Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.6
№ 847, 2009, с.40-57

Гиперсингулярное интегральное уравнение задачи дифракции H-поляризованной электромагнитной волны на поверхности вращения

В. С. Булыгин
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The problem of H – polarized electromagnetic wave diffraction on a rotation surface is investigated. Using obtained in [1] integral equation with logarithmic singularity for surface current density the problem is reduced to hypersingular integral equation which is calculated by the method of discrete singularities. Using this integral equation the infinitely far located source and near diffracted electromagnetic field is produced. The numerical experiment results are given for radiation pattern.

1. Введение

Для теории различных антенных устройств большое значение имеют задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих поверхностях вращения: параболических, конических, сферических, дисковых антеннах[1]-[3], открытых резонаторах конечных размеров [4]-[6].

В работах [1]-[3] задача дифракции H – поляризованной электромагнитной волны на идеально проводящей поверхности вращения была сведена к интегро-дифференциальному, которое решалось методом регуляризациии. В данной работе, используя результаты [1] - [3], задача впервые будет решена методом дискретных особенностей с предварительным сведением ее к гиперсингулярному интегральному уравнению. При этом для построения дискретной математической модели используются квадратурные формулы интерполяционного типа [7], что обеспечивает высокую скорость сходимости приближенного решения к точному [8], [9]. В последние годы при решении различных краевых задач все большее применение находят сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения([8]-[11]). Следует отметить, что при аналитических исследованиях в приложениях уже давно двумерные краевые задачи стали сводить к гиперсингулярным интегральным уравнениям, так как для них хорошо разработаны методы оценки скорости сходимости приближенного решения к точному ([8], [9], [11], [12]).

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции монохроматического H – поляризованного электромагнитного поля $\vec{E}^0 = \vec{r}^0 E_r^0 + \vec{z}^0 E_z^0$, $\vec{H}^0 = \vec{\varphi} E_\varphi^0$, на идеально проводящей незамкнутой поверхности вращения S, расположенной в безграничной однородной изотропной среде. Зависимость от времени задается множителем $e^{i\varpi t}$. Под воздействием первичного поля $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$ на S наводятся поверхностные электрические токи с плотностью $\vec{j}$, которые создают вторичное электромагнитное поле $\vec{E}=\vec{r}^{\,0}E_r+\vec{z}^{\,0}E_z,\vec{H}=\vec{\varphi}E_{\varphi}$. Вне поверхности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют уравнению Максвелла:

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-i\omega\mu\vec{H}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}=i\omega\varepsilon\vec{E}$$

где ε и μ - абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

На поверхности S касательная составляющая полного поля обращается в нуль:

$$\left[\vec{n},\vec{E}(x)\right]=-\left[\vec{n},\vec{E}^{0}(x)\right],\ x\in S$$

На бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}+ik\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}=\overline{o}\left(r^{-1}\right),\ r\to+\infty$$

Чтобы решение удовлетворяло условию на ребрах поверхности S, потребуем выполнения условий Майкснера в интегральной форме:

$$\int_{\Omega}\left(\varepsilon\left|\vec{E}\right|^{2}+\mu\left|\vec{H}\right|^{2}\right)dV<\infty$$

Здесь $\Omega\in R^{3}$ - ограниченная область.

Введем цилиндрическую систему координат ρ,φ,z таким образом, чтобы полярная ось совпала с осью незамкнутой поверхности вращения S. Тогда поверхность S образована вращением некоторого контура Γ вокруг оси OZ. Поверхность S предполагается достаточно гладкой и не имеющей самопересечений. Введем также систему криволинейных ортогональных координат вращения q,τ,φ так, чтобы поверхность вращения имела параметризацию: S: $q=q_0$, $\tau\in[\alpha,\beta]$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Определенные в данной точке орты $\left(\vec{q}^{\,0},\vec{\tau}^{\,0},\vec{\varphi}^{\,0}\right)$ образуют правую тройку векторов. Связь с цилиндрической системой координат $\rho=\rho(q,\tau)$, $z=z(q,\tau)$.

Параметризация контура $\Gamma:\rho(q_0,t)=:\rho_0(t)=:\rho_0$,
$z(q_0,t)=:z_0(t)=:z_0, t\in[\alpha,\beta]$, q_0 - некоторая константа, т. е.
$x=(\rho_0\cos\psi,\rho_0\cos\psi,z_0)\in S$

Точки наблюдения будем обозначать через $y=(\rho\cos\varphi,\rho\cos\varphi,z)$.

Под воздействием излучения H-поляризованной волны $\vec{E}^{0}=\vec{\rho}^{\,0}E_r+\vec{z}^{\,0}E_z$, $\vec{H}^{0}=\vec{\varphi}^{0}E_{\varphi}$ (здесь $\vec{\rho}^{\,0}$, $\vec{z}^{\,0}$, $\vec{\varphi}^{0}$ - орты цилиндрической системы координат) на S наводятся поверхностные электрические токи с плотностью $\vec{j}=\vec{\tau}^{\,0}j_{\tau}(t)$.

В [1] получено уравнение для компоненты поверхностной плотности токов:

$$\lim_{q\to q_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial S_0\left(q,\tau,t\right)}{\partial t}j_\tau\left(t\right)\cdot\rho_0\left(t\right)dt-$$
$$-k^2\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(S_0\left(q_0,\tau,t\right)z_\tau^{'}z_{0t}^{'}+S_1\left(q_0,\tau,t\right)\rho_\tau^{'}\rho_{0t}^{'}\right)\rho_0\left(t\right)j_\tau\left(t\right)dt=f\left(\tau\right) \quad (1)$$

Здесь ядра S_0 и S_1 имеют следующий вид

$$S_m\left(q,\tau,t\right)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}\cos\left(m\psi\right)d\psi,\;\; m=1,2\,,$$

где $L^2=\rho^2+\rho_0{}^2-2\rho\rho_0\cos\psi+\left(z-z_0\right)^2$

Правая часть уравнения (1) $f\left(\tau\right)=4\pi kih_\tau\left(q_0,\tau\right)E_\tau^0\left(q_0,\tau\right)$ - известная функция.

Здесь $h_\tau\left(q,\tau\right)=\sqrt{\rho^{'}\left(q,\tau\right)+z^{'}\left(q,\tau\right)}$. Обозначим $w\left(t\right)=j_\tau\left(t\right)\cdot\rho_0\left(t\right)$.

Наша задача – свести данное уравнение к интегральному гиперсингулярному уравнению вида:

$$a\left(\tau\right)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{w\left(t\right)}{\left(\tau-t\right)^2}dt+b\left(\tau\right)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{w\left(t\right)}{\left(\tau-t\right)}dt+c\left(\tau\right)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln\left|\tau-t\right|w\left(t\right)dt+\int\limits_{\alpha}^{\beta}K\left(\tau,t\right)w\left(t\right)dt=$$
$$=f\left(\tau\right) \quad (2)$$

где $K\left(\tau,t\right)$— Гельдерова функция по каждой переменной, равномерно по второй,

$a\left(\tau\right),b\left(\tau\right),c\left(\tau\right)$ - некоторые гладкие на $\left[\alpha,\beta\right]$ функции.

Заметим также, что в силу условий на ребре [13] $w\left(t\right)=O\left(\sqrt{\left(t-\alpha\right)\left(\beta-t\right)}\right)$.

2. Выделение особенностей ядра.

Пусть точки интегрирования $x=\left(\rho_0\cos\psi,\rho_0\cos\psi,z_0\right)$ и точки наблюдения $y=\left(\rho\cos\varphi,\rho\cos\varphi,z\right)$ находятся на поверхности вращения S, т. е.

$\rho\left(q_0,t\right)=\rho_0$, $z\left(q_0,t\right)=z_0$ - точки интегрирования

$\rho\left(q_0,\tau\right)=\rho$, $z\left(q_0,\tau\right)=z$ - точки наблюдения.

Рассмотрим функцию $S_0\left(q_0,\tau,t\right)=S_0\left(\tau,t\right)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}d\psi$, где

$$L^2=\rho^2+\rho_0{}^2-2\rho\rho_0\cos\psi+\left(z-z_0\right)^2=\left(\rho+\rho_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2-4\rho_0\rho\cos^2\left(\psi/2\right)=$$
$$=\left(r^*\right)^2\left(1-\nu^2\cos^2\left(\psi/2\right)\right)$$

Здесь $r^*=r^*\left(\tau,t\right)=\sqrt{\left(\rho+\rho_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}$, $\nu=\nu\left(\tau,t\right)=\dfrac{2\sqrt{\rho\cdot\rho_0}}{r^*\left(\tau,t\right)}$

Ядро $S_0\left(\tau,t\right)$ можно представить в виде:

$$S_0(\tau,t)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}d\psi=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}-\left(1-ikL-\dfrac{k^2L^2}{2}\right)}{L}d\psi+\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{L}-2\pi ik-\frac{k^2}{2}\int_0^{2\pi}Ld\psi \quad (3)$$

Найдем асимптотическое разложение каждого слагаемого, стоящего слева в данном выражении. Для этого представим функцию $\int_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi$ в виде:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{L(\tau,t,\psi)}d\psi=\frac{2}{r^*}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\nu^2\cos^2\dfrac{\psi}{2}\right)}}d\psi=\frac{4}{r^*}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\nu^2\sin^2\beta\right)}}d\beta=\frac{4}{r^*}K(\nu)$$

где $K(\nu)$— эллиптический интеграл первого рода.

Асимптотическое разложение $K(\nu)$ [14]

$$K(\nu)\underset{\nu\to1}{=}\ln\frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}}+\frac{1}{4}\left(\ln\frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}}-1\right)\left(1-\nu^2\right)+O\left(\left(1-\nu^2\right)^2\ln\left(1-\nu^2\right)\right)$$

$$1-\nu^2=\frac{(\rho-\rho_0)^2+(z-z_0)^2}{(\rho+\rho_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$(\rho-\rho_0)^2+(z-z_0)^2=(t-\tau)^2\left[\left(\frac{\rho-\rho_0}{t-\tau}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-\tau}\right)^2\right]=(t-\tau)^2c^2(\tau,t),$$

где

$$c(\tau,t)=\sqrt{\left(\frac{\rho-\rho_0}{t-\tau}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-\tau}\right)^2}$$

$c(\tau,t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция по обеим переменным при $\tau,t\in(\alpha,\beta)$

Таким образом

$$1-\nu^2=\frac{(t-\tau)^2c^2(\tau,t)}{\left(r^*(\tau,t)\right)^2}$$

$$\ln\frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}}=\ln\frac{4r^*(\tau,t)}{c(\tau,t)}-\ln|\tau-t|$$

Далее для удобства будем обозначать $r^*:=r^*(\tau,t)$, $c:=c(\tau,t)$, $K(\nu(\tau,t))=K(\tau,t)$

Таким образом

$$K(\tau,t)\underset{t\to\tau}{=}\ln\frac{4r^*}{c}-\ln|\tau-t|+\frac{1}{4}\left(\ln\frac{4r^*}{c}-\ln|\tau-t|-1\right)\frac{(t-\tau)^2c^2}{(r^*)^2}+$$
$$+O\left((t-\tau)^4\ln|\tau-t|\right) \tag{4}$$

Всюду в дальнейшем ограниченные функции $O(1)$ при $t\to\tau$ будут удовлетворять также условию Гельдера, т. к. будут содержать слагаемое, которое является гладкой функцией и слагаемое вида $C(\tau,t)\cdot(t-\tau)\ln|\tau-t|$, где $C(\tau,t)$ — также гладкая функция. А функция $(t-\tau)\ln|\tau-t|$ — удовлетворяет условию Гельдера. Все ограниченные функции будем для простоты обозначать $O(1)$.

Найдем асимптотическое разложение $\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi$ при $t\to\tau$

Для этого воспользуемся выражением:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)=-\frac{\rho'}{\rho^2}$$

и тем, что $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,t)-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)=O(t-\tau)$ и $\frac{4}{r^*(\tau,t)}-\frac{4}{r^*(\tau,\tau)}=O(t-\tau)$.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}K(\tau,t)\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)K(\tau,t)+\frac{4}{r^*}\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)\underset{t\to\tau}{=}$$
$$\underset{t\to\tau}{=}\frac{\rho'}{\rho^2}\ln|\tau-t|-\frac{2}{\rho}\frac{1}{\tau-t}+O(1)$$

Отсюда, в силу тождества:

$$S_0(\tau,t)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}-1}{L}d\psi+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi$$

и того, что $\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}-1}{L}d\psi$ — удовлетворяет условию Гельдера по каждой переменной равномерно по второй, получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}S_0(\tau,t)=\frac{\rho_\tau'}{\rho^2}\ln|\tau-t|-\frac{2}{\rho}\frac{1}{\tau-t}+O(1) \tag{5}$$

Теперь найдем асимптотическое разложение $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi$ при $t\to\tau$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}K(\tau,t)\right)=K(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4}{r^*}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)+\frac{4}{r^*}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)=(\mathrm{I})+(\mathrm{II})+(\mathrm{III})+(\mathrm{IV}) \tag{6}$$

В дальнейших рассуждениях будут использовано следующее тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)=\frac{\left(z^{'}\right)^2+2\left(\rho^{'}\right)^2}{2\left(\rho\right)^3}$$

Первое слагаемое в (6):

$$(\mathrm{I})=K(\tau,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,t)-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)\right)+K(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)$$

Первое слагаемое в (I) имеет порядок малости $O\left((\tau-t)\ln|\tau-t|\right)$ при $t\to\tau$

Второе слагаемое в (I):

$$K(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)\underset{t\to\tau}{=}\frac{\left(z^{'}\right)^2+2\left(\rho^{'}\right)^2}{2\left(\rho^{'}\right)^3}\left(-\ln|\tau-t|+\ln\frac{4r^*}{c}\right)+O\left((\tau-t)^2\ln|\tau-t|\right)\underset{t\to\tau}{=}$$

$$\underset{t\to\tau}{=}-\ln|\tau-t|\frac{\left(z^{'}\right)^2+2\left(\rho^{'}\right)^2}{2\left(\rho\right)^3}+O(1)$$

Таким образом, окончательно, асимптотическое разложение для первого слагаемого в (6):

$$(\mathrm{I})\underset{t\to\tau}{=}-\ln|\tau-t|\frac{\left(z^{'}\right)^2+2\left(\rho^{'}\right)^2}{2\left(\rho\right)^3}+O(1)$$

Преобразуем второе слагаемое в (6):

$$(\mathrm{II})=\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,t)-\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)\right)\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)$$

Продифференцировав (4) по переменной t, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)\underset{t\to\tau}{=}-\frac{1}{t-\tau}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{4r^*}{c}\right)+O\left((\tau-t)\ln|\tau-t|\right)$$

Отсюда следует, что первое слагаемое в (II) имеет порядок малости $O(1)$.

Второе слагаемое в выражении для (II):

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*}\right)(\tau,\tau)\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)\underset{t\to\tau}{=}-\frac{\rho^{'}}{\rho^2}\frac{1}{t-\tau}+O(1)$$

Получаем выражение для второго слагаемого в (6):

$$(\mathrm{II})\underset{t\to\tau}{=}-\frac{\rho^{'}}{\rho^2}\frac{1}{t-\tau}+O(1)$$

Аналогично получается выражение для третьего слагаемого:

$$(\mathrm{III})\underset{t\to\tau}{=}\frac{\rho^{'}}{\rho^2}\frac{1}{t-\tau}+O(1)$$

Отсюда

$$(\mathrm{II})+(\mathrm{III})=O(1)$$

Четвертое слагаемое в (6):

$$(\mathrm{IV}) = \frac{4}{r^*(\tau,t)}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}K(\tau,t) = \left(\frac{4}{r^*(\tau,t)} - \frac{4}{r^*(\tau,\tau)}\right)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}K(\tau,t) +$$

$$+\frac{4}{r^*(\tau,\tau)}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}K(\tau,t) = (\mathrm{IV}_1) + (\mathrm{IV}_2)$$

Продифференцировав (4) по переменным t и τ, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}K(\tau,t) \underset{t\to\tau}{=} -\frac{1}{(\tau-t)^2} + \frac{c^2(\tau,t)}{2\left(r^*(\tau,t)\right)^2}\ln|\tau-t| + O(1) =$$

$$\underset{t\to\tau}{=} -\frac{1}{(\tau-t)^2} + \left(\frac{c^2(\tau,t)}{2\left(r^*(\tau,t)\right)^2} - \frac{c^2(\tau,\tau)}{2\left(r^*(\tau,\tau)\right)^2}\right)\ln|\tau-t| + \frac{c^2(\tau,\tau)}{2\left(r^*(\tau,\tau)\right)^2}\ln|\tau-t| + O(1)$$

Второе слагаемое справа имеет порядок малости $O\left((\tau-t)\ln|\tau-t|\right)$

С учетом тождества

$$c(\tau,\tau) = \lim_{t\to\tau}\sqrt{\left(\frac{\rho-\rho_0}{t-\tau}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{t-\tau}\right)^2} = \sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \left(z'\right)^2}$$

находим асимптотическое разложение

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}K(\tau,t) = -\frac{1}{(\tau-t)^2} + \frac{\left(\rho'\right)^2 + \left(z'\right)^2}{8\rho^2}\ln|\tau-t| + O(1)$$

Отсюда

$$(\mathrm{IV}_2) \underset{t\to\tau}{=} -\frac{2}{\rho}\frac{1}{(\tau-t)^2} + \frac{\left(\rho'\right)^2 + \left(z'\right)^2}{4\rho^3}\ln|\tau-t| + O(1)$$

Используя разложение в ряд Тейлора функции $\dfrac{4}{r^*(\tau,t)}$ при $t\to\tau$

$$\frac{4}{r^*(\tau,t)} - \frac{4}{r^*(\tau,\tau)} \underset{t\to\tau}{=} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{4}{r^*(\tau,t)}\right)\Bigg|_{t=\tau}\cdot(t-\tau) + O\left((\tau-t)^2\right) \underset{t\to\tau}{=} -\frac{\rho'}{\rho^2}(t-\tau) + O\left((\tau-t)^2\right)$$

получаем

$$(\mathrm{IV}_1) \underset{t\to\tau}{=} -\frac{\rho'}{\rho^2}\frac{1}{(\tau-t)} + O(1)$$

Окончательно находим

$$(\mathrm{IV}) \underset{t\to\tau}{=} -\frac{2}{\rho}\frac{1}{(\tau-t)^2} - \frac{\rho'}{\rho^2}\frac{1}{(\tau-t)} + \frac{\left(\rho'\right)^2 + \left(z'\right)^2}{4\rho^3}\ln|\tau-t| + O(1)$$

Таким образом, нашли асимптотическое разложение при $t\to\tau$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi}\frac{1}{L}d\psi=-\frac{2}{\rho}\frac{1}{(\tau-t)^2}-\frac{\rho'}{\rho^2}\frac{1}{(\tau-t)}-\ln|\tau-t|\frac{3(\rho')^2+(z')^2}{4\rho^3}+O(1) \qquad (7)$$

Найдем асимптотическое разложение $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi}Ld\psi$ при $t\to\tau$

$$\int_0^{2\pi}Ld\psi=r^*\int_0^{2\pi}\left(1-\nu^2\cos^2\frac{\psi}{2}\right)d\psi=4r^*\int_0^{\pi/2}\left(1-\nu^2\sin^2\beta\right)d\beta=4r^*E(\nu)$$

$E(\nu)$ — эллиптический интеграл второго рода.

$$E(\nu)\underset{\nu\to1}{=}1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\nu^2\right)+O\left(\left(1-\nu^2\right)^2\ln\left(1-\nu^2\right)\right)$$

Это асимптотическое разложение можно переписать:

$$E(\tau,t)\underset{t\to\tau}{=}1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4r^*}{c}-\ln|\tau-t|-\frac{1}{2}\right)\frac{(t-\tau)^2c^2}{\left(r^*\right)^2}+O\left((t-\tau)^4\ln|\tau-t|\right)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}E(\nu)=\ln|\tau-t|\frac{c^2(\tau,t)}{\left(r^*(\tau,t)\right)^2}+O(1)=\ln|\tau-t|\left(\frac{c^2(\tau,t)}{\left(r^*(\tau,t)\right)^2}-\frac{c^2(\tau,\tau)}{\left(r^*(\tau,\tau)\right)^2}\right)+$$

$$+\ln|\tau-t|\frac{c^2(\tau,\tau)}{\left(r^*(\tau,\tau)\right)^2}+O(1)=\ln|\tau-t|\frac{(\rho')^2+(z')^2}{4\rho^2}+O(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi}Ld\psi=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(4r^*E(\tau,t)\right)=E(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(4r^*\right)+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(4r^*\right)\frac{\partial}{\partial t}E(\tau,t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(4r^*\right)\frac{\partial}{\partial \tau}E(\tau,t)+4r^*\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}E(\tau,t)$$

Особенность имеет лишь четвертое слагаемое справа, поэтому:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi}Ld\psi=2\ln|\tau-t|\frac{(\rho')^2+(z')^2}{\rho}+O(1) \qquad (8)$$

С учетом того, что $\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}-\left(1-ikL-\frac{k^2L^2}{2}\right)}{L}d\psi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{ik^3L^2}{6}+O\left(L^3\right)\right)d\psi$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}-\left(1-ikL-\frac{k^2L^2}{2}\right)}{L}d\psi=O(1)$$

Из (3) с учетом (7) и (8) получаем асимптотическое разложение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L} = -\frac{2}{\rho}\frac{1}{(\tau-t)^2} - \frac{\rho_\tau^{'}}{\rho^2}\frac{1}{(\tau-t)} - \\ -\ln|\tau-t|\left(\frac{3\left(\rho_\tau^{'}\right)^2+\left(z_\tau^{'}\right)^2}{4\rho^3} + k^2\frac{\left(\rho_\tau^{'}\right)^2+\left(z_\tau^{'}\right)^2}{\rho}\right) + O(1) \tag{8}$$

4. Сведение к гиперсингулярному интегральному уравнению

Сведем уравнение (1) к гиперсингулярному интегральному уравнению (2). Преобразуем первое слагаемое в (1):

$$\lim_{q\to q_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_\alpha^\beta \frac{\partial S_0(q,\tau,t)}{\partial t}w(t)\,dt = \lim_{q\to q_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(wS_0\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_\alpha^\beta S_0 w^{'}dt\right) = \\ = -\lim_{q\to q_0}\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial\tau}S_0 w^{'}dt = -\frac{2}{\rho}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\frac{w^{'}dt}{\tau-t} + \frac{\rho^{'}}{\rho^2}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\ln|\tau-t|\,w^{'}dt - \\ -\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\left(\frac{\partial}{\partial\tau}S_0 + \frac{\rho^{'}}{\rho^2}\ln|\tau-t| - \frac{2}{\rho}\frac{1}{\tau-t}\right)w^{'}dt - \lim_{q\to q_0}\int_{\tau-h}^{\tau+h}\frac{\partial}{\partial\tau}S_0 w^{'}dt \tag{9}$$

Можно показать, что

$$\lim_{h\to 0}\lim_{q\to q_0}\int_{\tau-h}^{\tau+h}\frac{\partial}{\partial\tau}S_0(q,\tau,t)\,w^{'}(t)\,dt = 0 \tag{10}$$

С учетом (10) можно переписать (9), перейдя к пределу при $h\to 0$:

$$\lim_{q\to q_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_\alpha^\beta \frac{\partial S_0}{\partial t}w\,dt = \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{2}{\rho}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\frac{w^{'}dt}{\tau-t} - \frac{\rho^{'}}{\rho^2}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\ln|\tau-t|\,w^{'}dt\right\} - \\ -\lim_{h\to 0}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\left(\frac{\partial}{\partial\tau}S_0 - \frac{\rho^{'}}{\rho^2}\ln|\tau-t| - \frac{2}{\rho}\frac{1}{\tau-t}\right)w^{'}dt \tag{11}$$

В силу того, что $w(\alpha) = w(\beta) = 0$, получим:

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\frac{w^{'}(t)}{\tau-t}dt = \int_\alpha^\beta \frac{w(t)}{(\tau-t)^2}dt \tag{12}$$

где интеграл справа понимается в смысле конечной части по Адамару.

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_\alpha^{\tau-h} + \int_{\tau+h}^\beta\right]\ln|\tau-t|\,w^{'}(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{w(t)}{\tau-t}dt \tag{13}$$

где интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши.

$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}S_0(q_0,\tau,t) + \frac{\rho^{'}}{\rho^2}\ln|\tau-t| - \frac{2}{\rho}\frac{1}{\tau-t}\right)_t^{'}$ будет иметь логарифмическую особенность. Используя асимптотическое разложение функции $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}S_0(q_0,\tau,t)$ (8), получим:

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \tau} S_0(q_0,\tau,t) + \frac{\rho'}{\rho^2}\ln|\tau-t| - \frac{2}{\rho}\frac{1}{\tau-t} \right) w'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{2}{\rho}\frac{1}{(\tau-t)^2} + \frac{\rho'}{\rho^2}\frac{1}{(\tau-t)} + \ln|\tau-t| \left(\frac{3(\rho')^2 + (z')^2}{4\rho^3} + k^2\frac{(\rho')^2+(z')^2}{\rho} \right) \right) w dt -$$

$$-\int_\alpha^\beta \ln|\tau-t| \left(\frac{3(\rho')^2 + (z')^2}{4\rho^3} + k^2\frac{(\rho')^2+(z')^2}{\rho} \right) w dt$$

Обозначим

$$\mathrm{K}_1(\tau,t) = \frac{\partial^2 S_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{2}{\rho}\frac{1}{(\tau-t)^2} + \frac{\rho'}{\rho^2}\frac{1}{(\tau-t)} + \ln|\tau-t| \left(\frac{3(\rho')^2 + (z')^2}{4\rho^3} + k^2\frac{(\rho')^2+(z')^2}{\rho} \right)$$

$\mathrm{K}_1(\tau,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по каждой переменной равномерно по второй. Используя это выражение вместе с (12) и (13) можем переписать выражение (11) в виде:

$$\begin{aligned} &\lim_{q\to q_0} \frac{\partial}{\partial \tau}\int_\alpha^\beta \frac{\partial S_0(q,\tau,t)}{\partial t} w(t)\,dt = -\frac{2}{\rho}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)}{(\tau-t)^2}dt - \frac{\rho'}{\rho^2}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)}{\tau-t}dt - \\ &-\left(\frac{3(\rho')^2 + (z')^2}{4\rho^3} + k^2\frac{(\rho')^2+(z')^2}{\rho} \right)\int_\alpha^\beta \ln|\tau-t|\, w(t)\,dt + \int_\alpha^\beta \mathrm{K}_1(\tau,t)\, w(t)\,dt \end{aligned} \tag{14}$$

Выделим логарифмическую особенность во втором слагаемом в (1):

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta \left(S_0(q_0,\tau,t) z'_\tau z'_{0t} + S_1(q_0,\tau,t)\rho'_\tau \rho'_{0t} \right) w(t)\,dt = \\ &= -\frac{2}{\rho}\left[\left(z'_\tau\right)^2 + \left(\rho'_\tau\right)^2 \right]\int_\alpha^\beta \ln|\tau-t|\, w(t)\,dt + \int_\alpha^\beta K_2(\tau,t)\, w(t)\,dt \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\mathrm{K}_2(\tau,t) = S_0 z'_\tau z'_{0t} + S_1 \rho'_\tau \rho'_{0t} + \frac{2}{\rho}\left[\left(z'_\tau\right)^2 + \left(\rho'_\tau\right)^2 \right]\ln|\tau-t|$$

Итого из (1) с помощью (14) и (15) получено гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{\rho}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)}{(\tau-t)^2}dt - \frac{\rho'}{\rho^2}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)}{\tau-t}dt + \int_\alpha^\beta \mathrm{K}_3(\tau,t)\, w(t)\,dt - \\ &-\left(\frac{3(\rho')^2 + (z')^2}{4\rho^3} - k^2\frac{(\rho')^2+(z')^2}{\rho} \right)\int_\alpha^\beta \ln|\tau-t|\, w(t)\,dt = f(\tau),\ \tau \in (\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{16}$$

$K_3(\tau,t)=K_1(\tau,t)-k^2\cdot K_2(\tau,t)$- удовлетворяет условию Гельдера по каждой переменной равномерно по второй.

Умножим на ρ^3 левую и правую части уравнения (16) и сделаем замену :

$$t(x)=\alpha\frac{1-x}{2}+\beta\frac{1+x}{2},\quad \tau(y)=\alpha\frac{1-y}{2}+\beta\frac{1+y}{2},$$

а также воспользуемся тем, что $w(t(x))=\dfrac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Здесь $u(x)$- ограниченная функция в силу того, что $w(t)=O\left(\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\right)$:

$$\begin{aligned}&a(y)\int_\alpha^\beta\frac{u(x)}{(y-x)^2}\sqrt{1-x^2}dx+b(y)\int_\alpha^\beta\frac{u(x)}{y-x}\sqrt{1-x^2}dx+\\&c(y)\int_\alpha^\beta\ln|y-x|u(x)\sqrt{1-x^2}dx+\int_\alpha^\beta Q(y,x)u(x)\sqrt{1-x^2}dx=g(y),\ \tau\in(\alpha,\beta)\end{aligned}\tag{17}$$

Здесь

$$a(y)=\frac{-4}{\beta-\alpha}\rho^2\Big|_{\tau=\tau(y)},\ b(\tau)=-\rho'\rho\Big|_{\tau=\tau(y)},$$

$$c(y)=-\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\frac{3(\rho')^2+(z')^2}{4}-k^2\rho^2\left((\rho')^2+(z')^2\right)\right)\Bigg|_{\tau=\tau(y)}$$

$$Q(y,x)=\rho^3(y)\frac{\beta-\alpha}{2}\frac{\partial^2S_0}{\partial t\partial\tau}\Bigg|_{\substack{\tau=\tau(y)\\t=t(x)}}+a(y)\frac{1}{(y-x)^2}+b(y)\frac{1}{(y-x)}+c(y)\ln|y-x|-$$

$$-k^2\rho^3(y)\frac{\beta-\alpha}{2}\left(S_0z'_\tau z'_{0t}+S_1\rho'_\tau\rho'_{0t}\right)\Big|_{\substack{\tau=\tau(y)\\t=t(x)}}$$

$$g(y)=\rho(\tau(y))^3f(\tau(y))$$

5. Выражение для полей в ближней и дальней зонах

Найдем вектор электрической напряженности $\vec{E}^0=\vec{r}^0E_r+\vec{z}^0E_z$. Векторный потенциал $\vec{A}$ выражается с помощью $\vec{j}(t)=\vec{\tau}^0j_\tau(t)$ следующим образом [1]

$$\vec{A}(\rho,z)=\frac{\mu}{4\pi}\int_\Gamma\rho_0h_\tau\vec{j}(t)dt\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}d\psi,\tag{18}$$

$$\Psi(\rho,z)=-\frac{i}{4\pi k}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_\Gamma\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}d\psi\right\}j_\tau(t)dt\tag{19}$$

Орт цилиндрической системы координат:

$$\vec{\rho}^0=\vec{x}^0\cos\psi+\vec{y}^0\sin\psi$$

Орт системы криволинейных ортогональных координат вращения, относящийся к точке интегрирования:

$$\vec{t}^{\,0}=\vec{x}^{\,0}\,\frac{\rho_0^{'}}{h_\tau(t)}\cos\psi+\vec{y}^{\,0}\,\frac{\rho_0^{'}}{h_\tau(t)}\sin\psi+\vec{z}^{\,0}\,\frac{z_0^{'}}{h_\tau(t)}$$

Таким образом, имеем:

$$\left(\vec{\rho}^{\,0},\vec{t}^{\,0}\right)=\frac{\rho_0^{'}}{h_\tau(t)}\cos(\psi-\varphi),\ \left(\vec{z}^{\,0},\vec{t}^{\,0}\right)=\frac{z_0^{'}}{h_\tau(t)}$$

Составляющие векторного потенциала A_r и A_z с учетом последних соотношений вычисляются в явном виде:

$$A_\rho(\rho,z)=\frac{\mu}{4\pi}\int_\Gamma\rho_0\rho_0^{'}j_\tau(t)\,dt\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}\cos\psi\,d\psi=\frac{\mu}{4\pi}\int_\Gamma S_1(\rho,z,t)\rho_0\rho_0^{'}j_\tau(t)\,dt \qquad (20)$$

$$A_z(\rho,z)=\frac{\mu}{4\pi}\int_\Gamma\rho_0 z_0^{'}j_\tau(t)\,dt\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}\,d\psi=\frac{\mu}{4\pi}\int_\Gamma S_0(\rho,z,t)\rho_0 z_0^{'}j_\tau(t)\,dt \qquad (21)$$

Электрическая напряженность выражается через векторный и скалярный потенциал[1]:

$$\vec{E}(x)=-\mathrm{grad}\Psi(x)-i\varpi\vec{A}(x)$$

Отсюда

$$E_\rho(x)=-\frac{\partial\Psi(x)}{\partial\rho}-i\varpi A_\rho(x) \qquad (22)$$

$$E_z(x)=-\frac{\partial\Psi(x)}{\partial z}-i\varpi A_z(x) \qquad (23)$$

Подставляя в (22) и (23) выражения (19), (20), (21), получим:

$$E_\rho(\rho,z)=\frac{i}{4\pi k}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\int_\alpha^\beta\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t\partial\rho}S_0(\rho,z,t)j_\tau(t)\,dt-k^2\int_\alpha^\beta S_1(\rho,z,t)\rho_0\rho_0^{'}j_\tau(t)\,dt\right] \qquad (24)$$

$$E_z(\rho,z)=\frac{i}{4\pi k}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\int_\alpha^\beta\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}S_0(\rho,z,t)j_\tau(t)\,dt-k^2\int_\alpha^\beta S_0(\rho,z,t)\rho_0 z_0^{'}j_\tau(t)\,dt\right] \qquad (25)$$

Найдем теперь выражение для E_ρ и E_z в дальней зоне:

$E_\eta(R,\theta,\varphi)\sim F_\eta(\theta,\varphi)\dfrac{e^{-ikR}}{R}$, $\eta=\rho,z$, $R\to\infty$, а (θ,φ) - точка на единичной сфере в сферической системе координат: $x=\mathrm{R}\cdot\sin\theta\cos\varphi$, $y=\mathrm{R}\cdot\sin\theta\sin\varphi$, $z=\mathrm{R}\cdot\cos\theta$.

Диаграмма рассеяния:

$$F_\eta(\theta,\varphi)=\lim_{R\to\infty}\frac{E_\eta(R,\theta,\varphi)R}{e^{-ikR}}\ ,\ \eta=\rho,z \qquad (26)$$

$$L(R,\theta,\psi,t)=\sqrt{R^2\sin^2\theta+\rho_0-2\rho_0R\sin\theta\cos\psi+\left(R\cos\theta-z_0\right)^2}=$$

$$= R\sqrt{1+\frac{\rho_0{}^2}{R^2}-2\frac{\rho_0\sin\theta\cos\psi}{R}+\frac{z_0{}^2-2z_0R\cos\theta}{R^2}} =$$
$$= R\left(1-\frac{\rho_0\sin(\theta)\cos(\psi)+\cos(\theta)z_0}{R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)$$

Отсюда:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-ikL(R,\theta,\psi,t)}}{L(R,\theta,\psi,t)}\frac{R}{e^{-ikR}} = e^{ik\left[\rho_0\sin(\theta)\cos(\psi)+\cos(\theta)z_0\right]}$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}S_0(R,\theta,t) = e^{ik\cos(\theta)z_0}\int_0^{2\pi}e^{ik\rho_0\sin\theta\cos\psi}d\psi$$

Для подсчета интеграла справа воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя [15]:

$$J_0(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iT\cos\psi}d\psi$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}S_0(R,\theta,t) = 2\pi e^{ik\cos\theta z_0}J_0(k\rho_0\sin\theta) \tag{27}$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}S_1(R,\theta,t) = e^{ik\cos(\theta)z_0}\int_0^{2\pi}e^{ik\rho_0\sin\theta\cos\psi}\cos\psi d\psi$$

Для подсчета интеграла справа продифференцируем интегральное представление функции Бесселя:

$$-J_1(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iT\cos\theta}i\cos\theta d\theta$$

Отсюда

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}S_1(R,\theta,t) = 2\pi i e^{ik\cos\theta z}J_1(k\rho_0\sin\theta) \tag{28}$$

Вторая производная функции $S_m(q,\tau,t)$ по переменным η_1 и η_2 имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2}S_m(q,\tau,t) &= \frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL}}{L}\cos(m\psi)d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi}\left(g''_{\eta_1\eta_2}\frac{e^{-ikL}}{L^2}\left(-\frac{1}{L}-ik\right)+g'_{\eta_1}g'_{\eta_2}\frac{e^{-ikL}}{L^3}\left(-k^2+\frac{3ik}{L}+\frac{3}{L^2}\right)\right)\cos(m\psi)d\psi\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь

$$g = \frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\rho^2+\rho_0{}^2-2\rho\rho_0\cos(\psi)+(z-z_0)^2\right]$$

Найдем производные функции g по переменным t, ρ и z

$$g'_t(R,\theta,\psi,t) = \rho_0\rho'_{0t}-R\rho'_0\sin\theta\cos\psi+(z_0-R\cos\theta)z'_{0t}$$
$$g'_\rho(R,\theta,\psi,t) = R\sin\theta-\rho_0\cos\psi$$

$$g_z^{'}\left(R,\theta,\psi,t\right)=R\cos\theta-z_0$$

и воспользуемся формулой для вторых частных производных ядра (29):

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial\rho}S_0\left(R,\theta,t\right)=-k^2\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\int_0^{2\pi}g_t^{'}g_\rho^{'}\frac{e^{-ikL}}{L^3}d\psi=$$

$$=-k^2\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-R^2\rho_{0t}^{'}\sin^2\theta\cos\psi-R^2z_{0t}^{'}\cos\theta\sin\theta\right)}{L^2}\frac{e^{-ikL}}{L}d\psi=$$

$$=k^2e^{ik\cos(\theta)z}\int_0^{2\pi}\left(\rho_{0t}^{'}\sin^2\theta\cos\psi+z_{0t}^{'}\cos\theta\sin\theta\right)e^{ik\rho\sin(\theta)\cos(\psi)}d\psi=$$

$$=2\pi k^2e^{ik\cos(\theta)z}\left[i\rho_{0t}^{'}\sin^2\theta J_1(k\rho\sin\theta)+z_{0t}^{'}\cos\theta\sin\theta J_0(k\rho\sin\theta)\right]$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}S_0\left(R,\theta,t\right)=-k^2\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\int_0^{2\pi}g_t^{'}g_z^{'}\frac{e^{-ikL}}{L^3}d\psi=$$

$$=-k^2\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-R^2\rho_{0t}^{'}\sin\theta\cos\psi\cos\theta-R^2z_{0t}^{'}\cos^2\theta\right)}{L^2}\frac{e^{-ikL}}{L}d\psi=$$

$$=2\pi k^2e^{ik\cos(\theta)z}\left[i\rho_{0t}^{'}\sin\theta\cos\theta J_1(k\rho\sin\theta)+z_{0t}^{'}\cos^2\theta J_0(k\rho\sin\theta)\right]$$

Из выкладок, описанных выше, получаем две формулы:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\frac{\partial^2S_0}{\partial t\partial\rho}=2\pi k^2e^{ik\cos(\theta)z}\left[i\rho_{0t}^{'}\sin^2\theta J_1(p)+z_{0t}^{'}\cos\theta\sin\theta J_0(p)\right]\qquad(30)$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{-ikR}}\frac{\partial^2S_0}{\partial t\partial z}=2\pi k^2e^{ik\cos(\theta)z}\left[i\rho_{0t}^{'}\sin\theta\cos\theta J_1(p)+z_{0t}^{'}\cos^2\theta J_0(p)\right]\qquad(31)$$

где $p=k\rho_0\sin\theta$

Таким образом, используя (24) – (28) , (30), (31) находим выражение для поля в дальней зоне:

$$F_\eta\left(\theta\right)=\frac{ik}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}e^{ik\cos(\theta)z}\int_\alpha^\beta f_\eta\left(\theta\right)\rho_0j_\tau\left(t\right)dt,\qquad\eta=\rho,z$$

здесь:

$$f_\rho\left(\theta\right)=e^{ik\cos(\theta)z}\left[i\rho_{0t}^{'}\sin^2\theta J_1(p)+z_{0t}^{'}\cos\theta\sin\theta J_0(p)-\rho_{0t}^{'}iJ_1(p)\right]$$

$$f_z\left(\theta\right)=e^{ik\cos(\theta)z}\left[i\rho_{0t}^{'}\sin\theta\cos\theta J_1(p)+z_{0t}^{'}\cos^2\theta J_0(p)-z_{0t}^{'}J_0(p)\right]$$

6. Дискретная математическая модель

Введем обозначения операторов в соответствии с [7]:

$$\left(Au\right)\left(y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u\left(x\right)}{\left(y-x\right)^2}\sqrt{1-x^2}dx,\qquad\left(\varGamma^{-1}u\right)\left(y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u\left(x\right)}{y-x}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\left(Lu\right)\left(y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|y-x\right|u\left(x\right)\sqrt{1-x^2}dx,\qquad\left(\mathrm{K}u\right)\left(y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q\left(y,x\right)u\left(x\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Запишем (4.11) в операторном виде:

$$a(y)(Au)(y)+b(y)\left(\Gamma^{-1}u\right)(y)+c(y)(Lu)(y)+(\mathrm{Ku})(y)=g(y) \qquad (32)$$

Приближенное решение уравнения (6.11) ищем в виде интерполяционный полином степени $n-2$ — $u_{n-2}(t)$ такого, что имеет место система уравнений:

$$\begin{gathered}a\left(t_{0m}^{n}\right)\left(Au_{n-2}\right)\left(t_{0m}^{n}\right)+b\left(t_{0m}^{n}\right)\left(\Gamma^{-1}u_{n-2}\right)\left(t_{0m}^{n}\right)+c\left(t_{0m}^{n}\right)\left(Lu_{n-2}\right)\left(t_{0m}^{n}\right)+\\+\left(\mathrm{K}_{n-2,n-2}u_{n-2}\right)\left(t_{0m}^{n}\right)=g_{n-2}\left(t_{0m}^{n}\right),\quad m=0..n-1\end{gathered} \qquad (33)$$

Здесь $g_{n-2}(y)$ - полином степени $n-2$, построенный по корням полинома Чебышева второго рода $\left\{t_{0m}^{n}\right\}_{m=0}^{n-2}=\left\{\cos\dfrac{m+1}{n}\right\}_{m=0}^{n-2}$. $\mathrm{K}_{n-2,n-2}(y,x)$ - интерполяционный полином степени $n-2$ по переменной y и интерполяционный полином степени $n-2$ по переменной x по корням полинома Чебышева второго рода.

Используя квадратурные формулы [7]:

$$\left(Au_{n-2}\right)\left(t_{0l}^{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m=0\\l\neq m}}^{n-1}\frac{\left(1-(-1)^{l+m}\right)}{\left(t_{0m}^{n}-t_{0l}^{n}\right)^{2}}\left(1-\left(t_{0m}^{n}\right)^{2}\right)u_{n-2}\left(t_{0m}^{n}\right)-\frac{n}{2}u_{n-2}\left(t_{0l}^{n}\right) \qquad (34)$$

$$\left(\Gamma^{-1}u_{n-2}\right)\left(t_{0l}^{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m=0\\l\neq m}}^{n-1}\frac{\left(1-(-1)^{l+m}\right)}{t_{0m}^{n}-t_{0l}^{n}}\left(1-\left(t_{0m}^{n}\right)^{2}\right)u_{n-2}\left(t_{0m}^{n}\right) \qquad (35)$$

$$\left(Lu_{n-2}\right)\left(t_{0l}^{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m=0\\l\neq m}}^{n-1}\left(\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_{p}\left(t_{0l}^{n}\right)\frac{T_{p}\left(t_{0m}^{n}\right)}{p}+\frac{(-1)^{l+m}}{n}\right)\left(1-\left(t_{0m}^{n}\right)^{2}\right)u_{n-2}\left(t_{0m}^{n}\right) \qquad (36)$$

$$\left(\mathrm{K}u_{n-2}\right)\left(t_{0l}^{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m=0\\l\neq m}}^{n-1}\mathrm{K}\left(t_{0l}^{n},t_{0m}^{n}\right)\left(1-\left(t_{0m}^{n}\right)^{2}\right)u_{n-2}\left(t_{0m}^{n}\right) \qquad (37)$$

получаем, что (33) – система линейных алгебраических уравнений с неизвестным вектором $\left\{X_{m}=u_{n-2}\left(t_{0m}^{n}\right)\right\}_{m=0}^{n-2}$.

Решая СЛАУ (33) находим приближенные значения напряженности электромагнитного поля, используя выражения (24), (25) и квадратурную формулу (37):

$$E_{r}(\rho,z)=C_{k}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\rho'\left(t_{0m}^{n}\right)S_{1}\left(\rho,z,x\left(t_{0m}^{n}\right)\right)-\frac{\partial^{2}}{\partial t\partial r}S_{0}\left(\rho,z,x\left(t_{0m}^{n}\right)\right)\right)\left(1-\left(t_{0m}^{n}\right)^{2}\right)X_{m}$$

$$E_{z}(\rho,z)=C_{k}\sum_{m=0}^{n-1}\left(z'\left(t_{0m}^{n}\right)S_{0}\left(\rho,z,x\left(t_{0m}^{n}\right)\right)-\frac{\partial^{2}}{\partial t\partial z}S_{0}\left(\rho,z,x\left(t_{0m}^{n}\right)\right)\right)\left(1-\left(t_{0m}^{n}\right)^{2}\right)X_{m}$$

где $x(t)=\beta\dfrac{1+t}{2}+\alpha\dfrac{1-t}{2}$, $C_{k}=\dfrac{ik}{4}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\dfrac{\beta-\alpha}{2n}$

и поля в дальней зоне:

$$F_\eta(\theta) = \frac{ik\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\beta-\alpha}{2n}\sum_{m=0}^{n-1} f_\eta\left(\theta, x\left(t_{0m}^n\right)\right)\left(1-\left(t_{0m}^n\right)^2\right)X_m, \quad \eta = r, z$$

Численный эксперимент был проведен для параболоида:

$$\rho = q_0 \cdot \tau\,,\ z = \frac{1}{2}\left(q_0{}^2 - \tau^2\right),\ \tau \in [0,1],\ \ q_0 = 1$$

В качестве первичного поля было взято поле элементарного электрического вибратора[3]. На рисунках показаны модули диаграмм направленности $F_z(\theta)$ и $E_r(\theta)$:

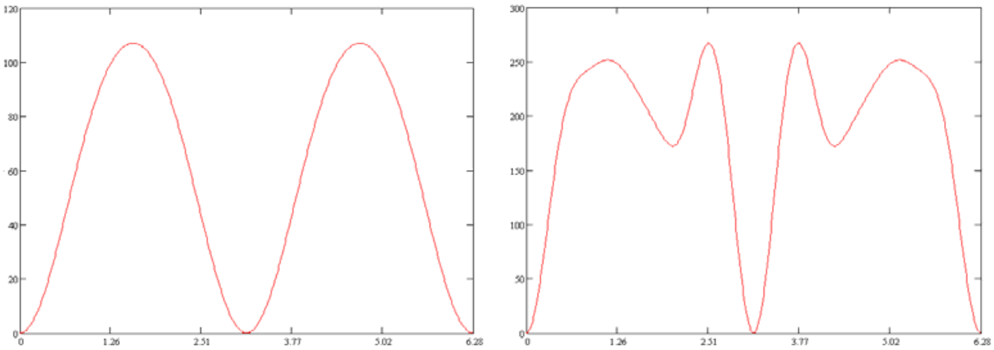

Рис. 1 Диаграммы рассеяния $F_z(\theta)$ *для волновых чисел* $k = 1,5$

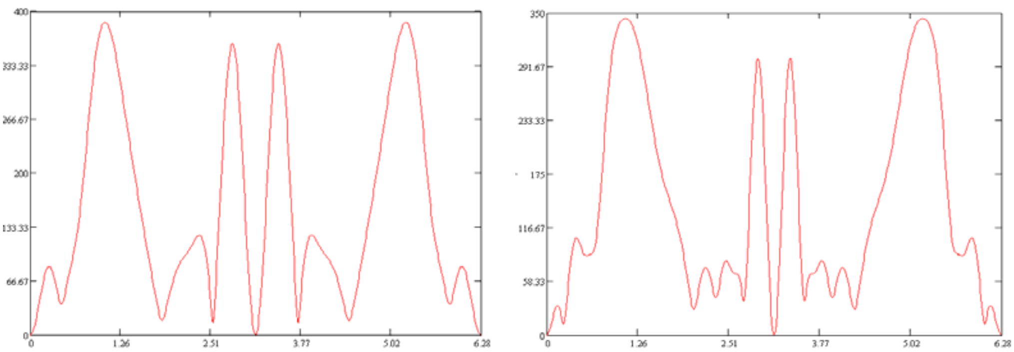

Рис. 2 Диаграммы рассеяния $F_z(\theta)$ *для волновых чисел* $k = 10,15$

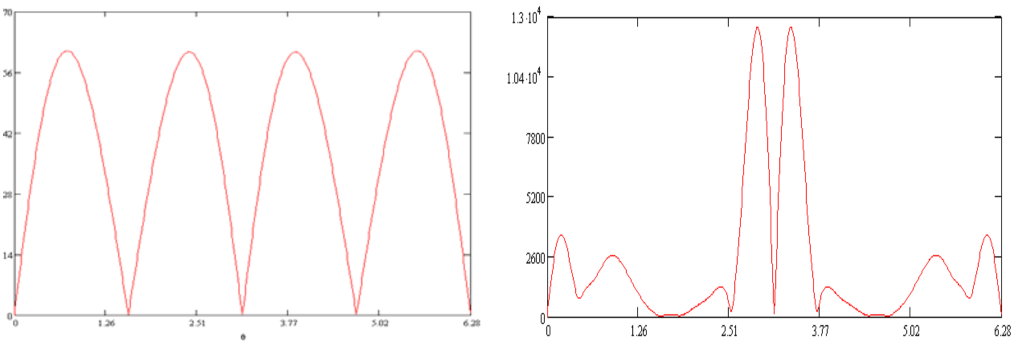

Рис. 3 Диаграммы рассеяния $F_\rho(\theta)$ *для волновых чисел* $k = 1,5$

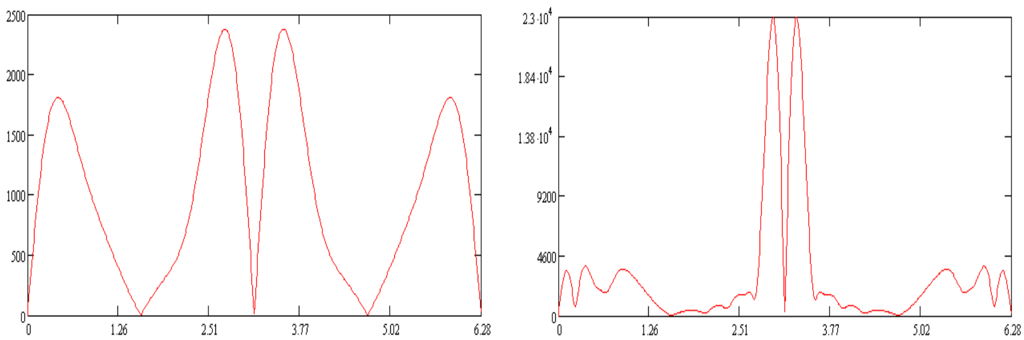

Рис. 4 Диаграммы рассеяния $F_\rho(\theta)$ *для волновых чисел* $k = 10,15$

7. Выводы

Задача дифракции Н-поляризованной электромагнитной волны на поверхности вращения впервые решена методом дискретных особенностей с предварительным сведением ее к гиперсингулярному интегральному уравнению. Были получены приближенные выражения для электромагнитных полей в ближней и дальней зоне, вычисленные по квадратурным формулам интерполяционного типа, что обеспечило незначительную погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах. М.: Ротапринт ИРЭ АН СССР, 1984, 71 с.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. - 167 с.
3. Захаров Е. В. Численный анализ дифракции радиоволн.- М.: Радио и связь, 1982 . - 184 с.
4. Жученко С. В. Численное моделирование осесимметричного решения задачи о дифракции электромагнитного поля в открытом гофрированном резонаторе //Электромагнитные явления.-2005.-Т.5,№1(14).-С.21-25
5. Щербина В. А., Жученко С. В. Спектральные и дифракционные характеристики открытых резонаторов //Труды XI международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Харьков-Херсон 2003.- С.276-282
6. Sherbina V.A., Zaginaylov G. I., Zhuchenko S. V. Numerical theory of excitation of axisymmetric open-ended finite length slow wave structure on the basis of the boundary singular integral equation method// VII th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory.- Kharkov, Ukraine 1998.-V.1,-pp.263-265.
7. Гандель Ю.В. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков-2001, 92 с.

8. Гандель Ю.В. , Еременко С. В, Т. С. Полянская Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Ч. 2 – Харьков: ХГУ, 1992. -145 с.
9. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов : Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков: ХГУ, 1991. – 65 с.
10. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989.- 256 с.
11. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995.-520 с.
12. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения . -М.:”Янус-К”, 2001, С.508.
13. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. – М.: «Высшая школа», 1991, 224 с.
14. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 1977, 735 с.

Надійшла 31.03.2009.