

Дифракция плоской электромагнитной волны на полубесконечной ленточной решетке

С. Н. Воробьев

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины

The problem of electromagnetic H-polarized wave diffraction by a semi-infinite grating of plane metal strips is solved numerically as a pioneering work. The created algorithm allows obtaining the solution of the nonlinear operator equation in the Fourier amplitude of reflected field by the method of successive iterations. The choice of initial approach is substantiated and the convergence of the solution is numerically verified. The field reflected by the semi-infinite grating is calculated and analyzed for various numerical values of the angle of incidence of excitation wave, the strip width and wavelength of incident field.

1. Введение

Известно, что для проводящей полуплоскости [1-3] наличие ребра приводит к возникновению цилиндрической волны в дифракционном поле. Для полубесконечной решетки (ПБР) из лент ситуация усложняется тем, что каждая из нескольких лент, близких к ее краю, находится в неодинаковых условиях по отношению к остальным лентам ПБР вследствие взаимодействия лент в структуре. Численное решение этой задачи, сформулированной с учетом взаимного влияния между лентами, позволяет исследовать не только влияние края на поле за решеткой, но и проанализировать, в частности, поведение рассеянного поля вблизи лент находящихся у края ПБР. Такой физический анализ представляет значительный интерес для антенной и микроволновой техники, особенно в высокочастотной области при резонансных размерах рассеивающих элементов.

В настоящее время существует большое число вычислительных методов для решения задач электродинамики. Во-первых, это вызвано высокой сложностью рассматриваемых задач, а во-вторых, обусловлено возможностями современных компьютеров. Одновременно с традиционными методами, использующими значительную аналитическую проработку решения задачи с последующим, на конечном этапе, численным счетом [4], усиленно развиваются прямые численные методы, например, известный метод сеток (в частности FD-TD/FD – Finite difference time/frequency domain) [4,5]. Прямые методы максимально используют возможности компьютера, в некоторых случаях применяется даже непосредственная дискретизация уравнений Максвелла для определенной краевой задачи.

Однако, для численного решения одной из классических задач электродинамики о дифракции электромагнитных волн на ПБР из металлических, периодически расположенных лент, указанные методы не дают положительного результата. Это связано с особенностями рассматриваемой структуры, поскольку она является периодической вдали от ее края, но в ней

нельзя выделить элементарную ячейку, так как решетка ограничена крайней лентой. Это приводит к определенным математическим и вычислительным трудностям вследствие сложного спектра рассеянного поля.

Здесь излагается метод численного решения задачи дифракции плоской волны на ПБР из тонких идеально проводящих лент, и обсуждаются результаты физического анализа отраженного от ПБР электромагнитного поля.

2. Постановка задачи

На рис.1 изображена плоская ленточная ПБР. Начало декартовой системы координат (x, y, z) совмещено с центром крайней ленты с номером $n=0$. Ширина лент равна $2d$, а l - период ПБР. Ленты бесконечно длинные вдоль оси x , направленной по нормали вверх к плоскости рисунка. Из верхней полуплоскости под углом α на ПБР падает плоская Н-поляризованная электромагнитная волна единичной амплитуды. Зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$ и для краткости опущена.

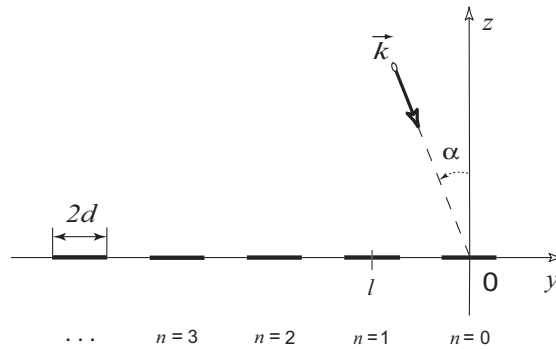


Рис.1. Геометрия задачи дифракции на плоской периодической ПБР.

В статье [6], в строгой постановке было получено нелинейное операторное уравнение (НОУ) относительно оператора отражения \mathbf{R} электромагнитной волны от плоской ПБР,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^- (\mathbf{I} - \mathbf{r}) + (\mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^- - \mathbf{I}) \mathbf{r} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}, \quad (1)$$

где \mathbf{r} оператор отражения от одной ленты, \mathbf{S}^\pm операторы сдвига, а \mathbf{I} единичный оператор. Нелинейность уравнения (1) является следствием учета взаимодействия между элементами ПБР.

Далее мы рассмотрим численное решение уравнения (1) и расчет полей над структурой. В случае падения на ПБР плоской Н-поляризованной волны, H_x и E_y компоненты отраженного электромагнитного поля имеют вид,

$$\begin{aligned} H_x(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \sin \alpha) \exp(i\eta(\xi u + \gamma(\xi) v)) d\xi, \\ E_y(u, v) &= - \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \sin \alpha) \gamma(\xi) \exp(i\eta(\xi u + \gamma(\xi) v)) d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $R(\xi, \sin \alpha)$ ядро интегрального оператора \mathbf{R} , функция $\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$, безразмерный параметр $\eta = kd$ и $k = 2\pi/\lambda$ волновое число, а $u = y/d$, $v = z/d$ нормированные на полуширину ленты декартовы координаты (рис.1).

3. Алгоритм численного решения задачи дифракции плоской Н-поляризованной волны на ПБР

Разработанный алгоритм численного решения представляет собой двухуровневый итерационный процесс.

Внутренний итерационный цикл – по числу j последовательных приближений операторного уравнения (1), который прерывается по достижению заданной точности вычислений. Следует сразу отметить, что все операторы, входящие в НОУ (кроме единичного) являются интегральными [6], поэтому их следует дискретизировать. В результате дискретизации уравнение (1) преобразуется в матричное уравнение

$$\tilde{\mathbf{R}}_j = \tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{S}}^+ \tilde{\mathbf{R}}_{j-1} \tilde{\mathbf{S}}^- (\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{r}}) + (\tilde{\mathbf{S}}^+ \tilde{\mathbf{R}}_{j-1} \tilde{\mathbf{S}}^- - \tilde{\mathbf{I}}) \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{S}}^+ \tilde{\mathbf{R}}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, j_{\max}, \quad (3)$$

где значок над оператором обозначает его матричное выражение. Параметры дискретизации это аргумент ξ и угол падения возбуждающей волны α [6].

Исключением являются операторы сдвига \mathbf{S}^\pm , зависящие только от аргумента ξ , которые преобразуются в диагональные матрицы. Дискретизация по ξ в интервале $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ неравномерная. В интервалах $-\xi_{\max} \leq \xi < -1$ и $1 < \xi \leq \xi_{\max}$ число точек дискретизации равно n_1 , а в области вещественных значений функции $\gamma(\xi)$, а именно $|\xi| \leq 1$, число точек дискретизации равно $2n_2 + 1$ (включая точку $\xi = 0$). Число точек дискретизации по α в интервале $(-90, 90)$ градусов равно числу точек дискретизации по ξ , т.е. $2(n_1 + n_2) + 1$, однако здесь дискретизация равномерная.

Далее для заданных параметров η , l и α спектральным или операторным методом (что приводит к одинаковым результатам [7]), решается задача дифракции на одной ленте и дискретизируются оператор отражения от одной ленты \mathbf{r} и операторы сдвига \mathbf{S}^\pm . Теперь необходимо выбрать начальное приближение для оператора отражения \mathbf{R} и дискретизировать его. Это приближение подставляется в правую часть матричного уравнения (3), вычисляется первое приближение для $\tilde{\mathbf{R}}_j$ и т.д. После очередной итерации с номером j вычисляется разность матриц $\tilde{\mathbf{R}}_j - \tilde{\mathbf{R}}_{j-1}$, а затем находится максимальный по модулю элемент разностной матрицы a_{pq} . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока величина $|a_{pq}|$ уменьшается и достигает локального минимума. Обычно значение j_{\max} лежит в интервале значений от 5 до 8.

Конечным результатом решения является нахождение H_x и E_y компонент отраженного поля в области $z > 0$ численным интегрированием дискретизированных выражений (2).

Внешний итерационный цикл - по числу итераций m параметра η . Возрастанию kd соответствует либо увеличение ширины лент при постоянной длине падающей волны, либо укорочение длины волны при постоянной ширине лент. При каждой итерации по η производится интерполяция матричных операторов по переменной ξ , так чтобы можно было выбрать иные значения n_1 и n_2 при дискретизации. При этом производится также выбор значения ξ_{\max} , определяющего пределы интегрирования в выражениях для операторов и отраженного электромагнитного поля. Результат каждой предыдущей итерации по η , а именно вычисленное значение \mathbf{R}_j , является начальным приближением для следующего шага.

4. Выбор начального приближения для оператора отражения

Были рассмотрены несколько возможных вариантов начального приближения в виде решения известных задач дифракции. А именно: идеально проводящая полуплоскость [2,3], бесконечная периодическая решетка из металлических лент [8], решетка из конечного числа металлических лент [9]. Если отраженное от этих структур поле записано в виде интеграла Фурье, то подынтегральное выражение и есть необходимое начальное приближение.

При выборе удачного начального приближения, принимались во внимание следующие факторы. Поверхностный ток, при выбранной поляризации падающего поля, течет поперек лент, а значит, если в качестве начального приближения выбрать полуплоскость, то она будет плохо аппроксимировать ПБР даже из очень широких лент (т.е. решетку с большим коэффициентом заполнения). Этот вывод был полностью подтвержден численными расчетами. Кроме того должна присутствовать геометрическая асимметрия, как это есть в ПБР. Этому условию не удовлетворяет бесконечная периодическая решетка, что также следовало из численного анализа решения уравнения (3).

В результате исследований была выбрана ограниченная по числу лент решетка [9], отраженное поле которой преобразовывалось следующим образом. Если пренебречь взаимодействием лент, то поле, создаваемое $N+1$ периодически расположенными лентами, имеет следующий вид,

$$H_{sx}^N(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \sum_{n=0}^N \exp(inkl\xi) \exp(i\eta(\xi u + \gamma(\xi)v)) d\xi, \quad (4)$$

где $a(\xi) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{\sqrt{s}}{\xi} J_s(\eta\xi)$, $J_s(\cdot)$ функция Бесселя, а c_s коэффициенты разложения. Если при этом предположить, что ленты узкие, то в сумме по индексу s остается только первый член суммы и выражение (4) принимает вид,

$$H_{sx}^N(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} c_1 \frac{J_1(\eta\xi)}{\xi} \sum_{n=0}^N \exp(inkl\xi) \exp(i\eta(\xi u + \gamma v)) d\xi. \quad (5)$$

Пусть в формуле (5) верхний предел суммы $N \rightarrow \infty$. Полубесконечная сумма по индексу n для отрицательных значений ξ не имеет замкнутого аналитического выражения. Поэтому преобразуем интеграл в (5) следующим образом,

$$H_{sx}^N(u, v) = \int_{-\infty}^0 (\dots) d\xi + \int_0^{\infty} (\dots) d\xi, \text{ где } (\dots) - \text{ подынтегральное выражение в (5).}$$

Во втором интеграле, воспользовавшись принципом предельного поглощения [10], можно выбрать путь интегрирования, смещенный с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ξ . Тогда удастся просуммировать ряд по n как бесконечную геометрическую прогрессию,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(inkl\xi) = \frac{i \exp(-ikl\xi/2)}{2 \sin(ikl\xi/2)}, \quad \xi \geq 0.$$

В первом интеграле верхний индекс суммы N оставим конечной величиной и воспользуемся известной формулой [11],

$$\sum_{n=0}^N \exp(iny + ix) = \exp(iNy/2 + ix) \frac{\sin((N+1)y/2)}{\sin(y/2)}.$$

В результате этих преобразований, поле, используемое нами в качестве начального приближения для ПБР, имеет вид,

$$H_{sx}(u, v) = c_1 \int_{-\infty}^0 \frac{J_1(\eta\xi)}{\xi} \exp(iNkl\xi/2) \frac{\sin((N+1)kl\xi/2)}{\sin(kl\xi/2)} \exp(i\eta(\xi u + \gamma v)) d\xi + \\ + c_1 \frac{i}{2} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta\xi)}{\xi} \frac{\exp(-ikl\xi/2)}{\sin(kl\xi/2)} \exp(i\eta(\xi u + \gamma v)) d\xi. \quad (6)$$

5. Результаты численного анализа

Для численного решения задачи выбиралось конкретное число точек дискретизации n_1, n_2 из интервала $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ (который является усеченным интервалом интегрирования в интегральных операторах НОУ и выражениях для отраженного ПБР поля).

Рассматривались два варианта. В первом общее число точек дискретизации $N_{\max} = 2(n_1 + n_2) + 1 = 179$ и, как показали численные расчеты, оптимальное значение $\xi_{\max} = 5.0$, а во втором $N_{\max} = 713$ и $\xi_{\max} = 14.0$. Все матрицы, входящие в уравнение (3), являются комплексными, и поскольку многократно используются матричные преобразования, то необходимо, чтобы все вычисления производились с двойной точностью.

Отметим, что подынтегральные выражения в (6) содержат простые полюса за счет наличия множителя $\sin(kl\xi/2)$ в знаменателе, обращающегося в ноль при условии $kl\xi = 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Указанные особенности можно исключить по известной методике [12], если требуется найти интегралы в (6) численно. Однако в данном случае используются именно подынтегральные выражения, которые приходится ограничить вблизи полюсов по величине (как реальную, так и мнимую их части), иначе какая-либо точка дискретизации ξ_n

может оказаться недопустимо близко к значению $\xi = \frac{2\pi n}{kl}$. Численные эксперименты показали, что величина $|\sin(kl\xi/2)|$ не должна быть менее 0.01.

Проанализируем результаты первого варианта. Нетрудно видеть, что подынтегральные выражения в (6) убывают с возрастанием аргумента ξ как $|\xi|^{-3/2}$, поэтому, если $|\xi_{\max}| = 5.0$, то подынтегральное выражение на границе интервала убывает более чем на порядок по сравнению с точкой $\xi = 0$.

На рис.2а приведена амплитуда, а на рис.2б - фаза отраженного поля H_x в зависимости от координаты u (расстояние вдоль решетки), полученные после итерационного цикла уравнения (3) для начального приближения \mathbf{R}_0 (используя формулу (6)) с учетом взаимного влияния между лентами для трех значений угла падения возбуждающей волны $\alpha = 0, 30$ и 45 градусов. При этом полагается, что $N = 20$, $l/d = 20.0$, $\eta = 0.107$, $n_1 = 42$, $n_2 = 47$, число итераций $j_{\max} = 6$.

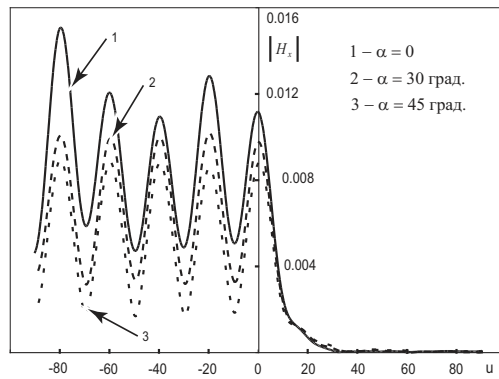


Рис.2а. Амплитуда отраженного поля

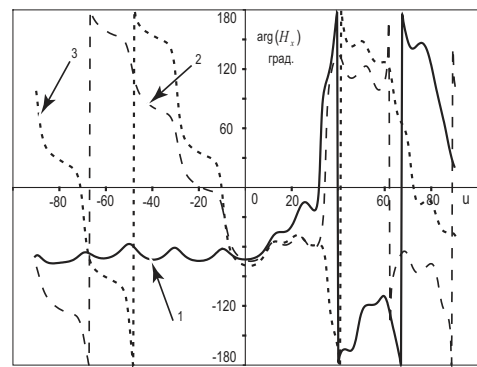


Рис.2б. Фаза отраженного поля.

Амплитуда и фаза поля построены на расстоянии, равном ширине ленты $v=2.0$ (что соответствует $z=0.034\lambda$), т.е. это ближнее поле, поскольку ленты узкие. Амплитуда поля справа от решетки ($u > 1.0$) уменьшается практически до нуля, а фазовое распределение существенно изменяется, что полностью соответствует физике процесса рассеяния волн полуограниченными структурами. При выбранных параметрах ПБР $\kappa = l/\lambda = 0.34$, и в отраженном решеткой поле распространяется только основная волна, а дифракционные гармоники являются поверхностными волнами. Естественно, за счет интерференции этих волн в ближней зоне, амплитуда поля, нормально отраженного к плоскости структуры, весьма различна в областях над лентами (соответствующих максимумам амплитуды).

Если удаляться от ПБР в направлении, перпендикулярном ее плоскости, то осцилляции отраженного поля в области над решеткой уменьшаются, что

иллюстрируют зависимости амплитуды H_x на рис.3 для $\nu = 5.87$ (что соответствует значению $z = 0.1\lambda$).

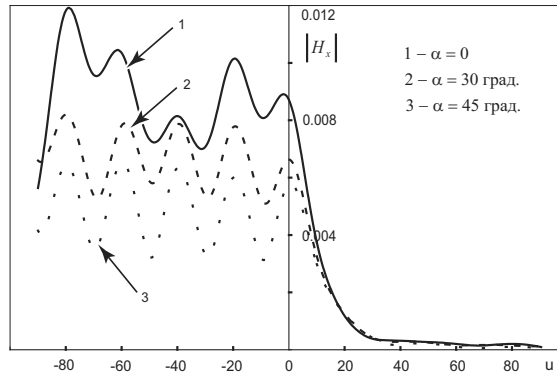


Рис.3. Амплитуда отраженного поля.

Определенный интерес представляет изучение амплитуды Фурье отраженного поля $R(\xi, \alpha)$, поскольку итерационный процесс решения уравнения (3) строится относительно этой комплексной функции. На рис.4а представлены зависимости действительной и мнимой частей $R(\xi, \alpha)$ для нормального падения волны, а на рис.4б для $\alpha = 30$ градусов. Обе кривые на рис.4 имеют сильно осциллирующий характер, особенно в области $-1 < \xi < 0$. Резкие скачки зависимостей $R(\xi, \alpha)$ соответствуют сглаженным полюсам, о которых упоминалось выше.

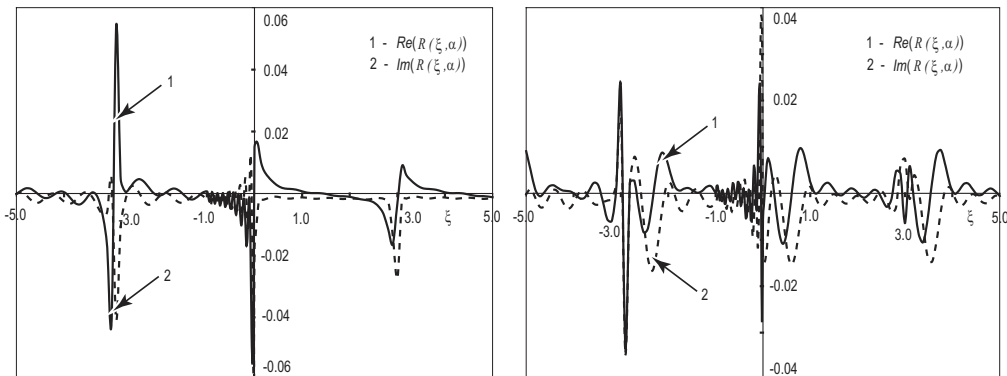


Рис.4а. Амплитуда Фурье отраженного поля. Рис.4б.

Для иллюстрации поведения Фурье-амплитуды $R(\xi, \alpha)$ на большем интервале изменения аргумента ξ , на рис.5 приведены ее зависимости для $\alpha = 0$ и числа точек дискретизации равно 713.

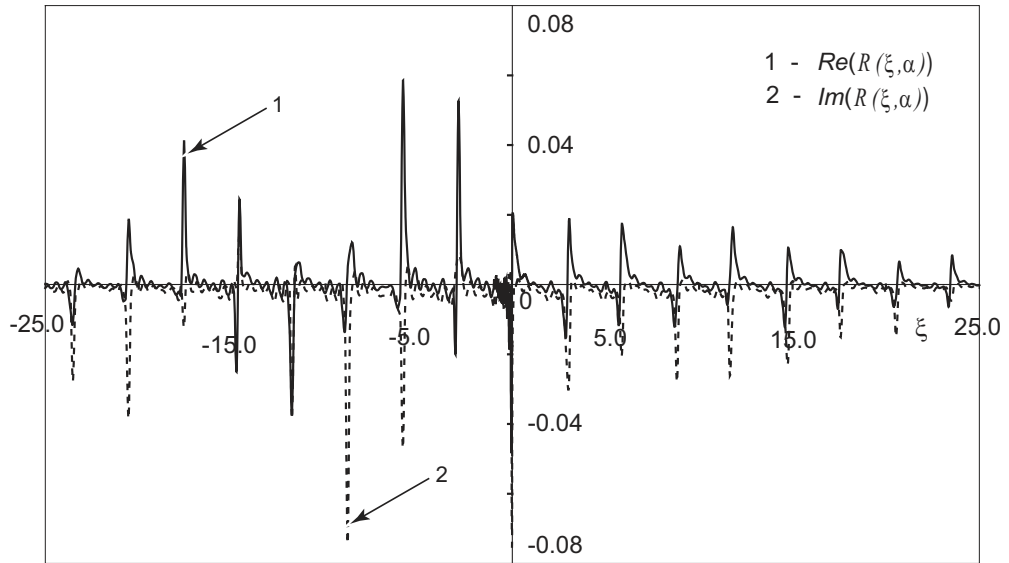


Рис.5. Амплитуда Фурье отраженного поля.

Теперь, считая начальным приближением амплитуду Фурье, изображенную на рис.4, будем увеличивать ширину лент, сохраняя при этом длину волны и период ПБР постоянными. При неизменной длине волны удобно строить отраженное поле на расстоянии z от решетки, равном 0.1λ . Как показали расчеты, оптимальным является увеличение размера ленты примерно на 20 процентов, т.е. на шаге итерации с номером m параметр $\eta_m \approx 1.2\eta_{m-1}$.

На рис.6 и рис.7 приведены зависимости амплитуды H_x от расстояния вдоль решетки для итераций $m=3$ (величина $\eta=0.157$) и $m=5$ (величина $\eta=0.227$), соответственно. Отметим, что количество осцилляций поля над решеткой увеличивается, поскольку усиливается взаимодействие лент.

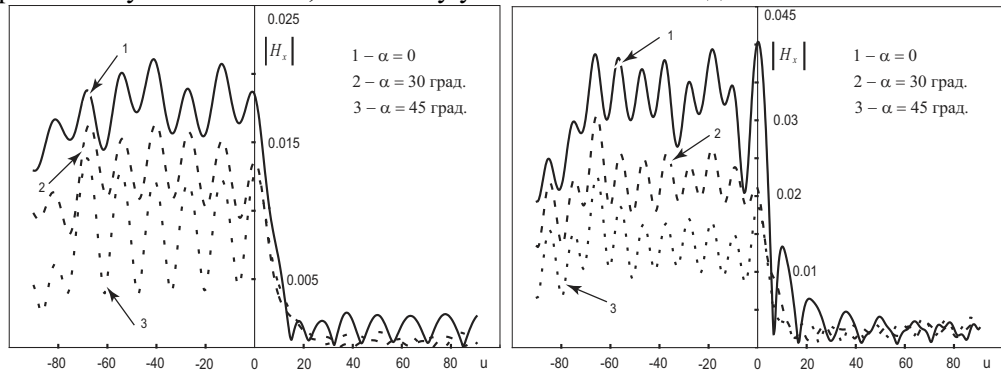


Рис.6.

Амплитуда отраженного поля.

Рис.7.

Другими словами, увеличивается влияние нераспространяющихся гармоник ПБР на формирование ближнего поля. Очевидно, что возрастает и амплитуда отраженного поля, так как увеличивается коэффициент заполнения структуры.

Возможен также и другой случай увеличения параметра η , когда ширина лент остается неизменной, а длина волны λ уменьшается. В этом случае целесообразно рассчитывать отраженное поле на расстоянии z равном ширине ленты. Начальное приближение не изменяется (амплитуда поля приведена на рис.2а). На рис.8 и рис.9 изображены зависимости амплитуды отраженного поля от координаты u для итераций $m = 3$ (величина $\eta = 0.151$, $\kappa = 0.48$) и $m = 5$ (величина $\eta = 0.281$, $\kappa = 0.894$), соответственно. По сравнению с аналогичной бесконечной периодической решеткой у ПБР (см. рис.8) еще не существует

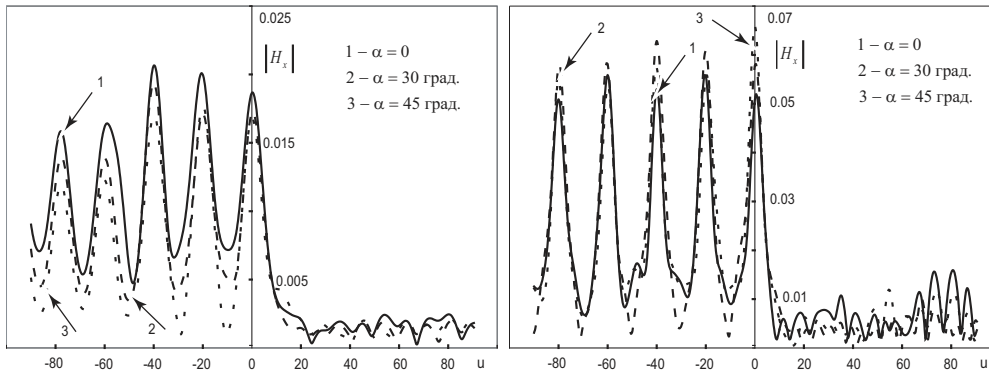


Рис.8. Амплитуда отраженного поля. Рис.9.

распространяющихся высших пространственных гармоник, тогда как (см. рис.9) минус первая пространственная гармоника распространяется при углах падения $7 \leq \alpha < 90$ градусов, а плюс первая - при углах $-90 < \alpha \leq -7$ градусов. По-видимому, осцилляции в минимумах поля на рис.9 объясняются присутствием в спектре не только основной волны, но и высших гармоник. Значительная амплитуда поля за краем ПБР вызвана как наличием гармоник, распространяющихся под углами, близкими к скользящим, так и накапливающимися погрешностями вычислений. В случае уменьшения λ , удалось получить решение для итерации $m = 6$ (величина $\eta = 0.289$, $\kappa = 1.1$), далее продвинуться не удается.

По поводу второго варианта дискретизации с максимальным в данной задаче количеством точек $N_{\max} = 713$ отметим следующее. Было получено начальное приближение, качественно совпадающее с приближением, поле которого приведено на рис.2-3. Затем были рассчитаны зависимости отраженного поля при увеличении ширины лент ПБР. Эти зависимости также вполне соответствуют варианту решения при $N_{\max} = 179$. Однако, для большого количества точек дискретизации становится весьма затруднительно выбрать оптимальные значения варьируемых параметров, т.е. n_1, n_2, ξ_{\max} , поскольку существенно (почти на порядок) возрастает время вычислений и диапазон изменения указанных параметров. Результаты второго варианта решения служат подтверждением того факта, что для значения $N_{\max} = 179$ получено правильное решение уравнения (3), а значит НОУ и задачи дифракции на ПРБ в целом.

6. Заключение

В данной работе впервые численно решена задача дифракции Н-поляризованной электромагнитной волны на полубесконечной решетке из тонких плоских металлических лент. Созданный алгоритм позволил методом итераций решить нелинейное операторное уравнение относительно амплитуды Фурье отраженного поля. Обоснован выбор начального приближения и численно подтверждена сходимость решения. Рассчитано и проанализировано отраженное от полугораниченной решетки поле при различных значениях угла падения возбуждающей волны, ширины лент и длины волны падающего поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sommerfeld A. // Proceedings of London Mathematical society, 1897. – Vol. 28. – P. 395- 407.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. – М.: ИЛ, 1962. – 280 с.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 328 с.
4. Peterson A.F., Ray S.L., Mittra R. Computational methods for electromagnetics, IEEE Press series on Electromagnetic wave theory. – Wiley-IEEE Press, 1997. – 592 p.
5. Sevgi L. Complex electromagnetic problems and numerical simulation approaches. – Wiley-IEEE Press, 2003. – 408 p.
6. Воробьев С.Н., Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Операторный метод в задаче дифракции электромагнитных волн на полубесконечных ленточных решетках. // Радиофизика и радиоастрономия, 2005. – Т.10, № 3. – С. 273-283.
7. Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Дифракция электромагнитных волн на структуре из конечного числа неэквидистантно расположенных лент различной ширины. Сравнение спектрального и операторного методов. // Радиофизика и радиоастрономия, 1996. – Т.1, № 1. – С. 110-118.
8. Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев: Наукова думка, 1984. – 240 с.
9. Воробьев С.Н. Рассеяние электромагнитных волн на неэквидистантной решетке из конечного числа наклонных лент. // Радиотехника и электроника, 1987. – Т.32, № 4. – С. 687-695.
10. Свешников А. Г. Принцип предельного поглощения для волновода // ДАН СССР, 1951. – Т.80, № 3. – С. 345-347.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд.4. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.
12. Воробьев С.Н., Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Дифракция волн на периодической структуре из наклонных металлических лент. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1986. – Т.26, № 6. – С. 894-905.

Надійшла 30.03.2009.