Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 847, 2009, с.174-183

УДК 517.958

Метод численного решения интегрального уравнения, ядро которого содержит сингулярную и логарифмическую особенность

В. Д. Душкин
Академия ВВ МВСУ, Украина

The proof of direct numerical solution method of first kind singular integral equation had been given. Except regular part, the kernel of this equation contains singular and logarithmic particularity.

1. Постановка задачи и её актуальность.

В настоящее время при численном решении задач дифракции используются различные схемы метода дискретных особенностей (МДО). Таким образом, является актуальным получение доказательств сходимости приближенных решений к точным и получение оценки скорости сходимости процесса приближений.

Рассматривается уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(\tau)}{\tau-\xi}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+a\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(\xi,\tau)\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f(\xi) \quad (1)$$

с одним из двух дополнительных условий. Первое условие, которое встречается в случае задач Е-поляризации:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0, \quad (2)$$

второе дополнительное условие встречается в случае задач Н-поляризации:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi_0|\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(\xi_0,\tau)\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0\,, \quad (3)$$

где ξ_0 - фиксированная точка интервала $(-1,1)$.

2. Истоки исследования

При проведении доказательства использовались ряд утверждений, которые были доказаны в работе [1], где было дано обоснование сходимости приближенного решения к точному решению интегрального уравнения, ядро которого содержало только сингулярную особенность.

3. Цели работы

Целью работы было обоснование алгоритма численного решения систем интегральных уравнений (1,2) и (1,3) и получение оценок скорости сходимости приближенных решений к точным решениям.

3. Обоснование метода решения системы ИУ (1-2).

Пусть $L_{2,\alpha}$ гильбертово пространство функций со скалярным произведением:

$$\left(u,v\right)_{\alpha} = \int_{-1}^{1} u(\tau)\cdot \bar{v}(\tau)\left(1-\tau^{2}\right)^{\alpha} d\tau \tag{4}$$

и нормой: $\|v\|_{\alpha} = \sqrt{(v,v)_{\alpha}}$.

Следуя [1], будем рассматривать операторы:

$$(\Gamma u)(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(\tau)}{\tau-\xi}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^{2}}}, \tag{5}$$

$$(L\ u)(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau-\xi|\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^{2}}}, \tag{6}$$

$$(Ku)(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(\xi,\tau)\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^{2}}}. \tag{7}$$

В операторных обозначениях система (1,2) будет иметь вид:

$$\left(\Gamma + a\cdot L + K\right)u = f, \tag{1}$$

$$(u,1)_{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим пространство функций:

$$L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} = \left\{ u \in L_{2,-\frac{1}{2}} \middle| (u,1)_{-\frac{1}{2}} = 0 \right\} \tag{3}$$

Оператор $A = \left(\Gamma + a\cdot L + K\right)$ действует в паре пространств $L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} \to L_{2,\frac{1}{2}}$.

Оператор Γ непрерывно обратим в паре пространств $L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} \to L_{2,\frac{1}{2}}$, следовательно, является нётеровым оператором с нулевым индексом (фредгольмовым).

В статье [2] А.Аткинсона было показано, что добавление вполне непрерывного линейного оператора к нётеровому оператору не меняет его индекса. Оператор $a\cdot L + K$ является вполне непрерывным, следовательно $ind\left(A\big|_{L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} \to L_{2,\frac{1}{2}}} \right) = 0$. Из единственности решения задачи (1-2) следует, что $\ker A\big|_{L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} \to L_{2,\frac{1}{2}}} = 0$. Следовательно, $\operatorname{Im}\left(A\big|_{L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} \to L_{2,\frac{1}{2}}} \right) = L_{2,\frac{1}{2}}$ и оператор A непрерывно обратим в паре пространств $L^{0}_{2,-\frac{1}{2}} \to L_{2,\frac{1}{2}}$.

Пусть $\left(L^{1}_{n-1}f\right)(\tau)$ - интерполяционный полином Лагранжа функции $f(\tau)$, с узлами $t^{n}_{k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k = 1,\ldots,n$ - корнями многочлена $\mathrm{T}_{n}(\tau)$:

$$\left(L^1_{n-1}f\right)(\tau)=\sum_{k=1}^{n} f\left(t_k^n\right)\cdot l^1_{n-1,k}(\tau)\,, \tag{4}$$

где $l^1_{n-1,k}(\tau)$ фундаментальный интерполяционный полином :

$$l^1_{n-1,k}(\tau)=\left[1+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(\tau)\cdot T_p\left(t_k^n\right)\right]\cdot\frac{1}{n},\quad \kappa=0,\ldots,n\,, \tag{5}$$

а $\left(L^2_{n-2}f\right)(\xi)$ - интерполяционный полином Лагранжа функции $f(\xi)$ с узлами $t^n_{0,j}=\cos\left(\frac{j}{n}\pi\right)$, $j=1,\ldots,n-1$, которые являются корнями многочлена $U_{n-1}(\xi)$:

$$\left(L^2_{n-2}f\right)(\xi)=\sum_{j=1}^{n-1} f\left(t^n_{0,j}\right)\cdot l^2_{n-2,j}(\xi)\,, \tag{6}$$

где

$$l^2_{n-2,j}(\xi)=\frac{U_{n-1}(\xi)}{U'_{n-1}(\xi)\left(\xi-t^n_{0,j}\right)},\quad j=0,\ldots,n-1\,. \tag{7}$$

Пусть

$$K_n(\xi,\tau)=\left(L^1_{n-1_\tau}L^2_{n-2_\xi}K\right)(\xi,\tau)=\sum_{j=1}^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}K\left(t^n_{0,j},t^n_k\right)\cdot l^1_{n-1,k}(\tau)\cdot l^2_{n-2,j}(\xi)\,. \tag{8}$$

Введём операторы:

$$\left(K_n u\right)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_n(\xi,\tau)\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,, \tag{9}$$

$$\left(L_n u\right)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln|\tau-\xi|+\frac{\pi}{n-1}\cdot\frac{\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\cdot\mathrm{T}_{n-1}(\xi)}{\left\|\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\right\|}\right]\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,, \tag{10}$$

$$\left(\Delta_n u\right)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\pi}{n-1}\cdot\frac{\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\cdot\mathrm{T}_{n-1}(\xi)}{\left\|\mathrm{T}_{n-1}(t)\right\|}\right]\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,, \tag{11}$$

$$A_n=\Gamma+a\cdot L_n+K_n=\Gamma+a\left(L+\Delta_n\right)+K_n\,. \tag{12}$$

Рассмотрим действия оператора A_n на элементы пространства Π_{n-1}, элементами которого являются полиномы степени $(n-1)$.

Заметим, что

$$\left(\Delta_n l^1_{n-1,k}\right)(\xi)=\frac{2}{n\cdot(n-1)}\mathrm{T}_{n-1}(\xi)\cdot T_{n-1}\left(t_k^n\right), \tag{13}$$

и, следовательно

$$\left(\Delta_n p_{n-1}\right)(\xi)=\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\frac{2}{n\cdot(n-1)}\mathrm{T}_{n-1}(\xi)\cdot T_{n-1}\left(t_k^n\right)\quad . \tag{14}$$

где $p_n(\tau)$- многочлен степени n.

Из (21) и квадратурной формулы для оператора с логарифмическим ядром

$$\left(L\ p_{n-1}\right)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{p_{n-1}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$

$$=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(\xi)\cdot\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right] \qquad (15)$$

получаем:

$$\left(L_n p_{n-1}\right)(\xi)=-\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(\xi)\cdot\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right]\cdot\frac{1}{n}+\left(\Delta_n p_{n-1}\right)(\xi)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-2}T_p(\xi)\cdot\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right]\cdot\frac{1}{n}. \qquad (16)$$

Таким образом

$$A_n:\Pi_{n-1}\to\Pi_{n-2}. \qquad (17)$$

Пусть $f_n(\xi)=\left(L_{n-2}^2 f\right)(\xi)$. Рассмотрим задачу:

$$\left(\Gamma+a\cdot L_n+K_n\right)u_n=f_n, \qquad (18)$$

$$\left(u_n,1\right)_{-\frac{1}{2}}=0, \qquad (19)$$

решения которой ищутся среди элементов пространства $\Pi_{n-1}^{1,0}=\left\{p_n\in\Pi_{n-1}^1\Big|\ \left(p_n,1\right)_{-\frac{1}{2}}=0\right\}$.

Задача (25-26) эквивалентна системе СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{n-1}(\tau)}{\tau-\xi}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+a\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln|\tau-\xi|+\frac{\pi}{n-1}\cdot\frac{\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\cdot\mathrm{T}_{n-1}(\xi)}{\left\|\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\right\|}\right]\frac{p_{n-1}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_n(\xi,\tau)\frac{p_{n-1}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f\left(t_{0,j}^n\right), \qquad (20)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{n-1}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0. \qquad (21)$$

В левой и правой части уравнения (27) стоят алгебраические полиномы степени $n-2$, поэтому подставляя в СИУ значения $\xi=t_{0,j}^n$, получаем систему уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{n-1}(\tau)}{\tau-t_{0,j}^n}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+a\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln\left|\tau-t_{0,j}^n\right|+\frac{\pi}{n-1}\cdot\frac{\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\cdot\mathrm{T}_{n-1}\left(t_{0,j}^n\right)}{\left\|\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\right\|}\right]\frac{p_{n-1}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_n\left(t_{0,j}^n,\tau\right)\frac{p_{n-1}d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f\left(t_{0,j}^n\right), \qquad (22)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{n-1}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0\,, \tag{23}$$

которая эквивалентна задаче (25-26). Учитывая известные квадратурные формулы [3] получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных величин $p_{n-1}\left(t_k^n\right)$ $k=1,\cdots,n$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{n-1}\left(t_k^n\right)}{t_k^n-t_{0,j}^n}-\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-2}T_p(\xi)\cdot\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right]\cdot\frac{1}{n}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_n\left(t_k^n\right)\cdot K\left(t_{0,j}^n,t_k^n\right)=f\left(t_{0,j}^n\right),\quad (j=1,\ldots,n-1), \tag{24}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)=0\,. \tag{25}$$

Заметим, что

$$\left\|A-A_n\right\|_{\Pi_{n-1}\to L_{2,\frac{1}{2}}}=a\cdot\left\|\Delta_n\right\|_{\Pi_{n-1}\to L_{2,\frac{1}{2}}}+\left\|K-K_n\right\|_{\Pi_{n-1}\to L_{2,\frac{1}{2}}} \tag{26}$$

В работе [1] показано, что если $K_n\in C^{\mu,\gamma}$, то

$$\left\|K-K_n\right\|_{\Pi_{n-1}\to L_{2,\frac{1}{2}}}\le\frac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma}} \tag{27}$$

Рассмотрим величину

$$\left\|\Delta_n p_{n-1}\right\|_{L_{2,\frac{1}{2}}}=\left\|\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\frac{2}{n\cdot(n-1)}\mathrm{T}_{n-1}(t_0)\cdot T_{n-1}\left(t_k^n\right)\right\|_{L_{2,\frac{1}{2}}}\le$$

$$\le\frac{2}{n\cdot(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left|p_{n-1}\left(t_k^n\right)\right|\cdot\left|T_{n-1}\left(t_k^n\right)\right|\cdot\left\|\mathrm{T}_{n-1}(t_0)\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}\le\frac{2}{n-1}\left\|p_{n-1}\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}, \tag{28}$$

Таким образом

$$\left\|\Delta_n\right\|_{\Pi_{n-1}^1\to L_{2,\frac{1}{2}}}=\sup_{p_{n-1}\ne0}\frac{\left\|\Delta_n p_{n-1}\right\|_{L_{2,\frac{1}{2}}}}{\left\|p_{n-1}\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}}\le\frac{2}{n-1}\to0\quad n\to\infty \tag{29}$$

и с учетом (34), получаем:

$$\left\|A-A_n\right\|_{\Pi_{n-1}^1\to L_{2,\frac{1}{2}}}\to0,\quad n\to\infty \tag{30}$$

Утверждение (37) обеспечивает выполнение условий теоремы, которая приведена в работах [1,4], согласно которой приближенное уравнение имеет единственное решение $u^n\in\Pi_{n-1}^0$ при любой правой части $f_n\in\Pi_{n-2}$ и справедлива оценка

$$\left\| u - u^n \right\| \le \frac{\left\| A^{-1} \right\|}{1 - p_n} \cdot \left(\left\| f - f_n \right\| + p_n \cdot \left\| f \right\| \right) \tag{31}$$

где $p_n \equiv \left\| A^{-1} \right\|_{L_{2,\frac{1}{2}} \to L^0_{2,-\frac{1}{2}}} \cdot \left\| A - A_n \right\|_{\Pi^0_{n-1} \to L_{2,\frac{1}{2}}}$.

3. Обоснование метода решения системы ИУ (1-3).

Введём функционал $Q : L_{2,-\frac{1}{2}} \to R$ следующим образом:

$$Qu = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi_0| \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} Q(\xi_0, \tau) \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0\,, \tag{32}$$

Будем предполагать, что

$$h = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi_0| \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} Q(\xi_0, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \ne 0\,, \tag{33}$$

Следуя обозначениям работы [1], пусть $\Lambda(Q)$- подпространство функций, удовлетворяющих дополнительному условию (39) и условию (40). Введём оператор:

$$A_H : \Lambda(Q) \to L_{2,\frac{1}{2}} \qquad A_H u = (\Gamma + a \cdot L + K)\, u \quad \forall u \in \Lambda(Q). \tag{34}$$

Тогда в операторных обозначениях исходная задача (1,3) может быть представлена в виде:

$$A_H\, u = f\,, \tag{35}$$

$$u \in \Lambda(Q). \tag{36}$$

Рассмотрим также вспомогательную задачу:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(\tau)}{\tau - \xi} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + a \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} K(\xi, \tau) \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f(\xi) \tag{37}$$

с дополнительным условием:

$$Q_n u = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} Q_n(\xi, \tau) \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0 \tag{38}$$

где $Q_n(\xi, \tau)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа степени $(n-1)$ функции $Q(\xi, \tau)$ по переменной τ, с узлами $\{t_k^n\}_{k=1}^n$:

$$Q_n(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi, t_k^n) \cdot l^1_{n-1,k}(\tau)\,. \tag{39}$$

Пусть

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} Q_n(\xi, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = h_n \tag{40}$$

В силу того, что $\max\limits_{\tau \in [-1,1]} \left| Q_{n-1}(\xi, \tau) - Q(\xi, \tau) \right| \to 0 \quad n \to \infty$ существует N, что $|h_n| \ge h_0 > 0 \quad \forall n \ge N$. Пусть $\Lambda(Q_n)$- подпространство функций, удовлетворяющих дополнительному условию (45) и условию (47), где $|h_n| > 0$. Введём оператор:

$$A^n : \Lambda(Q_n) \to L_{2,\frac{1}{2}} \quad A^n u^n = (\Gamma + a \cdot L + K)\, u^n \quad \forall u^n \in \Lambda(Q_n). \tag{41}$$

Тогда в операторных обозначениях вспомогательная задача может быть представлена в виде:

$$A^n\ u^n = f\ , \tag{42}$$

$$u^n \in \Lambda(Q_n)\,. \tag{43}$$

В работе доказано существование ограниченного обратного оператора Γ^{-1} в паре пространств $\left(\Lambda(Q), L_{2,\frac{1}{2}}\right)$ и существование ограниченного обратного оператора Γ^{-1} в паре пространств $\left(\Lambda(Q_n), L_{2,\frac{1}{2}}\right)$ при выполнении условия $n \geq N$.

В силу теоремы А.Аткинсона [2], из обратимости оператора Γ в паре пространств $\left(\Lambda(Q), L_{2,\frac{1}{2}}\right)$ и того, что оператор $a \cdot L + K$ является вполне непрерывным, следует что $ind\ \Gamma\big|_{\Lambda(Q)\to L_{2,\frac{1}{2}}} = ind\ A_0\big|_{\Lambda(Q)\to L_{2,\frac{1}{2}}} = 0$. В силу однозначной разрешимости исходной задачи (42-43) оператор A_H непрерывно обратим в паре пространств $\left(\Lambda(Q), L_{2,\frac{1}{2}}\right)$.

Оператор A^n обладает следующими свойствами:

1) Существует номер $N^* \geq N$, такой, что при выполнении условия $n > N^*$ оператор A^n имеет в паре пространств $\left(\Lambda(Q_n), L_{2,\frac{1}{2}}\right)$ ограниченный обратный оператор $(A^n)^{-1}$.

2) Для любого ненулевого элемента $f \in L_{2,\frac{1}{2}}$ существует номер $\widetilde{N} = \widetilde{N}(f) \geq N^*$ такой, что при выполнении условия $n > \widetilde{N}$ справедливо неравенство:

$$\left\| A_H^{-1} f - (A^n)^{-1} f \right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} \cdot \frac{d}{q} \|f\| \cdot \left\| A_0^{-1} \right\|_{L_{2,\frac{1}{2}} \to \Lambda(Q)}, \tag{44}$$

где q константа, зависящая от функции f; и

3) существует константа D и номер $N^{**} > N^*$, что

$$\left\|\left(A^n\right)^{-1}\right\| \le D \quad \forall n \ge N^{**}. \tag{45}$$

Доказательства данных фактов для оператора $A^n = \left(\Gamma + a \cdot L + K\right)$ аналогичны, приведённым в [1], доказательствам свойств оператора $\Gamma + K$. Они являются следствием того, что оператор $a \cdot L + K$, как и оператор K является вполне непрерывным.

Пусть $\Lambda_n(Q_n) = \Lambda_n(Q_n) \cap \Pi_{n-1}$ - множество всех алгебраических многочленов, которые удовлетворяют условию (45).

Введём оператор:

$$A_n : \Lambda_n(Q_n) \to L_{2,\frac{1}{2}} \qquad A_n u_n = \left(\Gamma + a \cdot L_n + K_n\right) u_n \quad \forall u_n \in \Lambda_n(Q_n). \tag{46}$$

Рассмотрим задачу

$$A_n\, u_n = f_n, \tag{47}$$

$$u_n \in \Lambda_n(G_n), \tag{48}$$

которая эквивалентна системе СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{p_{n-1}(\tau)}{\tau - \xi} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + a \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \left[\ln|\tau - \xi| + \frac{\pi}{n-1} \cdot \frac{\mathrm{T}_{n-1}(\tau) \cdot \mathrm{T}_{n-1}(\xi)}{\left\|\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\right\|} \right] \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_n(\xi, \tau) \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f(\xi), \tag{49}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} Q_n(\xi, \tau) \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0 \tag{50}$$

В силу свойств оператора Γ и формулы (23), получаем:

$$A_n : \Lambda_n(G_n) \to \Pi_{n-2} \tag{51}$$

В левой и правой части уравнения (56) стоят алгебраические полиномы степени $n-2$, поэтому, подставляя в СИУ (56) значения $\xi = t_{0,j}^n$, получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{p_{n-1}(\tau)}{\tau - t_{0,j}^n} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + a \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \left[\ln|\tau - t_{0,j}^n| + \frac{\pi}{n-1} \cdot \frac{\mathrm{T}_{n-1}(\tau) \cdot \mathrm{T}_{n-1}(t_{0,j}^n)}{\left\|\mathrm{T}_{n-1}(\tau)\right\|} \right] \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_n(t_{0,j}^n, \tau) \frac{p_{n-1} d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f(t_{0,j}^n), \tag{52}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi_0| \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} Q_n(\xi_0, \tau) \frac{p_{n-1}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \tag{53}$$

которая эквивалентна задаче (54-55). Используя квадратурные формулы [1] получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных величин $p_{n-1}(t_k^n)$ $(k = 1, \cdots, n)$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{n-1}\left(t_k^n\right)}{t_k^n-t_{0,j}^n}-\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-2}T_p(\xi)\cdot\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right]\cdot\frac{1}{n}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_n\left(t_k^n\right)\cdot K\left(t_{0,j}^n,t_k^n\right)=f\left(t_{0,j}^n\right)\quad j=1,\ldots,n-1 \qquad (54)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}\left(t_k^n\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-2}T_p(\xi)\cdot\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right]\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Q_n(\xi_0,\tau)p_{n-1}\left(t_k^n\right)=0 \qquad (55)$$

Из (37) и (52) следует, что существует номер N^{**} $\forall n>N^{**}$ справедливо неравенство:

$$p_n\equiv\left\|\left(A^n\right)^{-1}\right\|_{L_{2,\frac{1}{2}}\to\Lambda\left(G_n\right)}\cdot\left\|A^n-A_n\right\|_{\Lambda_n\left(G_n\right)\to L_{2,\frac{1}{2}}}\leq D\cdot\left[\frac{2a}{n-1}+\frac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma}}\right]<1\,. \qquad (56)$$

Условия (63) обеспечивает выполнение условий теоремы, которая приведена в работах [1,4], согласно которой задача (54-55) имеет единственное решение $u_n\in\Pi_{n-1}$ при любой правой части $f_n\in\Pi_{n-2}$.и справедлива оценка

$$\left\|u^n-u_n\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}\leq\left\|\left(A^n\right)^{-1}\right\|_{L_{2,\frac{1}{2}}\to\Lambda(G_n)}\cdot\left(1-p_n\right)^{-1}\left\{\left\|\left(L_{n-2}^2f\right)-f\right\|_{\frac{1}{2}}+p_n\cdot\|f\|_{\frac{1}{2}}\right\}\leq$$

$$\leq\frac{D\left\{\dfrac{b}{(n-2)^{\mu+\gamma}}+D\cdot\left[\dfrac{2a}{n-1}+\dfrac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma}}\right]\cdot\|f\|_{\frac{1}{2}}\right\}}{1-D\cdot\left[\dfrac{2a}{n-1}+\dfrac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma}}\right]}=O\left(\frac{1}{n^s}\right),\quad n\to\infty\,. \qquad (57)$$

где $s=\min(1,\mu+\gamma)$ и u^n - решение вспомогательной задачи (49-50).

Из (51) и (64) следует, что

$$\left\|u-u_n\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}\leq\left\|u^n-u\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}+\left\|u^n-u_n\right\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}}\leq\frac{1}{n^{\mu+\gamma}}\cdot\frac{d}{q}\|f\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|_{L_{2,\frac{1}{2}}\to\Lambda(Q)}+$$

$$+\frac{D\cdot\left\{\dfrac{b}{(n-2)^{\mu+\gamma}}+D\cdot\left[\dfrac{2a}{n-1}+\dfrac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma}}\right]\cdot\|f\|_{\frac{1}{2}}\right\}}{1-D\cdot\left[\dfrac{2a}{n-1}+\dfrac{B}{(n-2)^{\mu+\gamma}}\right]}=O\left(\frac{1}{n^s}\right),\quad n\to\infty\,. \qquad (58)$$

Таким образом, последовательность u_n решений задач (54-55) сходится к решению u исходной задачи (42-43) по норме пространства $L_{2,-\frac{1}{2}}$ и справедлива оценка:

$$\|u-u_n\|_{L_{2,-\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n \to \infty \tag{59}$$

где $s = \min(1, \mu + \gamma)$.

4. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Дано обоснование алгоритма численного решения задач дифракции Е и Н поляризованных волн на ленточных структурах в случае наклонного падения волны, который основан на сведении решения СИУ задач с дополнительными условиями к решению систем алгебраических уравнений. В качестве направления дальнейшего исследования предполагается проведение обоснования алгоритма численного решения СИУ с интегральными дополнительными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В. , Ерёменко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. 1992.
2. Аткинсон А. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормируемых пространствах// Мат. Сб. -1951.-Т.28, №1.-С.3-14.
3. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков-Херсон, 2001.- 92с.
4. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. Ун-та, 1980. -231с.

Надійшла 03.03.2009.