

Оценка границы Крамера-Рао выпуклых антенных решеток с направленными излучателями для радиопеленгации

Нечаев Ю. Б.¹, Пешков И. В.², Фортунова Н. А.²

¹Воронежский государственный университет

²Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина

E-mail: ilvpeshkov@gmail.com

Оценка угловых координат источников радиоизлучения представляет серьезный исследовательский интерес в различных сферах. Так, в беспроводных телекоммуникационных системах информация о координатах позволяет осуществить пространственное разделение для увеличения одновременно функционирующих пользователей. Исследовано влияние коэффициента направленного действия отдельного антенного элемента на точность определения угловых координат источников радиоизлучения кольцевой, кубической и сферической антенных решеток, состоящих из направленных излучающих элементов, нашедших широчайшее применение в современных беспроводных коммуникационных технологиях. Для корректного функционирования высокоточных алгоритмов радиопеленгации в составе рассматриваемых решеток осуществлен вывод точных выражений, описывающих амплитудно-фазовое распределение электромагнитного поля решеток, т.н. направляющие векторы. Обсуждается вывод статистической границы Крамера-Рао для определения ошибок и точности координат направления прихода ряда плоских волн, падающих на антенную решетку. Осуществлено теоретическое исследование работы данных антенных решеток с помощью оценки границы Крамера-Рао, а также компьютерное моделирование с реализацией метода со сверхразрешением MUSIC. Определены пределы изменения коэффициента направленного действия отдельного элемента, при которых достигается максимальная точность оценки угловых координат. С повышением усиления отдельных антенн точность пеленгации может значительным образом изменяться в зависимости от азимутального положения сигнала и приемлемым выбором коэффициента направленного действия является равным от четырех до шести. Проведена оценка разрешающей способности выпуклых или объемных антенных решеток в зависимости от коэффициента направленного действия. В целом установлено, что лучшей конфигурацией является сферическая.

Ключевые слова: радиопеленгация; цифровая антенная решётка; кольцевая антенная решётка; объемная антенна; направленные излучатели; КНД

DOI: [10.20535/RADAP.2018.75.16-24](https://doi.org/10.20535/RADAP.2018.75.16-24)

Введение

Оценка координат источника радиоизлучения (ИРИ) нашла широкое применение в телекоммуникационных системах [1–6] с применением линейных антенных решёток (АР), которые наглядны и просты, но характеризуются неспособностью одновременной оценки координат ИРИ в трехмерной плоскости, т.е. по азимуту и углу места [7]. Планарные и объемные антенные решетки могут преодолеть эту проблему [8–10]. Кроме того, в большинстве работ делается предположение об изотропности излучения антенн [1–10]. Рассмотрение влияния коэффициента направленного действия (КНД) отдельных элементов на характеристики радиопеленгации объемных антенных решеток, состоящих из прямо-

угольных патч-антенн, КНД которых превышает 1, нашедших широчайшее применение в современных беспроводных коммуникационных технологиях, представляет серьезный интерес. Поэтому в работе основное внимание уделяется исследованию трехмерных объемных АР: цилиндрические (Ци-АР), кубические, сферические и конические геометрии с использованием алгоритма MUSIC. Однако полученные результаты сравнительного моделирования можно интерпретировать как частный случай, поэтому необходим инструмент, независимый от особенностей реализации, такой как граница Крамера-Рао.

В работах [11, 12] рассматривается проблема получения выражения границы Крамера-Рао для угломестной и азимутальной радиопеленгации с

использованием АР с направленными излучателями. Однако данные работы не дают точного выражения, учитывающего положение источника совместно с КНД антенных элементов. Далее приводится улучшенное и расширенное матрично-векторное выражение границы Крамера-Рао, учитывающее обозначенные недостатки.

1 Построение антенной решетки

1.1 Антенна в форме куба

Рис. 1 а показывает решетку из N прямоугольных направленных элементов, распределенных в пространстве, образуя кубическую АР. Рассмотрим узкополосный сигнал $s(t)$ на несущей частоте ω_0 с угловыми координатами θ и φ относительно осей x , y и z соответственно, т.е. θ связана с азимутальной и φ с вертикальной плоскостями. Таким образом, задача радиопеленгации состоит в оценке координат θ и φ . Для этого необходима модель применяемой АР.

Обозначим $g_i(\omega, \theta, \varphi)$ усиление и фазу антенного элемента (АЭ) в зависимости от частоты и направления, тогда аналитический сигнал на выходе АР [10]:

$$\mathbf{a}(\omega, \theta, \lambda) = \begin{bmatrix} g_1(\omega, \theta, \lambda) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_1^T} & g_2(\omega, \theta, \lambda) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_2^T} \\ \dots & g_N(\omega, \theta, \lambda) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_N^T} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (k_x, k_y, k_z) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ — волновое число, описывающее скорость изменения фазы распространяющейся волны в направлениях x , y , z , $\mathbf{r}_n^T = (x_n, y_n, z_n)^T$ — радиус-вектор к n -му АЭ и $g_n(\theta, \varphi)$ — коэффициент усиления n -го АЭ. Тогда направляющий вектор антенной решетки можно выразить как:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi + \varphi_1) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_1^T} \\ g_2(\theta, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_2^T} \\ g_3(\theta + \theta_3, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_3^T} \\ g_4(\theta + \theta_4, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_4^T} \\ g_5(\theta + \theta_5, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_5^T} \\ g_6(\theta, \varphi - \varphi_6) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_6^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi + \frac{\pi}{2}) e^{j\mathbf{k}[0,0,0]^T} \\ g_2(\theta, \varphi) e^{j\mathbf{k}[\frac{\lambda}{4}, 0, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_3(\theta + \frac{\pi}{2}, \varphi) e^{j\mathbf{k}[0, -\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_4(\theta + \pi, \varphi) e^{j\mathbf{k}[-\frac{\lambda}{4}, 0, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_5(\theta + \frac{3\pi}{2}, \varphi) e^{j\mathbf{k}[0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_6(\theta, \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{j\mathbf{k}[0, 0, \frac{\lambda}{2}]^T} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Построение направляющего вектора кубической антенной решетки начинается так, что первый элемент расположен в начале координат, т.е. $\mathbf{r}_1^T = (0, 0, 0)^T$ и ориентирован излучающим элементом вдоль оси z и тогда имеет максимум излучения по углу места смещенным на $+\pi/2$. В приведенной модели коэффициент $g_n(\theta, \varphi)$ зависит от азимутальной θ и угломестной φ координат наблюдателя. Кроме того, предполагается, что максимум излучения достигается при $\theta = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, а минимум при $\varphi = 0^\circ$ и $\theta = 0^\circ$, либо $\varphi = 90^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, как показано из следующей математической модели ДН по мощности в дальней зоне в предположении, что антенны идеально согласованы и без потерь [11]:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{D}{2^{2m}} (1 + \sin(\varphi - \gamma_n^\varphi))^m \cdot (1 + \cos(\theta - \gamma_n^\theta))^m, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

где γ_n^φ и γ_n^θ — сдвиг соответственно в угломестной и азимутальной плоскости n -го АЭ, D — коэффициент направленного действия, тогда $g = \sqrt{G(\theta, \varphi)}$.

Второй элемент имеет следующий радиус-вектор $\mathbf{r}_2^T = [\frac{\lambda}{4}, 0, \frac{\lambda}{4}]^T$, т.к. ширина каждого излучателя составляет половину длины волны. Расположение остальных излучателей подбирается подобным же образом.

1.2 Антенна в форме полудодекаэдра

Длина грани также равна $\lambda/2$, полудодекаэдр (рис. 1 б) имеет радиус вписанной и описанной сферы, которые соответственно равны $r_{in} = 1,1\lambda/2$ и $r_{out} = 1,4\lambda/2$. Всего элементов имеется шесть, причем по окружности пять, угол между которыми 72° , угол между верхней гранью и любой боковой (антенными элементами) составляет 116° .

Тогда направляющий вектор антенной решетки можно выразить как:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi + \varphi_1) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_1^T} \\ g_2(\theta + \theta_2, \varphi + \varphi_2) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_2^T} \\ g_3(\theta + \theta_3, \varphi + \varphi_3) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_3^T} \\ g_4(\theta + \theta_4, \varphi + \varphi_4) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_4^T} \\ g_5(\theta + \theta_5, \varphi + \varphi_5) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_5^T} \\ g_6(\theta + \theta_6, \varphi + \varphi_6) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_6^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi + \frac{\pi}{2}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(0)[0,0,r_{in}]^T} \\ g_2(\theta + \frac{\pi}{2.5}, \varphi + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2.5})[0,r_{out},\frac{r_{in}}{2}]^T} \\ g_3(\theta + 2\frac{\pi}{2.5}, \varphi + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(2\frac{\pi}{2.5})[0,r_{out},\frac{r_{in}}{2}]^T} \\ g_4(\theta + 2\frac{\pi}{2.5}, \varphi + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(3\frac{\pi}{2.5})[0,r_{out},\frac{r_{in}}{2}]^T} \\ g_5(\theta + 4\frac{\pi}{2.5}, \varphi + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(4\frac{\pi}{2.5})[0,r_{out},\frac{r_{in}}{2}]^T} \\ g_1(\theta + 5\frac{\pi}{2.5}, \varphi + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(5\frac{\pi}{2.5})[0,r_{out},\frac{r_{in}}{2}]^T} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

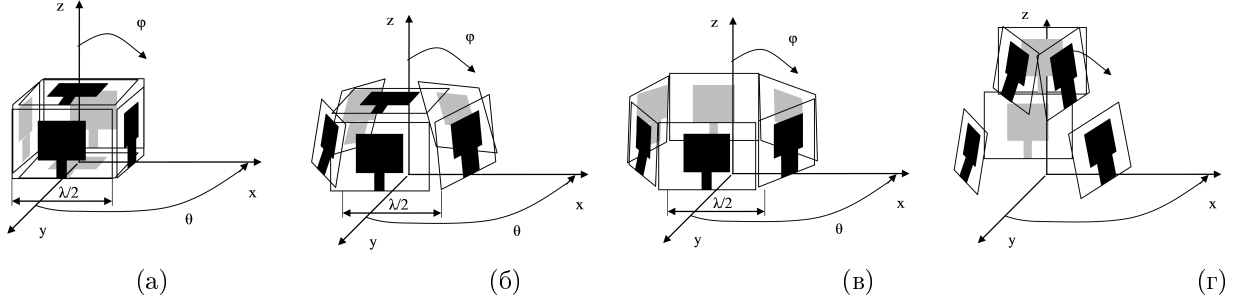


Рис. 1. Изображение антенных решеток

где $\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица поворота вокруг оси z , упрощающая построение антенной решётки сложной формы.

1.3 Антенна в форме цилиндра

В этом случае направляющий вектор m -го источника радиоизлучения на k -й АР (рис. 1 в) в терминах азимута и угла места, а также позиции элементов решетки принимает вид:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_1^T} \\ g_2(\theta + \theta_2, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_2^T} \\ g_3(\theta + \theta_3, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_3^T} \\ g_4(\theta + \theta_4, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_4^T} \\ g_5(\theta + \theta_5, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_5^T} \\ g_6(\theta + \theta_6, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_6^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(0)[0, r_{circ}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_2(\theta + \frac{2\pi}{N}, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(\frac{2\pi}{N})[0, r_{circ}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_3(\theta + 2\frac{2\pi}{N}, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(2\frac{2\pi}{N})[0, r_{circ}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_4(\theta + 3\frac{2\pi}{N}, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(3\frac{2\pi}{N})[0, r_{circ}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_5(\theta + 4\frac{2\pi}{N}, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(4\frac{2\pi}{N})[0, r_{circ}, \frac{\lambda}{4}]^T} \\ g_6(\theta + 5\frac{2\pi}{N}, \varphi) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(5\frac{2\pi}{N})[0, r_{circ}, \frac{\lambda}{4}]^T} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $r_{circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda}{2}$. Частным случаем цилиндрической антенной решетки можно рассматривать конусную АР (рис. 1 г). В таком случае конусная АР будет состоять из двух ярусов ЦИАР, каждая из которых будет содержать $N = 3$ элемента. При этом радиус нижнего яруса больше радиуса верхнего, т.е. $r_{circ1} > r_{circ2}$, а также имеется разворот патч-антенн в плоскости φ . Таким образом, направляющий вектор конусной АР будет выглядеть:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{circ1}(\theta, \varphi) \\ \mathbf{a}_{circ2}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\varphi, \theta + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(0)\mathbf{r}_1^T} \\ g_2(\varphi + \frac{2\pi}{N}, \theta + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(\frac{2\pi}{N})\mathbf{r}_1^T} \\ g_3(\varphi + 2\frac{2\pi}{N}, \theta + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(2\frac{2\pi}{N})\mathbf{r}_1^T} \\ g_4(\varphi, \theta + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(0)\mathbf{r}_2^T} \\ g_5(\varphi + \frac{2\pi}{N}, \theta + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(\frac{2\pi}{N})\mathbf{r}_2^T} \\ g_6(\varphi + 2\frac{2\pi}{N}, \theta + \frac{\pi}{6.8}) e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}_z(2\frac{2\pi}{N})\mathbf{r}_2^T} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{r}_1 = [0 \ r_{circ1} \ \frac{\lambda}{4}]^T$ и $\mathbf{r}_2 = [0 \ r_{circ2} \ \frac{3\lambda}{4}]^T$.

Как видно, при рассматриваемых размерах излучателей во всех конфигурациях антенных решеток зазор между элементами отсутствует. Однако можно достичь таких радиусов, чтобы подобрать приблизительно одинаковую площадь.

2 Граница Крамера-Рао для антенных решеток с направленными излучателями

Пусть имеется вектор $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, образующий стационарный гауссовский процесс с нулевым средним, имеющим моменты второго рода:

$$E \{ \vec{\mathbf{x}}(t) \vec{\mathbf{x}}^H(t) \} = \mathbf{R} \delta_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}) \delta_{ij}, \quad (7)$$

где \mathbf{S} — корреляционная матрица сигналов, \mathbf{A} — матрица направляющих векторов, σ^2 — мощность шума.

Функция правдоподобия отсчетов $\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \dots, \tilde{\mathbf{x}}(t_N)$, которые являются независимыми и идентично распределенными, задается:

$$l(\theta, \mathbf{S}, \sigma^2) = N \log |\mathbf{R}| + - \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^H(t_i) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(t_i) = \log |\mathbf{R}| + Tr \{ \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{R}} \}, \quad (8)$$

где $|\dots|$ — детерминант матрицы.

Важным параметром измерения, насколько хорошо функционирует тот или иной метод, является ковариационная матрица ошибок оценок, нижняя граница которой вычисляется согласно критерию Крамера-Рао (ГКР). Пусть $\hat{\eta}$ — несмещенная оценка вектора параметров η_0 , т.е. $E \{ \hat{\eta} \} = \eta_0$ на основе наблюдений \mathbf{X}_N , тогда нижняя граница Крамера-Рао задается:

$$E \{ (\hat{\eta} - \eta_0) (\hat{\eta} - \eta_0)^T \} \geq \frac{1}{-E \left\{ \frac{\partial^2 \log p(\mathbf{X}_N | \eta)}{\partial \eta \partial \eta^T} \right\}}. \quad (9)$$

Компактное выражение ГКР для P параметров M сигналов легко выводится из (9). Для случая,

когда только один параметр ($p = 1$) ассоциирован с каждым сигналом, ГКР может быть записана в виде [13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{STO} &= \\ &= \frac{\sigma^2}{2N} \frac{1}{\Re \left\{ \text{Tr} \left\{ (\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}) \circ (\mathbf{S} \mathbf{A}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S})^T \right\} \right\}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где \circ — поэлементное умножение, \mathbf{D} — матрица производных векторов (2)-(6) и \mathbf{P}_A^\perp — ортогональная проекция на нулевое подпространство A^H . Используем идею из [13] для адаптации ГКР (10) на произвольное число сигналов и их параметров (прежде всего, азимутальные и угломестные координаты). Для этого, во-первых, необходимо определить D_θ и D_φ [10]:

$$\mathbf{D}_{\theta, \varphi} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_1, \varphi_1}, & & \\ \dots, & & \\ \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_d, \varphi_d)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_d, \varphi_d} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Тогда, ковариационная матрица ошибок для 3D пеленгации:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{STO} &= \\ &= \frac{\sigma^2}{2N} \frac{1}{\Re \left\{ \text{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Xi & \Xi \\ \Xi & \Xi \end{bmatrix}^T \right\} \right\}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \mathbf{D}_\theta^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\theta, & \Lambda_2 &= \mathbf{D}_\theta^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\varphi, \\ \Lambda_3 &= \mathbf{D}_\varphi^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\theta, & \Lambda_4 &= \mathbf{D}_\varphi^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\varphi, \\ \Xi &= \mathbf{S} \mathbf{A}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Используя (1), частные производные вектора $\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)$ от θ и φ находятся как [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)}{\partial \eta} &= \frac{\partial g(\theta_m, \varphi_m) e^{j \mathbf{k}_m \mathbf{R}^T}}{\partial \eta} = \\ &= \frac{\partial g(\theta_m, \varphi_m)}{\partial \eta} e^{j \mathbf{k}_m \mathbf{R}^T} + \\ &+ g(\theta_m, \varphi_m) \left. \frac{\partial e^{j \mathbf{k}_m \mathbf{R}^T}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_m, \varphi_m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее необходимо определить выражения производных для фазовых и амплитудных составляющих. Определим производную экспоненциальной составляющей по азимуту для k -го сигнала на n -м антен-

ном элементе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{j\psi}}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial j\psi}{\partial \theta_k} e^{j\psi} = \\ &= \frac{\partial j \frac{2\pi}{\lambda} (x_n k_x + y_n k_y + z_n k_z)}{\partial \theta_k} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_n k_x + y_n k_y + z_n k_z) s} = \\ &= j \left(\frac{2\pi}{\lambda} (-x_n \sin \theta \sin \varphi + y_n \cos \theta \sin \varphi) \right) \cdot \\ &\cdot e^{j \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x_n \cos \theta \sin \varphi + y_n \sin \theta \sin \varphi + z_n \cos \varphi) \right)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Определим производную экспоненциальной составляющей по углу места k -го сигнала на n -м антенном элементе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{j\psi}}{\partial \varphi_k} &= \frac{\partial j\psi}{\partial \varphi_k} e^{j\psi} = \\ &= \frac{\partial j \frac{2\pi}{\lambda} (x_n k_x + y_n k_y + z_n k_z)}{\partial \varphi_k} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_n k_x + y_n k_y + z_n k_z) s} = \\ &= j \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x_n \cos \theta \cos \varphi + y_n \sin \theta \cos \varphi - z_n \sin \theta) \right) \cdot \\ &\cdot e^{j \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x_n \cos \theta \sin \varphi + y_n \sin \theta \sin \varphi + z_n \cos \varphi) \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Определим производную амплитудной составляющей по азимуту и углу места для k -го сигнала на n -м антенном элементе соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n(\varphi_k, \theta_k)}{\partial \theta_k} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{D}{2^{2m}} (1 + \sin(\varphi_k - \varphi_n))^m (1 + \cos(\theta_k - \theta_n))^m = \\ &= \frac{D}{2^{2m}} (1 + \sin(\varphi_k - \varphi_n))^m \frac{\partial}{\partial \theta_k} [(1 + \cos(\theta_k - \theta_n))^m] = \\ &= \frac{D}{2^{2m}} (1 + \sin(\varphi_k - \varphi_n))^m \cdot \\ &\cdot \left[m(1 + \cos(\theta_k - \theta_n))^{m-1} (-\sin(\theta_k - \theta_n)) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

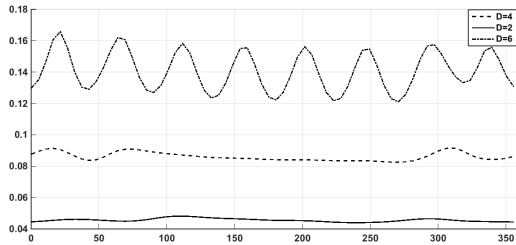
и

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n(\varphi_k, \theta_k)}{\partial \varphi_k} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \frac{D}{2^{2m}} (1 + \sin(\varphi_k - \varphi_n))^m (1 + \cos(\theta_k - \theta_n))^m = \\ &= \frac{D}{2^{2m}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi_k} (1 + \sin(\varphi_k - \varphi_n))^m \right] (1 + \cos(\theta_k - \theta_n))^m = \\ &= \frac{D}{2^{2m}} \left[m(1 + \sin(\varphi_k - \varphi_n))^{m-1} (-\varphi_n) \cos(\varphi - \varphi_k) \right] \cdot \\ &\cdot (1 + \cos(\theta_k - \theta_n))^m. \end{aligned} \quad (17)$$

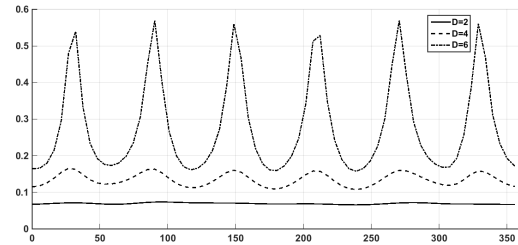
Подставляя выражения (14)-(17) в (13), определим матрично-векторное выражения для вычисления границы Крамера-Рао для оценки произвольного числа источников по азимуту и углу места произвольной антенной решеткой с учетом КНД антенн.

3 Теоретическое исследование

Для начала рассмотрим две цилиндрические антенные решетки из шести и восьми элементов соответственно для определения влияния КНД на точность пеленгации, воспользовавшись (12)-(13),



(а)



(б)

Рис. 2. ГКР для цилиндрической АР из а) 8 и б) 6 элементов

Далее предположим, что СКО определяется только координатой по углу места. В этом случае положение в азимутальной плоскости фиксировано углом 0° , при этом угловая координата изменяется от 0° до 90° .

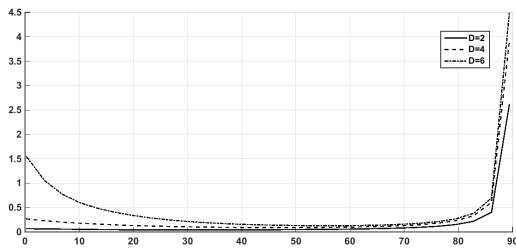


Рис. 3. ГКР для изменяющейся угловой координаты

Из графиков на рис. 2-3 можно заметить, что при увеличении КНД отдельных антенн ошибки оценок координат ИРИ становятся более очевидными. Такое поведение вызвано тем, что сигнал может попадать в нули и максимумы ДН антенн. Кроме того, видно, что угловая координата сигнала близкая к 45° будет приводить к меньшим ошибкам радиопеленгации. И наоборот, при приближении к $\varphi = 90^\circ$ или 0° ошибки оценок стремительно становятся больше в несколько раз. Можно также сказать, что КНД равный четырем и положение сигнала близкое к $\varphi = 45^\circ$ дают лучшую точность. В то же самое время, ошибки в угловой плоскости остаются практически неизменными в зависимости от КНД.

Рассмотрим теперь ГКР в зависимости от КНД для цилиндрической, кубической, конической и в форме шара антенных решеток, каждая из которых состоит из шести элементов (рис. 1).

Из рис. 4 можно сделать несколько выводов, во-первых, амплитуда колебаний ошибок радиопеленгации становится более очевидной и острой, если

более наглядно. В этом случае коэффициент направленного действия изменяется от двух до шести. Кроме того, угловая координата источника фиксирована и равна 45° , при этом азимут изменяется в пределах от 0° до 360° .

КНД возрастает от 2 до 6. Во-вторых, лучшей конфигурацией антенной решетки для радиопеленгации с направленными излучателями является сферическая (полудодекаэдр, рис. 1 б), при этом, распределение ошибок носит более равномерный характер, даже при высоком КНД (рис. 4 в). В-третьих, конусная и кубическая антенные решетки вызывают появление значительных скачков в точности в зависимости от положения ИРИ в азимутальной плоскости.

4 Практическое исследование на основе моделирования

В этом разделе представлены несколько результатов численного моделирования для иллюстрации эффективности рассматриваемых конфигураций антенных решеток для задачи радиопеленгации со сверхразрешением методом MUSIC [4]. Все источники моделируются как некоррелированные комплексные сигналы, а аддитивный шум во всех каналах решетки моделируется как комплексный белый гауссовский шум с одинаковой дисперсией. Рассмотрим ситуацию, когда имеется один источник радиосигнала, координата которого по углу места составляет $\varphi = 45^\circ$, при этом происходит смещение по азимуту в диапазоне $\theta = 0^\circ - 90^\circ$, отношение сигнал-шум равно 15 дБ, количество отсчетов $K = 100$. При этом на каждом шаге осуществляется вычисление среднеквадратической ошибки определения координат методом MUSIC, число испытаний L в определенной точке — 500, сканирование пространства — последовательное:

$$СКО_{\eta}(\varphi_m, \theta_m) = \frac{1}{L-1} \sqrt{\sum_{l=1}^L (\eta - \hat{\eta}_l)^2} \Big|_{\eta=\theta, \varphi},$$

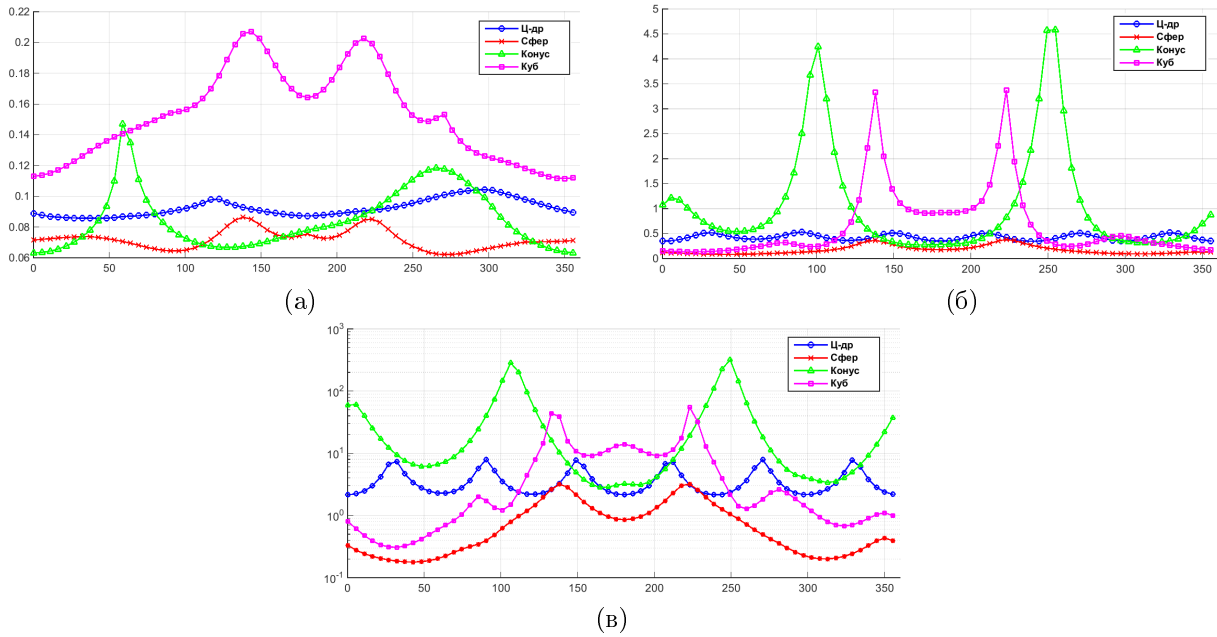


Рис. 4. ГКР антенных решеток для КНД а) $D=2$, б) $D=4$ и в) $D=6$

где CKO_{η} — СКО ошибки пеленга по азимуту и углу места соответственно, \wedge — оценка координаты. Затем вычисляется среднее СКО:

$$CKO_{\eta} = \frac{\sum_{\eta} (\varphi_m, \theta_m)}{N-1} \Big|_{\eta=\theta, \varphi},$$

а также разность между максимальным и минимальным СКО по азимуту $\Delta\theta$ и углу места $\Delta\varphi$, т.к. источник сигнала может попасть как в нуль, так и в максимум диаграммы направленности антенной решётки, что приведёт к значительным изменениям в точности метода MUSIC.

Обозначения: “ц-др” — ЦиАР радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda}{2}$, “ц-др” — ЦиАР радиуса $1,03\lambda/2$, “куб” — кубическая АР с длиной стороны $\frac{\lambda}{2}$, “куб2” — кубическая АР с длиной стороны λ , “сфер” — полусферическая АР, “кон” — конусная АР, состоящая из двух ЦиАР из трёх АЭ, причём радиус нижнего кольца $1,03\lambda/2$, а верхнего — $\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{8}$. Цилиндрическая АР и кубическая АР взяты двух вариантов: в первом случае зазор между антеннами отсутствует, а во втором — радиус решетки соответствует радиусу полусферической АР, имеющей максимальный радиус из всех рассматриваемых конфигураций. Из рис. 5 видно, что наименьшими ошибками обладает полусферическая АР, что согласуется с рис. 4.

Далее оценим разрешающую способность рассматриваемых конфигураций АР в зависимости от коэффициента направленного действия. Координаты сигналов считаются разрешенными, если имеются два отчетливых пика на пеленгационном рельефе. Азимутальная координата первого ИРИ определяется как 0° , а координата второго смещается от 11° до 35° , при этом угол места составляет 45° . Для каждой позиции полное число итераций составляет 500, отношение сигнал-шум равен 15 дБ. В

соответствии с данными параметрами происходит оценка вероятности разрешения двух источников радиосигналов.

Из рис. 6 видно, что лучшей разрешающей способностью обладают полусферическая для антенных элементов с КНД=8 и коническая для антенных элементов с КНД=2 решетки. Однако лучшим выбором представляется больший КНД в целях получения максимального усиления в случае применения диаграммообразования.

Заключение

Конформные или выпуклые антенные решетки состоят из антенных элементов, расположенных на искривленной поверхности. Такие конфигурации представляют исследовательский интерес для задач радиопеленгации и беспроводной коммуникации, поскольку способны обрабатывать сигналы в трехмерной плоскости (по азимуту и углу места) и могут быть установлены на сложные по своей форме объекты, такие как автомобили, самолёты и т.д. В работе проведено исследование метода оценки координат ИРИ со сверхразрешением MUSIC в составе антенных решеток различной конфигурации в зависимости от коэффициента направленного действия излучателей. В качестве исследуемых форм выбраны кольцевые (цилиндрические), кубические, сферические и конические антенные решетки с одинаковым количеством антенных элементов, а также сравнимой площади. Были оценены среднеквадратические отклонения ошибок азимутальных и угломестных координат, а также разность между их максимальными и минимальными значениями, чтобы принять во внимание форму диаграммы направленности патч-антенн. Установлено, что мини-

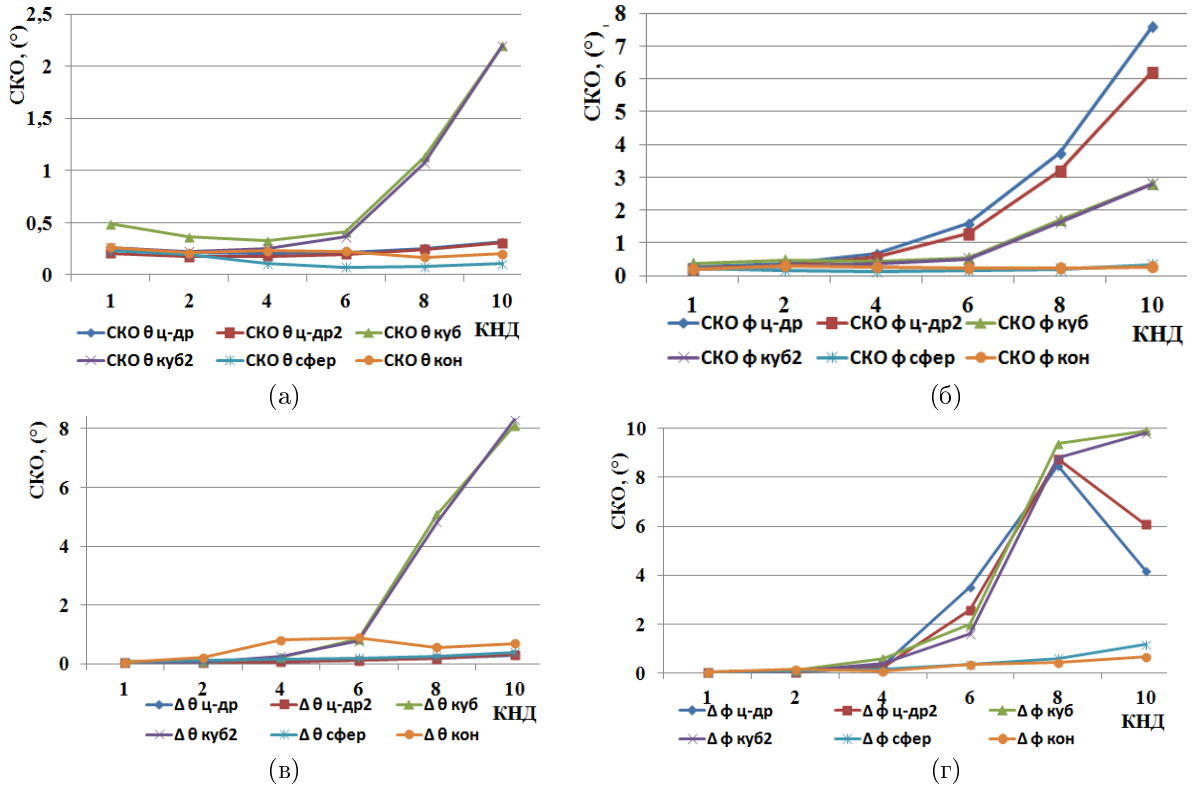


Рис. 5. Графики зависимости а) $SКО_\varphi$, б) $SКО_\theta$, в) $\Delta\varphi$ и г) $\Delta\theta$ в зависимости от коэффициента направленного действия.

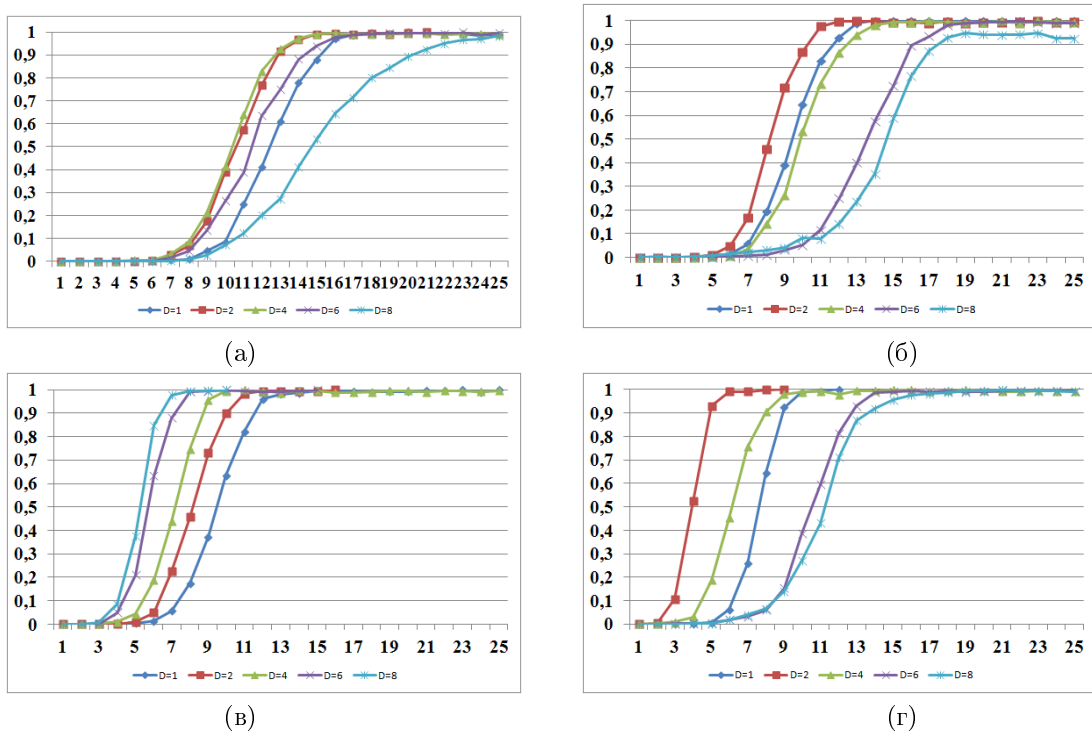


Рис. 6. Графики зависимости вероятности разрешения целей а) цилиндрической АР, б) кубической АР, в) полусферной и г) конической АР в зависимости от коэффициента направленного действия.

мальними помилками мають решітки в формі полусфери.

Произведена оцінка ймовірності розрішення сигналів методом MUSIC совместно с випуклими антенними решітками. Таким образом, был реализован комплексный статистический анализ радиопеленгации со сверхразрешением по азимуту и углу места для конформных антенн в зависимости от направленности составляющих их антенных элементов. Установлено, что коэффициент направленности равный шести является очень предпочтительным для решетки в форме полусферы, поскольку патч-антенну легко реализовать, а СКО довольно низка, при этом может быть достигнута абсолютная вероятность разрешения двух источников. Кроме того, для числа АЭ, равных шести, КНД=4-6 является рекомендованной для кубических и цилиндрических АР.

Благодарность

Работа поддержана Российским научным фондом. Номер проекта - 18-71-00080.

References

- [1] Chetan R.D. and Jadhav A.N. (2011) Simulation study on DOA estimation using MUSIC algorithm. *Intl. J. Tech. Eng. Sys.*, Vol. 2, no. 1., pp. 54-57.
- [2] Ikeda K., Nagai J., Fujita T., Yamada H., Hirata A. and Ohira T. (2004) DOA estimation by using MUSIC algorithm with a 9-elements rectangular ESPAR antenna. *Proc. of Intl. Symp. on Antennas and Propagat.*, pp. 45-48.
- [3] Sun C. and Karmakar N. C. (2004) Direction of arrival estimation based on a single port smart antenna using MUSIC algorithm with periodic signals. *International Journal of Signal Processing*, Vol. 1, No 2, pp. 153-162.
- [4] Schmidt R. (1986) Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, Iss. 3, pp. 276-280. DOI: 10.1109/tap.1986.1143830
- [5] Belhouf F., Shubair R. and Ai-Mualla M. (2003) Modelling and performance analysis of DOA estimation in adaptive signal processing arrays. *10th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, 2003. ICECS 2003. Proceedings of the 2003*. DOI: 10.1109/icecs.2003.1302046
- [6] Cadzow J. (1988) A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 36, Iss. 7, pp. 965-979. DOI: 10.1109/29.1618
- [7] Abouda A., El-Sallabi H. and Haggman S. (2005) Impact of Antenna Array Geometry on MIMO Channel Eigenvalues. *2005 IEEE 16th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*. DOI: 10.1109/pimrc.2005.1651500
- [8] Nechaev Yu.B. and Peshkov I.V. (2016) Building circular, octagonal, hexagonal and rectangular antenna arrays for direction-of-arrival via superresolution method MUSIC. *Radiotekhnika-Radioengineering*, No 6, pp. 137-142.
- [9] Bo W. (2006) Realization and Simulation of DOA estimation using MUSIC Algorithm with Uniform Circular Arrays. *The 2006 4th Asia-Pacific Conference on Environmental Electromagnetics*. DOI: 10.1109/ceem.2006.258099
- [10] Nechaev Yu. B. and Peshkov I. V. (2016) Evaluating Cramer-Rao Bound for 2D direction-finding via planar antenna arrays. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparotobudov.*, Iss. 67, pp. 12-17. DOI: 10.20535/RADAP.2016.67.12-17
- [11] Jackson B.R., Rajan S., Liao B.J. and Wang S. (2015) Direction of Arrival Estimation Using Directive Antennas in Uniform Circular Arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 63, Iss. 2, pp. 736-747. DOI: 10.1109/tap.2014.2384044
- [12] Mohammadi S., Ghani A. and Sedighy S.H. (2018) Direction-of-Arrival Estimation in Conformal Microstrip Patch Array Antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 66, Iss. 1, pp. 511-515. DOI: 10.1109/tap.2017.2772085
- [13] Chan A. (1995) MUSIC and maximum likelihood techniques on two-dimensional DOA estimation with uniform circular array. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, Vol. 142, Iss. 3, pp. 105. DOI: 10.1049/ip-rsn:19951756
- [14] Nechaev Yu.B., Algazinov E.K. and Peshkov I.W. (2018) Estimation of the Cramer-Rao Bound for Radio Direction-Finding on the Azimuth and Elevation of the Cylindrical Antenna Arrays. *2018 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*. DOI: 10.1109/tsp.2018.8441419

Оцінка границі Крамера-Рао випуклих антенних решіток з напрямленими випромінювачами для радіопеленгації

Нечаєв Ю. Б., Пешков І. В., Фортунова Н. А.

Вступ. Оцінка кутових координат джерел радіовипромінювання становить серйозний дослідницький інтерес в різних сферах. Так, в бездротових телекомунікаційних системах інформація про координати дозволяє здійснити просторове розділення для збільшення кількості користувачів, котрі можуть функціонувати одночасно. Досліджено вплив коефіцієнта спрямованої дії окремого антенного елемента на точність визначення кутових координат джерел радіовипромінювання кільцевої, кубічної і сферичної антенних решіток, що складаються з спрямованих випромінюючих елементів, які знайшли широке застосування в сучасних бездротових комунікаційних технологіях.

Теоретичні результати. Для коректного функціонування високоточних алгоритмів радіопеленгації в складі розглянутих решіток здійснено виведення точних виразів, що описують амплітудно-фазовий розподіл електричного поля решіток, т.зв. напрямлюючі вектори.

Експериментальні результати. Здійснено теоретичне дослідження роботи даних антенних решіток за допомогою оцінки границі Крамера-Рао, а також комп'ютерне моделювання з реалізацією методу зі зверх розрізненням MUSIC. Визначено межі зміни коефіцієнта спрямованої дії окремого елемента, за якого досягається максимальна точність оцінки кутових координат. Зі збільшенням коефіцієнту підсилення окремих антен точність пеленгації може значно змінюватися залежно

від азимутального положення сигналу і прийнятим вибором коефіцієнта спрямованої дії. Проведено оцінку роздільної здатності опуклих або об'ємних антенних решіток в залежності від коефіцієнта спрямованої дії.

Висновок. В цілому встановлено, що найкращою конфігурацією антенної решітки є сферична. З підвищенням підсилення окремих антен точність пеленгації може значним чином змінюватися залежно від азимутального положення сигналу і прийнятим вибором коефіцієнта спрямованої дії є рівним від чотирьох до шести.

Ключові слова: радіопеленгація; спрямовані випромінювачі; зверх роздільна здатність; цифрова антенна решітка; кільцеві антенні решітки; об'ємна антена; КНД

Evaluating Cramer-Rao Bound for Conformal Antenna Arrays with Directional Emitters for Doa-Estimation

Nechaev Yu. B., Peshkov I. V., Fortunova N. A.

Introduction. The direction-of-arrival estimation of signal sources is of serious research interest in various fields. As an example, the coordinate information in three-dimensional space can be used for spatial diversity and filtering to increase concurrent users. The influence of the directivity coefficient of a separate antenna element on the accuracy of determining the angular coordinates of radio sources of circular, cubic and spherical antenna arrays consisting of directional radiating elements that have found the widest application in modern wireless communication technologies is investigated.

Theoretical results. For the correct functioning of advanced radio direction-finding algorithms along with the antenna arrays under consideration the accurate expressions describing the amplitude-phase distribution of the

electromagnetic field of the arrays have been derived, so-called steering vectors. The Cramer-Rao lower bound for estimating errors and accuracy of direction-of-arrival estimation is discussed for a number planar waves arriving on an antenna array consisting of directional elements.

Experimental results. A theoretical study of the operation of these antenna arrays using the Cramer-Rao lower bound was carried out, as well as computer simulations with the implementation of the MUSIC superresolution method. The influence of the directivity factor of the individual antenna element on the accuracy of the direction-of-arrival estimation of the radio emission sources by using the circular (cylindrical), cubic and spherical antenna arrays consisting of the directional antenna elements was investigated. The limits of the change of the coefficient of directional action of a separate element, at which the maximum accuracy of an estimation of angular coordinates is achieved, is determined. It is shown that further increasing the directivity factor of each antenna element makes the mean square error in the determination of the coordinates of the signals increase as well. The estimation of the resolution of conformal antenna arrays is carried out depending on the directional factor of each antenna coefficient. It is found that the best configuration is spherical.

Conclusions. Thus, a comprehensive statistical analysis of radio direction finding with the azimuth and elevation for the conformal antennas depending on the directivity of the antenna elements constituting them was implemented. With an increase in the gain of individual antennas, the accuracy of direction finding can vary significantly depending on the azimuthal position of the signal and an acceptable choice of directional coefficient is four to six.

Key words: radio remote control; super-resolution; digital antenna array; circular antenna arrays; directional emitters; directivity