОМ.

5. Для розв'язання задачі реставрації образу необхідно обернути матрицю деградації, тому подальшим кроком досліджень повинен бути алгоритм обернення матриці деградації.

Література

1. PrattW.K. Digital Image Processing / W.K. Pratt / J.Wile&Sons.–1991,v.1,2

2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс /Москва: Техносфера, 2005. –1072с.

3. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов/ Н.Ахмед, К. Рао//Пер.с англ. Под общ.ред. И. Б.Фоменко – М: Связь,1980. –248с.

4. Murlan S.Corrington Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Function / S.Murlan //IEEE Transactions on Circuit Theory.–1973–CT–20–№5–P.470–476.

5. JanJiří Číslicova filtrace, analŷza arestauracesignlů / JiříJan // VUT v BRNĚ,1997, 438p.

6. Рыбин А.И. Ортогональное экспоненциальное преобразование REX / А.И. Рыбин// Радиоэлектроника. –2004–№2–С.3–9. (Изв. вузов).

7. Рыбин А.И. Алгоритм формування матричних операторів дискретних ортогональних перетворень REX та COREX / А.И. Рыбин, О.Б. Шарпан // Вісник ЖДТУ–№4(31). –Т2. –2004. –№1. – С.53–57.

8. Рибін О.І. Нормальне дискретне ортогональне перетворення / О.І. Рибін , Ю.Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2008– №37– С.8–15.

9. Рибін О.І. Алгоритм формування матричного оператора дискретного нормального ортогонального перетворення./ О.І. Рибін , Ю.Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ «КПІ». Сер.Радіотехніка. Радіоапаратобудування. –2008.– №36.– С.19–27.

10. Рибін О.І. Нормальне дискретне перетворення сигналу довільної форми / О.І. Рибін , Ю.Х. Ніжебецька, А.П. Ткачук, О.Б. Шарпан//Наукові вісті НТУУ «КПІ». –2004. –№4 – С.34–40.

11. Рибін О.І. Аунтефікація особи за динамічно введеним підписом з використанням нормального перетворення / О.І. Рибін , Ю.Х. Ніжебецька , А.М. Луцків // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.–2010–№40– С.26–30.

12. Рыбин А.И. Анализ подобия и различия образов с использованием нормального ортогонального преобразования/ Рыбин А.И., Нижебецкая Ю.Х // Радиоэлектроника.–№3–2010.– С.58–64. (Изв. высш. учеб. заведений).

13. Рибін О.І. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша–Адамара / О.І. Рибін , А.П. Ткачук// Вісник НТУУ «КПІ» Сер. Радіотехніка. Радіоа-

паратобудування. –2006. –№33.– С.14–23.

14. Рибін О.І. Аналіз лінійних систем в області трансформант кратного перетворення EIWAL / О.І. Рибін , А.П. Ткачук // Вісник НТУУ «КПІ» Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. –2006.– №33. – С.31–38.

15. Рыбин А.И. Анализ линейных систем в области трансформант кратного преобразованияRTF/ /А.И. Рыбин , А.П. Ткачук. Радиоэлектроника. –2006. –№11.– С.56–63. (Изв. высш. учеб. заведений).

16. Рибін О.І. Аналіз лінійних систем з використанням кратних перетворень / О.І. Рибін, І.О. Рибіна, Ю.Х. Ніжебецька// Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2009.— №40.— С.5 — 11.

17. Рибіна І.О. Аналіз лінійних систем з використанням кратних перетворень шляхом розкладу реакції системи в ряд Тейлора / О.І. Рибіна, О.Я. Вівчарик, О.А. Якубенко // Вісник НТУУ»КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.- 2011.- №44.-С.37-48.

18. Рибін О.І. Умовна деконволюція в області трансформант Фур'є. Побудова матриці деградації образу / О.І. Рибін, Н.О. Іванюк // Вісник НТУУ»КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.— 2011.— №46.— С.5 — 16.

Рибін О.І., Іванюк Н.О. ***Алгоритм побудови матриці деградації образу з використанням дискретного перетворення Адамара.*** *В роботі запропоновано алгоритм для реалізації символьного методу формування матриці деградації образу в області трансформант перетворення Адамара. Алгоритм враховує блочно-діагональну структуру матриці деградації, що дозволяє значно спростити обчислення такої матриці будь-якого порядку. Отримувані символьні вирази елементів матриці деградації дозволили значно підвищити точність обчислень за рахунок відсутності операцій додавань-віднімань тих самих чисел (відліків), що є обов'язковим при використанні чисельних методів формування. Розроблений алгоритм дозволяє значно скоротити кількість трудоємних операцій (множення-ділення) при формуванні матриці* $\overline{\overline{G}}_{\xi}$*, що значно спрощує алгоритм такого формування.*

Ключові слова: *Матриця деградації образу, умовна деконволюція, перетворення Адамара, матричні оператори деградації образу, символьні методи, точність, швидкодія.*

Рыбин А.И., Иванюк Н.А. ***Алгоритм построения матрицы деградации образа с использованием дискретного преобразования Адамара.*** *В работе предложен алгоритм для реализации символьного метода формирования матрицы деградации образа в области трансформант преобразования Адамара. Алгоритм учитывает блочно-диагональную структуру матрицы деградации, что позволяет значительно упростить вычисления такой матрицы любого порядка. Получаемые символьные выражения элементов матрицы деградации позволили значительно повысить точность вычислений за счет отсутствия операций сложения-вычитания тех же чисел (отсчетов), что является обязательным при использовании численных методов формирования. Разработанный алгоритм позволяет значительно сократить количество трудоемких операций (умножения-деления) при формировании матрицы, что значительно упрощает алгоритм такого формирования.*

Ключевые слова: *Матрица деградации образа, условная деконволюция, преобразование Адамара, матричные операторы деградации образа, символьные методы, точность, быстродействие.*

Rybin A.I., Ivanyuk N.A. ***Image degradation matrix formation algorithm with usage of Adamar discrete transformation.*** *Algorithm for symbolic method realization of forming image degradation matrix at Adamar conversion transformants area is proposed. Algorithm considers block-diagonal structure of degradation matrix, that allows notably simplification of evaluation of matrix in any range. Obtained symbolic expressions of degradation matrix elements have allowed notably increase calculation accuracy on account of absence of addition subtraction operations of same numbers (counts) that is a must in numerical methods using. Developed algorithm allows greatly decrease number of laborious operations (multiplying division) at matrix G forming, that allows notably simplify forming algorithm.*

Key words: *image degradation matrix, conditional deconvolution, Adamar conversion, image degradation operators, accuracy, speed-performance*