

Адвекция пассивной жидкости в поле скорости двух точечных вихрей в круговой области

А. А. Гуржий, И. С. Прокопович

*Национальный технический университет Украины "КПИ", Украина
Институт гидромеханики НАН Украины, Украина*

The two-dimensional problem on an advection of passive fluid in the velocity field induced by system of point vortices inside a circular domain is considered. It is known that laminar motion of fluid particle can display chaotic properties under certain conditions. Different criteria and methods are used for identification regions of chaotic motion: analysis of phase trajectories, spectral and correlation characteristics, Poincare section, largest Lyapunov exponent. It is necessary to apply different criteria to analyse intensive regimes of advection. The comparison analysis of different criteria of stirring processes in two-dimensional velocity field induced by system of point vortices inside a circular domain.

1. Введение

Процессы перемешивания традиционно находятся в центре внимания ученых в области фундаментальных и прикладных наук, и находят широкое применение в экологии, химической, фармацевтической и пищевой промышленности. Известно [1,2], что ламинарные течения при некоторых условиях могут сопровождаться интенсивными режимами перемешивания. Процесс перемешивания представляет собой сложное физическое явление. Среди основных механизмов можно выделить два наиболее важных [1]: диффузионные явления, связанные с молекулярным движением, и конвективный перенос, вызванный движением сплошной среды.

Во многих прикладных задачах анализ временных масштабов позволяет исключить диффузионные эффекты [3] и рассматриваемая проблема сводится к анализу процессов перемешивания при наличии только деформаций исходной области в поле скорости ламинарного течения. Такая задача в современной литературе получила название *задача об адвекции* жидкости в известном поле скорости [1,4].

Движение пассивных жидких частиц описывается нелинейными уравнениями [3,5,6]. По этой причине расстояние между частицами, формирующими границы выделенной области течения, может увеличиваться с течением времени экспоненциально. Такое течение в литературе называют хаотическим, а процессы перемешивания в них – *хаотической адвекцией* [1,4].

В хаотической динамике существует много методов и критериев для определения хаотических режимов движения динамических систем [5,7,8]: анализ фазовой траектории системы, спектральный и корреляционный анализы, построение сечений Пуанкаре, анализ показателей Ляпунова и другие. Их совместное использование позволяет достаточно быстро и надежно определить режимы движения отдельных жидких частиц.

Однако применение указанных выше критериев для определения режимов адвекции оказывается недостаточным, поскольку адвекция представляет собой интегральное явление, в котором участвуют различные жидкие частицы, часть из которых участвует в упорядоченном движении, а другие – могут двигаться хаотически [2, 4].

Целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа различных критериев адвекции в двухмерном течении идеальной жидкости, наведенном двумя точечными вихрями внутри круговой области. Выбор такого модельного представления обусловлен достаточно простым описанием поля скорости [9,10]. Результаты анализа позволяют выявить и сформулировать основные закономерности процессов адвекции пассивной примеси двухмерными течениями.

2. Уравнения движения

Пусть в идеальной несжимаемой жидкости, которая ограничена круговой областью радиуса a , находятся N точечных вихрей с интенсивностями Γ_α , где $\alpha = 1, \dots, N$, расположенные в точках с координатами (x_α, y_α) в прямоугольной системе координат, совпадающей с центром полости. Для выполнения граничного условия непротекания необходимо добавить систему N мнимых вихрей с интенсивностями $-\Gamma_\alpha$, расположенных в точках [2]

$$x_\alpha^* = \frac{x_\alpha a^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}, \quad y_\alpha^* = \frac{y_\alpha a^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}. \quad (1)$$

Уравнения, описывающие динамику вихрей, имеют следующий вид [2,9]

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta (y_\beta - y_\alpha)}{r_{\alpha\beta}^2} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta (a^2 y_\beta / R_\beta^2 - y_\alpha)}{\rho_{\alpha\beta}^2} \right], \\ \frac{dy_\alpha}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta (x_\alpha - x_\beta)}{r_{\alpha\beta}^2} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta (x_\alpha - a^2 x_\beta / R_\beta^2)}{\rho_{\alpha\beta}^2} \right], \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta}^2 &= (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2, \quad R_\beta^2 = x_\beta^2 + y_\beta^2, \\ r_{\alpha\beta}^2 &= (x_\alpha - a^2 x_\beta / R_\beta^2)^2 + (y_\alpha - a^2 y_\beta / R_\beta^2)^2 \end{aligned}$$

с начальными условиями $x_\alpha(0) = x_\alpha^0$, $y_\alpha(0) = y_\alpha^0$. В выражениях (2) штрих означает исключение из суммирования сингулярного слагаемого $\alpha = \beta$. Мнимые вихри жестко связаны с пространственными положениями основных вихрей и всегда «отслеживают» движение действительных вихрей.

Система уравнений (2) обладает двумя независимыми инвариантами

$$I = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2), \quad H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \left[\sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \ln r_{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \ln \rho_{\alpha\beta} \right]. \quad (3)$$

выражающие закон сохранения момента импульса и кинетической энергии течения идеальной несжимаемой жидкости, соответственно.

Математическая постановка задачи об адвекции системы M пассивных жидких частиц, расположенных в точках с координатами (X_α, Y_α) (здесь $\alpha = 1, \dots, M$) в известном поле скорости $\mathbf{U} = [U(x, y, t), V(x, y, t)]$ сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (задача Коши)

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = U(X_\alpha, Y_\alpha, t), \quad \frac{dY_\alpha}{dt} = V(X_\alpha, Y_\alpha, t), \quad \alpha = 1, \dots, M \quad (4)$$

с начальными условиями $X_\alpha(0) = X_\alpha^0, Y_\alpha(0) = Y_\alpha^0$.

Используя теоремы Гельмгольца [6] и аналогию между уравнениями (2) и (4), пассивные жидкие частицы (маркеры) могут быть представлены в виде точечных вихрей с нулевой интенсивностью. Совместное интегрирование уравнений движения (2) и (4) позволяют определить траектории движения пассивных маркеров в рассматриваемом течении.

3. Анализ процесса адвекции

Рассмотрим случай взаимодействия двух точечных вихрей интенсивности Γ_1 и Γ_2 , расположенные в начальный момент в точках (x_1^0, y_1^0) и (x_2^0, y_2^0) . Поскольку уравнения движения вихрей (2) обладают двумя независимыми инвариантами (3), то система двух точечных вихрей внутри круговой области является интегрируемой. В работе [9] представлена классификация взаимодействий такой системы в зависимости от параметров I и $G = \exp[4\pi H]$: траектории могут быть как замкнутыми (периодическое движение), так и разомкнутыми (непериодическое взаимодействие).

Если два вихря имеют интенсивности одинакового знака $\Gamma_1 \Gamma_2 > 0$ и в начальный момент времени положение вихрей обладает центральной симметрией, то два вихря двигаются периодически по круговым траекториям. Пример такого взаимодействия вихрей показан на рис.1 для $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$, $x_1^0 = x_2^0 = 0.0$, $y_1^0 = -y_2^0 = 0.5$. Кружочками на рисунке показаны начальные положения вихрей и положения вихря 1 через интервалы времени $\Delta t = 0.5$. Вихри двигаются по круговым траекториям с периодом $T_p = 15.58$.

Наличие симметрии в расположении вихрей приводит к тому, что пассивные маркеры в рассматриваемом поле скорости движутся по регулярным траекториям. На рис.2 представлен пример траектории маркера, расположенного в начальный момент в точке $(-0.5, 0.0)$. Маркер движется по спиралевидным траекториям, попеременно удаляясь и приближаясь к центру полости.

Сечение Пуанкаре маркеров имеет сложную структуру (рис.3). Оно содержит четыре эллиптические точки, расположенные внутри течения, и пять гиперболических точек, одна из которых содержится в центральной области течения, а остальные расположены на поверхности границы. Упорядоченная последовательность точек сечения Пуанкаре свидетельствует о том, что во всей области течения маркеры движутся по регулярным траекториям.

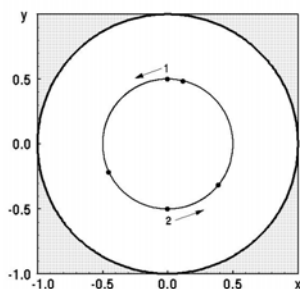


Рис.1. Траектории движения двух симметричных точечных вихрей внутри круговой области

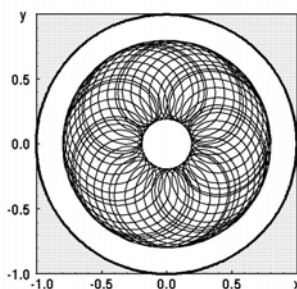


Рис.2. Траектория движения пассивного маркера

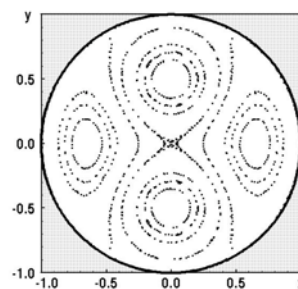


Рис.3. Сечение Пуанкаре при периодическом взаимодействии

Проведем численное моделирование процесса адвекции пассивной примеси в рассматриваемом течении. На рис.4,а показано начальное положение вихрей и выделенной части жидкости в виде круга радиуса $R=0.3$ с центром в начале координат. С течением времени жидкость разделяется на части, которые начинают закручиваться вокруг точечных вихрей. Характерный момент, соответствующий моменту $t = T_p$, показан на рис.4,б. Интересно отметить, что незначительная часть пассивной жидкости попадает в левую и правую область течения. При этом формируется тонкая полоска выделенной жидкости, которая движется вокруг эллиптических точек, расположенных в этих областях течения.

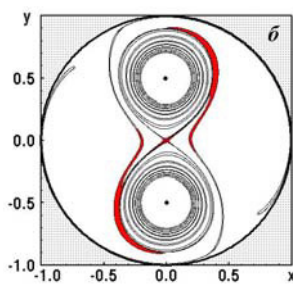
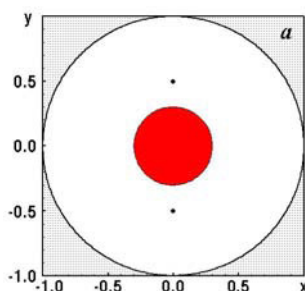


Рис.4. Адвекция пассивной жидкости внутри круга: а) $t=0.0$, б) $t=3T$

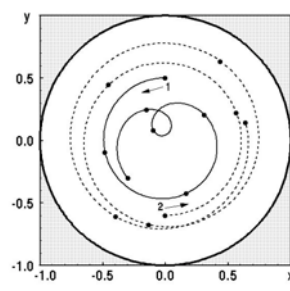


Рис.5. Траектории движения двух несимметричных вихрей

В работах [2,9] показано, что при нарушении симметрии в начальном расположении вихрей в круговой области нарушается периодичность их движения. Вихри по-прежнему вращаются вокруг центра полости с разными угловыми скоростями. При максимальном сближении вихрей происходит смещение одного вихря к границе, а другого - к центру полости. Пример такой траектории движения показан на рис.5, где $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$, $x_1^0 = x_2^0 = 0.0$, $y_1^0 = 0.5$, $y_2^0 = -0.6$. На рисунке сплошной линией показана траектория движения вихря 1, а пунктирной линией нанесена траектория вихря 2.

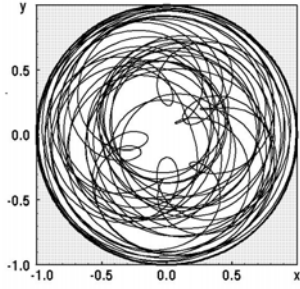


Рис.6. Нерегулярное движение пассивного маркера

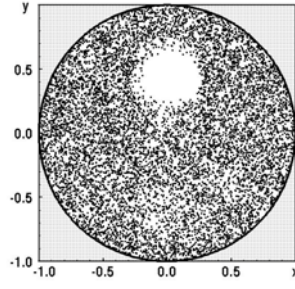


Рис.7.Сечение Пуанкаре при неперiodическом взаимодействии

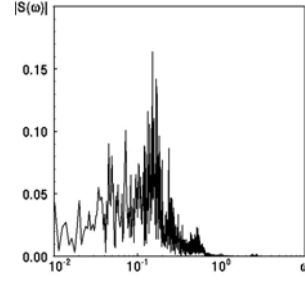


Рис.8. Модуль спектра проекции траектории пассивного маркера

Траектория пассивного маркера, расположенного в начальный момент в точке $(-0.5, 0.0)$, представлена на рис.6. Движение маркера в поле скорости двух несимметрично расположенных точечных вихрей становится хаотическим. Маркер нерегулярно посещает различные области круговой полости.

Сечение Пуанкаре для этого случая движения точечных вихрей показано на рис.7. Оно построено для системы пассивных маркеров, расположенных в начальный момент в различных областях полости. Дискретизация их траекторий движения производилась в момент, когда вихрь 1 пересекал ось $x=0$ в отрицательном направлении. Неупорядоченное движение маркеров внутри круговой полости приводит к тому, что сечение Пуанкаре становится хаотическим практически во всей полости, за исключением области течения, прилегающей к первому вихрю. Такая структура сечения Пуанкаре свидетельствует о том, что пассивные маркеры двигаются хаотически [7].

Однако этот вывод необходимо подтвердить другими критериями, поскольку наличие нерегулярного сечения Пуанкаре является необходимым, но недостаточным условием хаотизации движения [1,5,7,8]. На рис.8 показан модуль спектра траектории $X(t)$ частицы, траектория которой показана на рис.6. Наличие большого количества пиков в спектре свидетельствует о том, что траектория рассматриваемой частицы является нерегулярной.

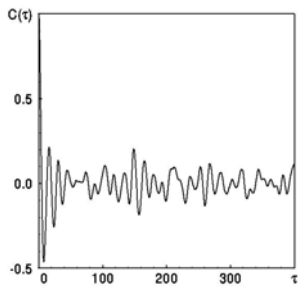


Рис.9.Коэффициент автокорреляции траектории маркера

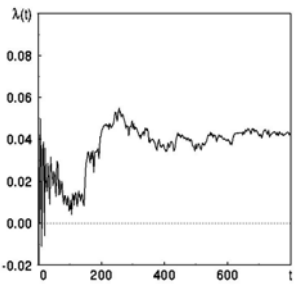


Рис.10. Наибольший показатель Ляпунова

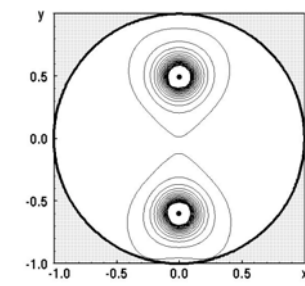


Рис.11 Карта локальных растяжений пассивного маркера

Если движение маркера является хаотическим, то коэффициент автокорреляции, вычисленный для этой проекции должен асимптотически стремиться к нулю. Такие траектории с течением времени “забывают” свои начальные условия [7,8]. Рис.9 показано изменение коэффициента $C(\tau)$ автокорреляции, вычисленный для проекции $X(t)$ траектории исследуемого маркера. Видно, что зависимость представляет собой осциллирующую функцию, которая достаточно быстро в масштабах задачи приближается к нулю. Этот критерий так же свидетельствует о том, что рассматриваемый пассивный маркер участвует в хаотическом движении.

На рис.10 нанесено изменение наибольшего показателя Ляпунова с течением времени для маркера, траектория которого показана на рис.6. На начальной стадии движения этот параметр имеет достаточно большие изменения в амплитуде. Однако, с течением времени наибольший показатель Ляпунова стабилизирует свое значение и в пределе $t \rightarrow \infty$ стремится к значению $\Lambda = 0.04$. Это значение примерно в 4 раза превышает значение, полученное для аналогичном временном интервале для регулярного движения маркера в поле скорости симметрично расположенных точечных вихрей. Следуя общепризнанной интерпретации [1,7], положительное значение наибольшего показателя Ляпунова свидетельствует о хаотичности движения пассивного маркера. Следовательно, такое движение системы пассивных маркеров должно сопровождаться интенсивным режимом адвекции.

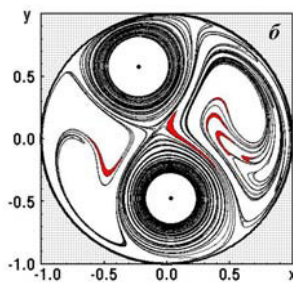
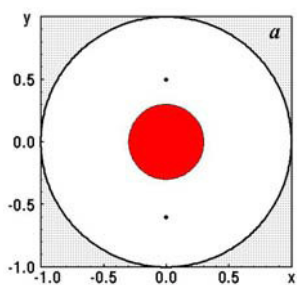


Рис.12. Адвекция пассивной жидкости в поле скорости двух несимметричных вихрей

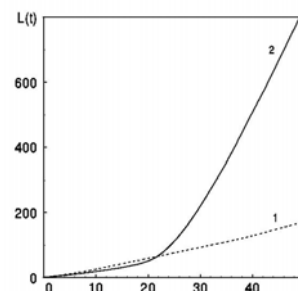


Рис.13. Изменение длины контура с течением времени

Для определения областей течения, в которых растяжение пассивных контуров происходит наиболее интенсивно, построим локальную карту растяжений $p_1(x, y)$ [11], (рис.11). Топологические уровни на рисунке нанесены с дискретностью $\Delta p_1 = 0.1$. Видно, что наиболее интенсивное режим адвекции протекает в непосредственной близости к вихрям. В остальной части круговой области процесс перемешивания жидкости протекает медленно в масштабах задачи.

Рассмотрим процесс адвекции в поле скорости двух несимметрично расположенных точечных вихрей внутри круговой области. Поместим пятно пассивной жидкости в виде круга радиуса $R=0.3$ в центральную часть полости.

На рис.12,а показано начальное положение пятна и системы точечных вихрей. С течением времени пятно разделяется на две части, которые начинают интенсивно закручиваться вокруг точечных вихрей, которые движутся вдоль границы с разными скоростями. В те моменты времени, когда они приближаются на минимальное расстояние, часть подкрашенной жидкости выдавливается в области, в которых адвекция протекает медленно. Характерная структура выделенной области показана на рис.12,б, который соответствует моменту $t=50.0$. В круговой полости формируется сложная слоистая структура, которая свидетельствует о более интенсивном режиме адвекции по сравнению с симметричным случаем, рассмотренным ранее.

Однако этот режим адвекции нельзя отнести к хаотическим режимам адвекции, и, следовательно, интерпретировать как интенсивный режим. На рис.13 показано изменение нормированной длины контура с течением времени для случая, рассмотренного на рис.12. На рисунке цифрой 1 обозначена зависимость длины контура для симметрично расположенных двух точечных вихрей (смотри рис.4), а цифрой 2 – аналогичная зависимость для несимметрично расположенных вихрей (рис.12). Видно, что процесс адвекции во втором случае протекает значительно интенсивнее, однако в обоих случаях представленные зависимости представляют собой линейные функции. Следовательно, оба режима относятся к регулярным, не смотря на то, что система пассивных маркеров в рассматриваемых полях скорости движется неустойчиво, как это следует из анализа зависимости наибольшего показателя Ляпунова (рис.10).

4.Выводы

Процесс перемешивания (размешивания) жидкостей представляет собой сложное физическое явление. Для того, чтобы проанализировать и определить режим перемешивания необходимо пользоваться различными критериями. Среди диагностических критериев можно выделить две большие группы [7,8]: критерии *качественные* и *количественные*. Первая группа предназначена для качественного определения режима движения вихрей или пассивных жидких частиц (маркеров). Эти критерии в большинстве случаев оказываются достаточно простыми для исследований, их применение основано на использовании стандартных вычислительных процедур. К качественным критериям относятся: построение и анализ фазовых траекторий, вычисление спектральных и корреляционных характеристик отдельных проекций фазовых траекторий вихрей (или маркеров) в рассматриваемом течении.

Анализ фазовых траекторий и спектральных характеристик являются достаточно надежными критериями для идентификации хаотического режима движения отдельных пассивных маркеров. Корреляционный анализ не выявил существенной разницы в динамике маркеров, которые участвуют в регулярном и хаотическом движениях. Спектральный и корреляционный анализы более чувствительны к периодическим или квазипериодическим режимам движения маркеров.

Количественные критерии позволяют провести количественные сравнение различных параметров движения жидких частиц. К ним относятся построение сечения Пуанкаре и локальных карт растяжений контуров, вычисление

наибольшего показателя Ляпунова. Вычисление количественных критериев требуют специальных вычислительных методов.

Построение сечений Пуанкаре позволяет эффективно определять области хаотического движения жидких частиц. Однако сечение Пуанкаре не предоставляет никакой информации об интенсивности перемешивания (растворивания) внутри хаотической зоны движения частиц. Напротив локальные карты растяжения контуров предоставляют приближенные оценки растяжения контуров на ближайший временной интервал, но не могут зарегистрировать хаотические зоны перемешивания. Действительно, сильное растяжение контура не является обязательным условием хаотического движения пассивных жидких частиц. С другой стороны, вычисление наибольшего показателя Ляпунова позволяет оценить степень расходимости двух близлежащих траекторий. Однако значение показателя Ляпунова не связано с растяжимостью исходного контура, который сформирован из большого числа жидких частиц, часть из которых может двигаться регулярно, а часть - хаотично.

Сравнительный анализ критериев показывает, что среди широкого набора критериев распознавания режима движения жидких частиц не существует универсального критерия. Каждый из рассмотренных критериев направлен на анализ определенной особенности движения. Можно заключить, что при решении задачи о перемешивании жидкостей необходимо пользоваться комплексом критериев. Использование отдельного критерия в некоторых случаях может привести к ошибочным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 683p.
2. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. – Киев: Наукова думка, 1993. – 279с.
3. Ландау Д.Л., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М: Наука, 1986. – 736с.
4. Aref H. Chaotic advection of fluid particles // Phil. Trans. R. Soc. London. – 1990. – V.333. – P.273-288.
5. Заславский Г.М. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. – М: Мир, 1988. – 308р.
6. Ламб Г. Гидродинамика. – М.Л.: Гостехиздат, 1947. – 928с.
7. Мун Ф. Хаотические колебания – М:Мир, 1990. – 312р.
8. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М: Мир, 1988. – 240р.
9. Kimura Y., Motion of two point vortices in a circular domain // Journal of the Physical Society of Japan. – 1988. – V.57, №5. – P.1641-1649.
10. Hardin J.C., Mason J.P. Periodic motion of two and four vortices in a cylindrical pipe // Phys. Fluids. – 1984. – V.27. – P.1583-1589.
11. Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кускової сплан-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доповіді АН України. – 1996. – №8. – С.48-54.

Надійшла 07.04.2009.