

## РОЗДІЛ 4. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

УДК 330.46(063)

### ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

**Меркулова Т.В., д.э.н., доцент**

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина*

**Приходько А.И., аспирант**

*Институт проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков*

Рассмотрены возможности построения и применения линейных эконометрических моделей комплексных переменных. На основе адаптации метода наименьших квадратов проведена оценка параметров этих моделей на макроэкономических данных США и Украины, представлены выводы сравнительного анализа результатов моделирования с помощью функций действительных и комплексных переменных. Отмечены основные проблемы, возникающие при использовании моделей комплексных переменных и требующие дальнейшего изучения и экономической интерпретации.

**Ключевые слова:** эконометрическая модель, функции действительных переменных, функции комплексных переменных, метод наименьших квадратов, оценка параметров, ошибка аппроксимации.

Современные математические модели, применяемые для описания и прогнозирования экономических процессов на разных уровнях, представляют собой широкий диапазон функций действительных переменных. Одно из направлений, где они широко используются, – моделирование макроэкономических процессов, которое является эффективным инструментом анализа и прогноза при формировании экономической политики государства.

Современная эконометрика располагает обширным арсеналом средств и методов построения моделей и оценки их параметров, однако моделирование взаимосвязей экономических переменных ограничено множеством элементарных функций действительных переменных [1; 2]. Расширение инструментальной базы эконометрического моделирования возможно за счет использования функций комплексных переменных, которые позволяют рассматривать взаимосвязи между показателями путем объединения их в одну комплексную переменную и использовать ее в качестве зависимой переменной, в отличие от функций действительных переменных, которые моделируют зависимость только одного показателя.

Следует отметить, что при внешней простоте и схожести с моделями действительных переменных применение комплексных переменных влечет за собой рассмотрение совершенно новых видов функциональных связей между переменными. Параллельно с этим встает вопрос экономической интерпретации комплексных переменных и ситуаций, возникающих в связи с существованием и свойствами мнимой единицы. Эти и многие другие вопросы, связанные с применением комплексных чисел в моделировании, требуют детального рассмотрения и изучения.

К настоящему времени использование теории комплексных чисел в моделировании экономики очень ограничено. Комплексные числа используются при исследовании динамики систем, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями, при описании колебательных процессов [3]. Пионерными работами, в которых обосновывается перспективность расширения сферы применения комплексных чисел и методов комплексного анализа, являются работы С.Г. Светунькова по эконометрии комплексных переменных [4; 5; 6].

В нашем анализе мы опирались на общий подход и выводы, представленные в этих работах. В задачи исследования входило: рассмотрение линейной функции комплексных переменных и адаптация метода наименьших квадратов для оценки ее параметров, апробация ее на макроэкономических данных и сравнительный анализ результатов моделирования с помощью функций действительных и комплексных переменных.

Рассмотрим простейший случай эконометрической модели, которая использует комплексные переменные

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) + (e_{rt} + ie_{it}),$$

где  $e_{rt} + ie_{it}$  – ошибка, также имеющая комплексный вид,  $t = 1, \dots, N$ .

Для оценки параметров этой модели по данным выборочных наблюдений используем метод наименьших квадратов, в котором, как и в случае действительных переменных, критерием выступает минимизация квадрата нормы вектора ошибок

$$\|e\|^2 = \|e_r + ie_i\|^2 \rightarrow \min, \text{ где } e = e_r + ie_i \text{ – } N\text{-мерный комплексный вектор.}$$

Этот критерий имеет достаточно прозрачную интерпретацию: чем меньше норма комплексной ошибки, тем меньше ее расстояние до нуля, поэтому выбираются оценки, при которых сумма расстояний ошибок до нуля минимальна. В работах С.Г. Светунькова оценка параметров регрессии проводится, исходя из минимизации суммы квадратов ошибок аппроксимации [5, с. 68-69]. Заметим, что в данном случае минимизируемая функция является функцией действительных переменных, как и для случая обычной линейной регрессии.

Необходимые условия экстремума позволяют получить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it} = \sum_t y_{rt} \\ a_1 n + b_0 \sum_t x_{it} + b_1 \sum_t x_{rt} = \sum_t y_{it} \\ a_0 \sum_t x_{rt} + a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) = \sum_t y_{rt} x_{rt} + \sum_t y_{it} x_{it} \\ -a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) = \sum_t y_{it} x_{rt} - \sum_t y_{rt} x_{it} \end{cases}$$

Решая систему, получаем оценки параметров линейной комплекснозначной модели:

(Термин предложен С.Г. Светуньковым)

$$\hat{b}_1 = \frac{n \left( \sum_t y_{it} x_{rt} - \sum_t y_{rt} x_{it} \right) + \sum_t x_{it} \cdot \sum_t y_{rt} - \sum_t x_{rt} \cdot \sum_t y_{it}}{n \left( \sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \right) - \left( \sum_t x_{rt} \right)^2 - \left( \sum_t x_{it} \right)^2}$$

$$\hat{b}_0 = \frac{n \left( \sum_t y_{rt} x_{rt} + \sum_t y_{it} x_{it} \right) - \sum_t x_{it} \cdot \sum_t y_{it} - \sum_t x_{rt} \cdot \sum_t y_{rt}}{n \left( \sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \right) - \left( \sum_t x_{rt} \right)^2 - \left( \sum_t x_{it} \right)^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \cdot \sum_t y_{it} - \sum_t x_{rt} \cdot \left( \sum_t y_{it} x_{rt} - \sum_t y_{rt} x_{it} \right) - \sum_t x_{it} \cdot \left( \sum_t y_{rt} x_{rt} + \sum_t y_{it} x_{it} \right)}{n \left( \sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \right) - \left( \sum_t x_{rt} \right)^2 - \left( \sum_t x_{it} \right)^2}$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \cdot \sum_t y_{rt} - \sum_t x_{rt} \cdot \left( \sum_t y_{rt} x_{rt} + \sum_t y_{it} x_{it} \right) + \sum_t x_{it} \cdot \left( \sum_t y_{it} x_{rt} - \sum_t y_{rt} x_{it} \right)}{n \left( \sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \right) - \left( \sum_t x_{rt} \right)^2 - \left( \sum_t x_{it} \right)^2}$$

Таким образом, получаем следующее регрессионное уравнение

$$y_r + i \cdot y_i = (\hat{a}_0 + i \cdot \hat{a}_1) + (\hat{b}_0 + i \cdot \hat{b}_1)(x_{rt} + i \cdot x_{it}).$$

Данная модель была использована в качестве макроэкономической производственной функции, и полученные формулы для оценки ее параметров апробированы на статистических данных США и Украины. Был проведен ряд вычислительных экспериментов, чтобы оценить описательные и прогностические способности этой модели в сравнении с моделями действительных переменных.

*Моделирование динамики макропоказателей США.* Для сравнения были рассмотрены следующие модели:

○ модель 1 – динамизированная функция Кобба-Дугласа

$$y = \gamma \cdot e^{\beta \cdot t} K^\alpha L^{1-\alpha}$$

○ модель 2 – линейная модель действительных переменных

$$y = a_0 + a_1 K + a_2 L$$

○ модель 3 – линейная модель комплексных переменных

$$y_r + i \cdot y_i = (a_0 + i \cdot a_1) + (b_0 + i \cdot b_1)(K + i \cdot L).$$

Для оценки параметров моделей использована статистика США по ВВП (валовой национальный продукт,  $y_r$ ), основному капиталу ( $K$ ) и затратам труда ( $L$ ) за период 1930 – 1954 гг. [7; 8]. Оценка прогностической способности проводилась на интервале 1955 – 1965 гг. Поскольку в действительности зависимая переменная представлена только реальной частью (ВВП), то при оценке параметров модели комплексных переменных было положено  $y_{it} = 0, t = 1, \dots, N$ .

Для нахождения параметров моделей действительных переменных был также применен метод наименьших квадратов, при этом для производственной функции Кобба-Дугласа сначала была проведена линеаризация. В результате были получены следующие модели:

○ модель 1  $y = 1.1 \cdot 10^{-11} \cdot e^{0.013 \cdot t} K^{0.221} L^{0.779} \quad (R^2 = 0,990)$

○ модель 2  $y = -12449 + 0.104 \cdot K + 0.617 \cdot L \quad (R^2 = 0,999)$

○ модель 3  $y_r + i \cdot y_i = (-4474 - i \cdot 4201) + (0.287 - i \cdot 0.105)(K + i \cdot L).$

Модель 3 можно представить также в виде системы уравнений действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = -4474 + 0.287 \cdot K + 0.105 \cdot L \\ y_i = -4201 - 0.105 \cdot K + 0.287 \cdot L \end{cases}$$

В комплекснозначной модели интерес представляет ошибка только действительной части. Для оценки ошибки аппроксимации модели использована следующая формула:

$$\text{Ошибка} = \left| \frac{\text{ВВП}_\phi - \text{ВВП}_m}{\text{ВВП}_m} \right|,$$

где  $\text{ВВП}_\phi$  – фактическое значение ВВП,  $\text{ВВП}_m$  – модельное значение ВВП.

Средняя ошибка на интервале оценивания имеет значение в модели 2 2,0%, в модели 1 – 2,1%, в модели 3 – 4%, т.е. линейная модель показывает наилучшую описательную способность (рис.1). Однако, на конце интервала оценивания (последние 10 лет) линейная модель комплексных переменных дает наименьшие ошибки, что позволило ожидать более точных прогнозов по сравнению с другими моделями. Это подтвердилось расчетами (табл.1).

На протяжении всего периода прогнозирования комплекснозначная модель имеет среднюю ошибку прогнозирования меньше, чем две другие модели, а линейная модель действительных переменных, являясь наиболее точной на первом этапе, полностью не оправдывает себя при прогнозировании.

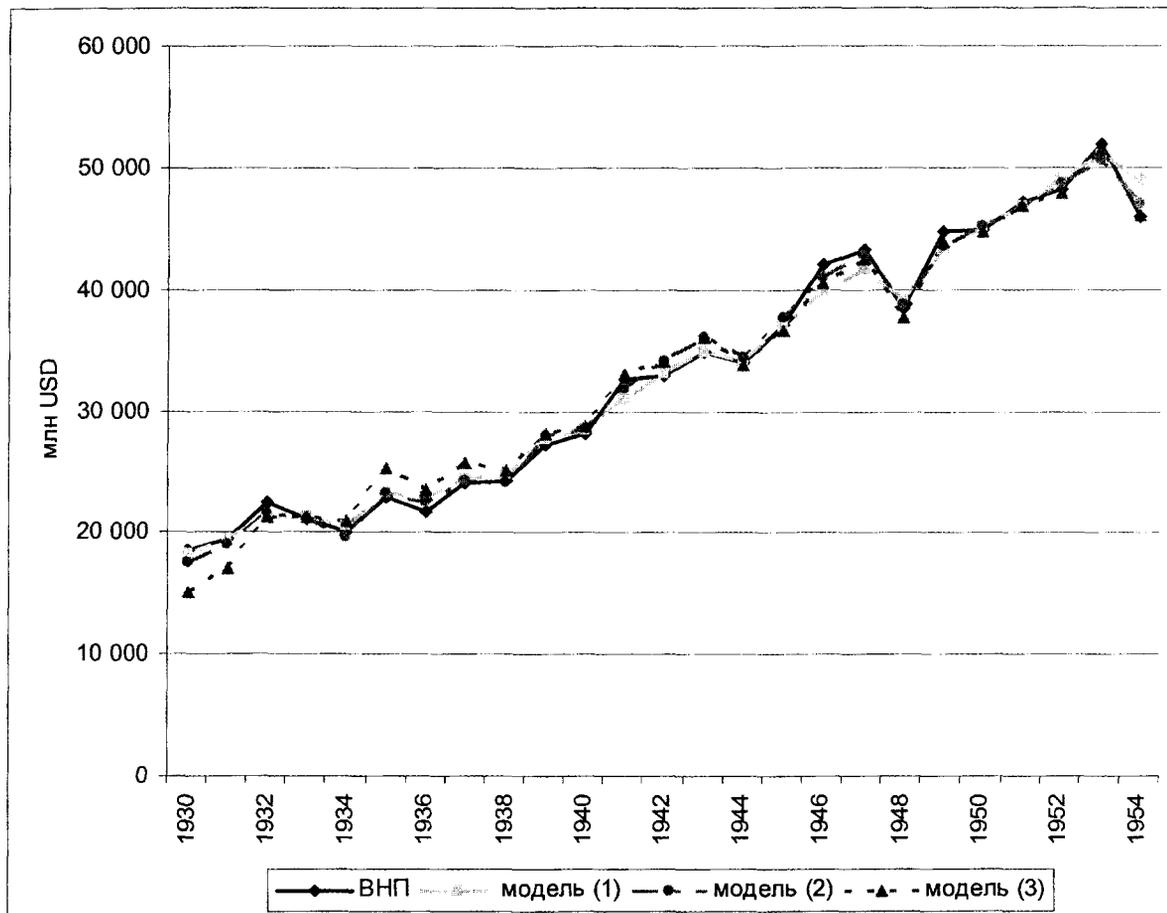


Рис.1. Фактические и модельные данные на интервале оценивания

Таблица 1

Прогнозирование ВНП США

Год	ВНП	модель (1)	модель (2)	модель (3)	Абсолютная ошибка модели (1)	Абсолютная ошибка модели (2)	Абсолютная ошибка модели (3)
1955	46 676	49 702	47 210	47 063	6,5%	1,1%	0,8%
1956	56 293	56 245	54 461	55 733	0,1%	3,3%	1,0%
1957	52 695	57 046	54 296	52 954	8,3%	3,0%	0,5%
1958	56 365	57 998	54 859	56 393	2,9%	2,7%	0,0%
1959	58 985	57 654	54 010	58 627	2,3%	8,4%	0,6%
1960	59 734	59 211	54 995	59 886	0,9%	7,9%	0,3%
1961	58 698	54 036	48 540	55 111	7,9%	17,3%	6,1%
1962	62 084	58 930	52 939	57 510	5,1%	14,7%	7,4%
1963	71 285	65 974	59 871	64 318	7,5%	16,0%	9,8%
1964	74 284	65 588	58 999	66 384	11,7%	20,6%	10,6%
1965	75 481	68 915	61 581	68 354	8,7%	18,4%	9,4%
<b>Средняя ошибка прогноза</b>					<b>5,6%</b>	<b>10,3%</b>	<b>4,2%</b>

Отметим также, что, начиная с 7 года прогнозирования, наблюдается плавное увеличение ошибки комплекснозначной линейной функции и скачкообразное изменение ошибки функции Кобба–Дугласа. Данный факт свидетельствует о возможности появления внешнего фактора, повлиявшего на более быстрый рост ВНП, и комплекснозначная модель улавливает общую динамику, а кривая функции Кобба–Дугласа имеет свое, отличное от динамики реальных данных, направление (рис. 2).

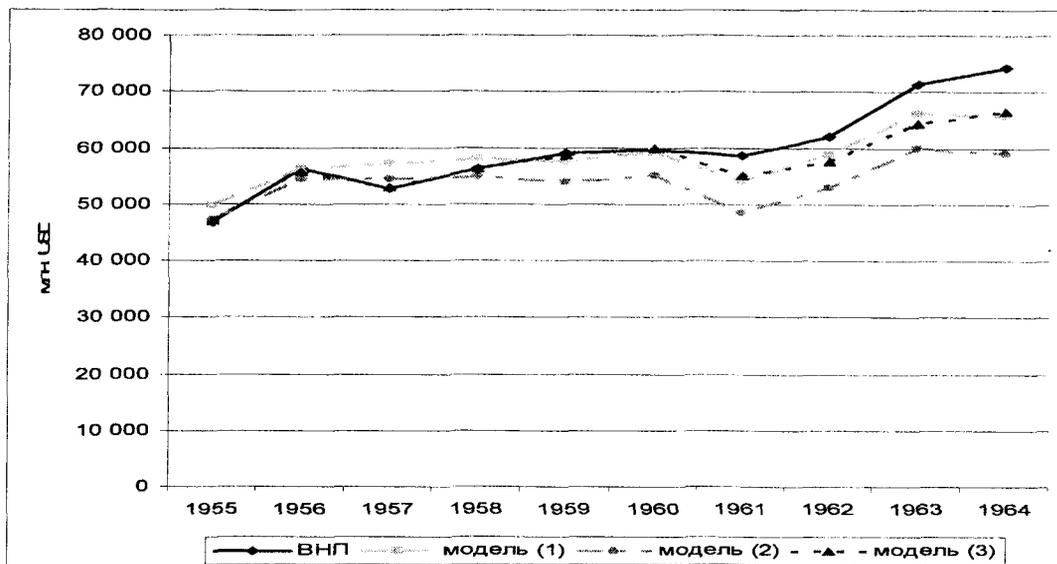


Рис. 2. Фактические и модельные данные на интервале прогнозирования

*Моделирование динамики макропоказателей Украины.* Для апробации линейной комплекснозначной модели с двумя зависимыми переменными был проведен эксперимент по моделированию динамики конечного потребления и валового накопления (части ВВП), в зависимости от основного капитала и трудовых ресурсов:

$$y_r + i \cdot y_i = (a_0 + i \cdot a_1) + (b_0 + i \cdot b_1)(L + i \cdot K),$$

$y_r$  – расходы на конечное потребление, млн. грн.

$y_i$  – валовое накопление, млн. грн.

$K$  – основной капитал, млн. грн.

$L$  – занятое население в возрасте 15-70 лет, тыс. чел.

Оценка параметров проводилась на интервале 2000–2007 гг. [9]. Применяв метод наименьших квадратов, получили уравнение

$$y_r + i \cdot y_i = -173081 - i \cdot 78292 + (0.140 - i \cdot 0.367)(L + i \cdot K).$$

Модель дает следующие средние значения ошибки: для потребления (действительная часть зависимой переменной) – 5,3%, для накопления (мнимая часть зависимой переменной) – 5,5%. Графически результаты представлены на рис. 3–4.

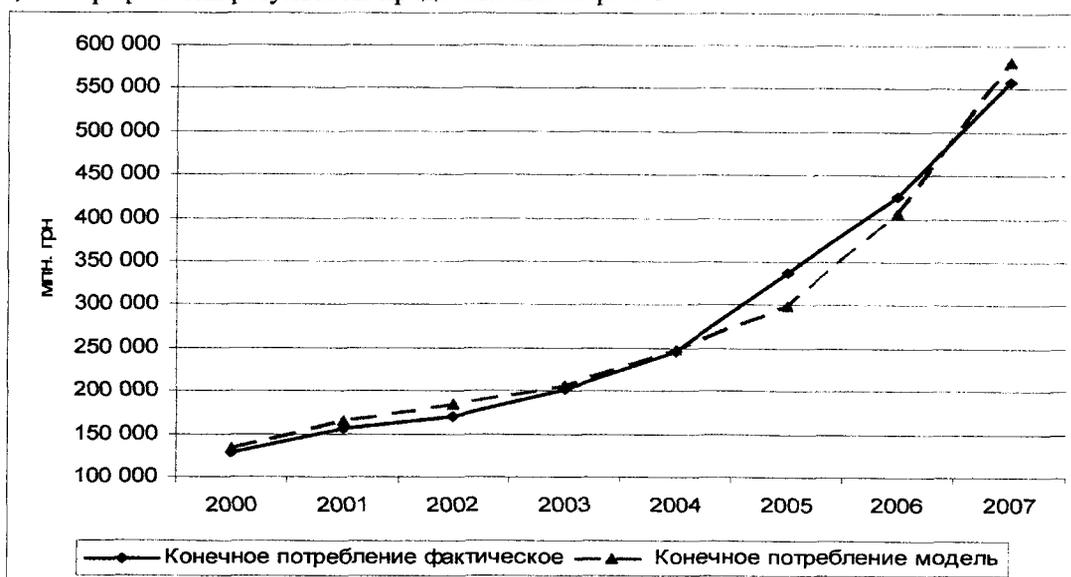


Рис. 3. Динамика конечного потребления (Украина)

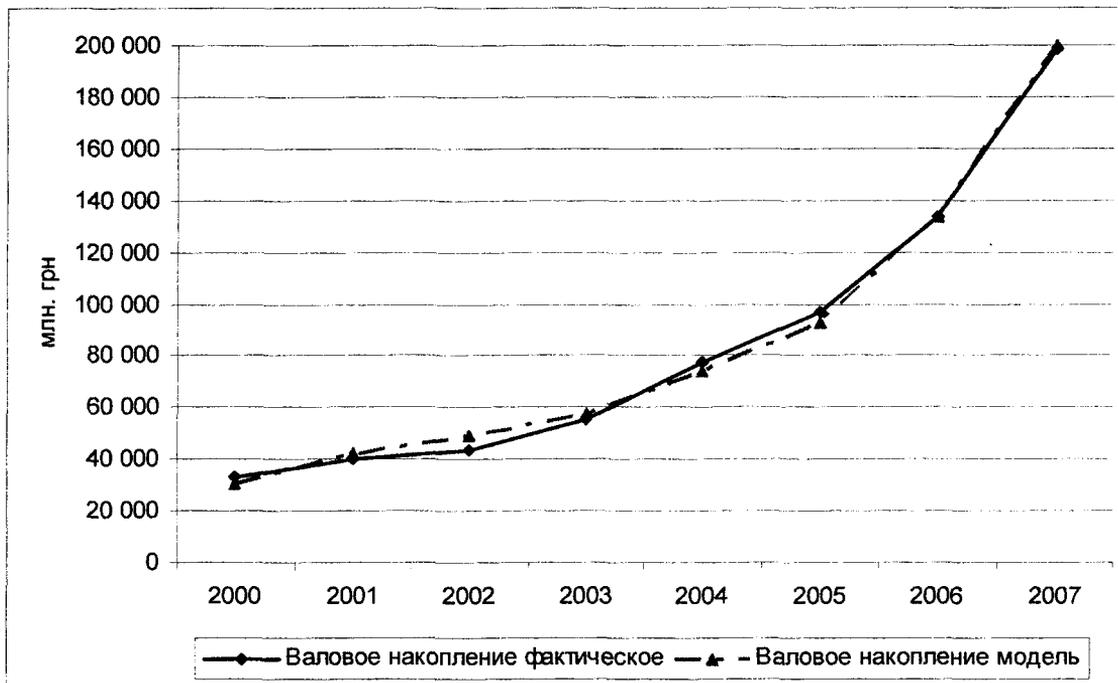


Рис. 4. Динаміка валового накоплення (Україна)

При побудові двох незалежних лінійних моделей дійсних змінних окремо для кожного показателя, т.е. для витрат і накоплення, отримали середні помилки 3,7% і 3,3% відповідно, т.е. на 1,6% і 2,1% менше, ніж в комплексному випадку. Однак, як показує експеримент з моделлю США, на основі цього не можна робити однозначний висновок про кращу прогностичну здатність моделей.

Слід відзначити важливу проблемну властивість комплекснозначних моделей. При переміщенні місць факторів, що відповідають дійсній і уявній частинам комплексних змінних, змінюються параметри моделі, і їх вплив на пояснювані змінні також змінюється з точністю до знаку. Це посилює важливість ретельного теоретичного обґрунтування вибору факторів і характеру їх зв'язку при побудові моделі.

К основним результатам проведеного дослідження належить адаптація методу найменших квадратів для оцінки параметрів моделі комплексних змінних і застосування її для побудови макроекономічної виробничої функції. Чисельні експерименти на статистичних даних США і України і порівняльний аналіз результатів різних моделей показали непогані описальні і особливо прогностичні властивості комплекснозначних моделей. К основним проблемним аспектам застосування цих моделей належить змістовна інтерпретація і обґрунтування показників, що об'єднуються в комплексну змінну. Потрібно продовжити розробку математичного апарату цього нового напрямку в економічному моделюванні.

#### Література:

1. Айвазян С.А. Прикладна статистика і основи економетрії/ С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – ГУ-ВШЕ. – М.: Юніті, 1998. – 1022 с.
2. Клейнер Г.Б. Виробничі функції: теорія, методи, застосування/ Г.Б. Клейнер. – М.: Фінанси і статистика, 1986. – 240 с.
3. Пу Т. Нелінійна економічна динаміка/ Т. Пу. – Москва-Іжевськ: НІЦ "Регулярна і хаотична динаміка", 2000. – 198 с.
4. Светуцьков С.Г. Про можливість використання комплексних чисел в теорії виробничих функцій/ С.Г. Светуцьков, І.С. Светуцьков// Вісник Санкт-Петербурзького державного університету економіки і фінансів, 2005. – № 4. – С. 4 - 16.

5. Светуных С.Г. Основы теории эконометрии комплексных переменных/ С.Г. Светуных. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – 108 с.
6. Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании: материалы Всероссийского научного семинара (19 дек. 2005 г.) / Под ред. проф. С.Г. Светуных. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006.
7. [Электронный ресурс]. – Режим доступа [www.unstats.un.org](http://www.unstats.un.org)
8. [Электронный ресурс]. – Режим доступа [www.ukrstat.gov.ua](http://www.ukrstat.gov.ua)

#### Анотація

### ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Меркулова Т.В., д.е.н., доцент

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Приходько А.І., аспірант

Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України, м. Харків

Розглянуто можливості побудови та використання лінійних економетричних моделей комплексних змінних. На основі адаптації метода найменших квадратів проведено оцінку параметрів цих моделей на макроекономічних даних США та України, представлено висновки порівняльного аналізу результатів моделювання за допомогою функцій дійсних та комплексних змінних. Відзначено основні проблеми, що виникають при використанні моделей комплексних змінних та потребують подальшого вивчення та економічної інтерпретації.

**Ключові слова:** економічна модель, функції дійсних змінних, функції комплексних змінних, метод найменших квадратів, оцінка параметрів, помилка апроксимації.

#### Summary

### FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLES USING IN ECONOMETRIC MODELING

Merkulova T.V., Ph.D., docent

V.N. Karazin Kharkiv National Universit

Prikhodko A.I., post-graduate student

A.M. Pidhorny Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv

The potential of construction and use linear econometric models of complex variables was considered. On basis of adaptation of the method of least squares the parameters estimation of these models was carried out on national measures data of USA and Ukraine, the conclusions of comparative analysis of modeling by the instrumentality of functions of real and complex variables were presented. Main problems, which appear using models of complex variables and need further inquiry and economics interpretation, were noted.

**Key words:** econometric model, functions of real variables, functions of complex variables, method of least squares, parameters estimation, approximation error.

*Поступила в редколлегию 24 декабря 2009 г.*

*© Меркулова Т.В., Приходько А.И., 2010 г.*