

УДК 532.536

Решение задачи о двухмерной адвекции пассивной примеси морскими течениями прогностическим методом

А. А. Гуржий, Д. И. Черний

*Институт гидромеханики НАНУ, Украина**Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина*

Рассматривается задача об адвекции пассивной примеси морскими течениями в областях со сложной геометрией в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Задача решена численным методом, адаптированным к задачам двухмерной адвекции, в основу которого положен метод дискретных особенностей. Смещение системы вихрей на фиксированное расстояние от береговой линии позволяет существенно улучшить выполнение граничного условия. Численная модель позволяет учесть процесс формирования вихревых структур, отрывающихся с выступов береговой линии. Адвекция пассивной примеси анализируется на примере численного решения задачи двухмерного течения жидкости в проливе, содержащем остров. Показано, что при наличии острова и острых выступов береговой линии адвекция существенно возрастает.

Ключевые слова: *двумерная адвекция, пассивная примесь, береговая линия, граничное условие, метод дискретных особенностей, численное решение, пролив, остров.*

Розглядається задача про адвекцію пасивної домішки морськими течіями в областях зі складною геометрією в наближенні ідеальної нестисливої рідини. Задачу розв'язано чисельним методом, адаптованим до задач двовимірної адвекції, основу якого складає метод дискретних особливостей. Зсув системи вихорів на фіксовану відстань від берегової лінії дозволяє істотно поліпшити виконання граничної умови. Чисельна модель бере до уваги процес формування вихрових структур, що відриваються з виступів берегової лінії. Адвекція пасивної домішки аналізується на прикладі чисельного розв'язка задачі двовимірної течії рідини в протоці, що містить острів. Показано, що адвекція істотно збільшується при наявності острова і гострих виступів берегової лінії.

Ключові слова: *двовимірна адвекція, пасивний домішок, ідеальна рідина, берегова лінія, гранична умова, метод дискретних особливостей, чисельний розв'язок, протока, острів.*

The problem of an advection of passive impurity by sea flows in regions with complex geometry in approaching of an ideal incompressible fluid is considered. The problem is solved by numerical method an adapted to the two-dimensional problems based on the discrete singularity method. Placing of the system of point vortices on the fixed distance from the coastline allows substantially improve the satisfaction of the boundary condition. The numeral model allows to take into account the process of forming of vortex structures flow around ledges of coastline. The advection of passive impurity is analysed on the example of numerical solution of the problem of the two-dimensional fluid flow in a channel, which contains an island. It is shown that the intensity of the advection process substantially increases for regions, which have islands and sharp edges of the coastline.

Keywords: *two-dimensional advection, passive tracer, shoreline, boundary condition, discrete singularities method, numerical solution, strait, island.*

1. Введение

Среди широкого спектра проблем классической гидромеханики в настоящее время большое значение такие задачи, которые уже сегодня имеют реальное практическое применение. С этих позиций задача о прогнозировании переноса загрязнений принадлежит к числу наиболее интересных задач с теоретической и

практической точек зрения. В большинстве случаев они опираются на ставшие уже классическими числительные методы решения и требуют значительных вычислительных ресурсов [1-4]. Многие из этих методов принимают во внимание различные физические процессы, происходящие на морской поверхности. Это, в свою очередь, увеличивает продолжительность вычислений.

Среди основных механизмов перемешивания жидкостей можно выделить два наиболее важных: диффузионное перемешивание, определяемое хаотическим движением молекул, и конвективное перемешивание, вызванное неоднородным движением жидкости. Анализ масштабов перемешивания жидкостей морскими течениями позволяет сделать вывод о том, что на начальных этапах доминирующим механизмом процесса перемешивания является конвективный механизм, который определяется глобальным движением жидкости. В современной литературе [5-7] это явление получило название *адвекция жидкости* и находит широкое применение при анализе закономерностей процесса перемешивания жидкостей различного масштаба [8-10].

Если физические свойства загрязнения и окружающей жидкости отличаются незначительно, то анализ процесса адвекции сводится к отслеживанию траекторий движения *лагранжевых частиц* в *эйлеровом поле* скорости. В этом случае уравнения движения отдельной жидкой частицы $\mathbf{r}(t)$ являются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (задача Коши)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$. Здесь $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ – поле скорости течения.

Анализ процесса адвекции существенно упрощается, если в начальный момент выделить границу области загрязнения системой пассивных точек (маркеров) и следить за их эволюцией во времени. Упорядоченное соединение последовательности маркеров для текущего момента времени позволяет сформировать новое положение границы выделенной области течения. В настоящее время существует несколько численных методов [11-12], которые адаптированы к различным видам деформации непрерывных контуров в двухмерных гидродинамических течениях. При анализе процессов адвекции они требуют решения гидродинамической задачи для определения распределения поля скорости течения $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ в произвольный момент времени.

В последнее время в вычислительной гидромеханике нашел широкое распространение метод дискретных особенностей [13-16]. Основная идея метода сводится к формированию на границах рассматриваемого течения системы точечных вихрей, суперпозиция которых позволяет аппроксимировать реальное течение циркуляционным течением [13,16-18]. В приближении идеальной жидкости интенсивность вихрей подбирается такой, чтобы в некотором наборе контрольных точек (*точки коллокации*) выполнялось граничное условие непротекания жидкости через береговую линию. В результате формируется система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить интенсивности вихрей.

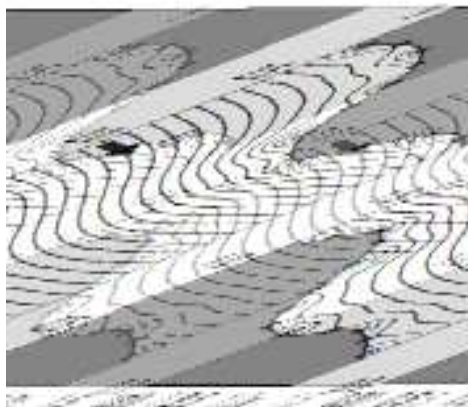


Рис.1. Распределение функции тока в проливе, полученное после решения задачи методом дискретных особенностей

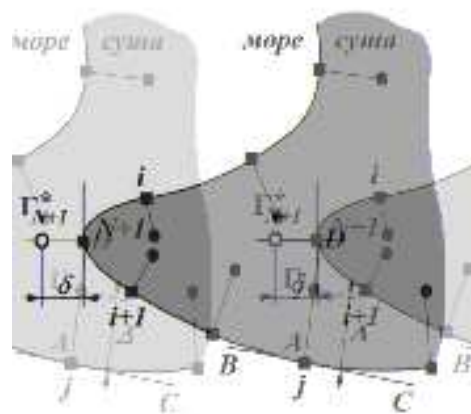


Рис.2. Схема расположения точечных вихрей и точек коллокации вдоль береговой линии

На рис.1 показан пример распределения функции тока в проливе, полученного после решения задачи методом дискретных особенностей. Положение точечных вихрей отмечено на рисунке кружочками, а система точек коллокации, расположенных на береговой линии между вихрями, отмечена квадратиками. Видно, что граничное условие в областях, прилегающих к точкам коллокации, в первом приближении выполняется. Напротив, в областях, прилегающих к точечным вихрям, выполнение граничных условий нарушается.

Известно [5,19], что наиболее интенсивные режимы адвекции происходят в областях, прилегающих к границам. Для достижения гладкости решения в областях, прилегающих к береговой линии, необходимо потребовать выполнение граничного условия на всей границе. Вероятно, именно это требование ограничивает применение метода дискретных особенностей при моделировании процессов переноса скалярных полей прибрежными течениями.

Целью настоящих исследований является модификация и адаптирование метода дискретных особенностей применительно к задачам адвекции пассивной жидкости в поле скорости морских течений. Для адекватного численного моделирования процесса адвекции пассивной примеси необходимо обеспечить гладкость поля скорости в рассматриваемом течении и выполнение граничного условия на всей береговой линии.

2. Численный метод

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в проливе (рис.1), на входе которого задано распределение скорости течения $U_0(s)$, где s - поперечная координата. Необходимо определить распределение поля скорости в рассматриваемом течении.

Функция тока $\Psi(x, y)$ течения жидкости, которая наведена системой N точечных вихрей интенсивности Γ_i , ($i=1, \dots, N$), определяется выражением [7,20]

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2], \quad (2)$$

где (x_i, y_i) - координаты i -го точечного вихря.

Для удовлетворения граничного условия непротекания жидкости

$$\Psi(x, y)|_s = const \quad (3)$$

введем систему N точек коллокации и потребуем, чтобы в этих точках значения функции тока, наведенные системой N точечных вихрей, были одинаковы на каждом из берегов пролива. Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей Γ_i точечных вихрей

$$\mathbf{A}_{ij} \Gamma_i = \Psi_j \quad i, j = 1, \dots, N \quad (4)$$

где $\mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]$. Здесь Ψ_j - значение функции тока в j -й точке коллокации.

Для обеспечения гладкости распределения поля скорости у границы течения в численном методе предлагается сместить положение точечных вихрей на расстояние Δ вглубь береговой линии. На рис.2 показан пример расположения системы точек коллокации (квадратики) и системы точечных вихрей (кружочки) на фрагменте береговой линии. Каждый вихрь расположен на прямой AD - перпендикуляр к касательной BC с границей течения, на расстоянии Δ от точки коллокации A .

Присвоение Δ большого значения по сравнению с расстояниями между точками коллокации приводит к тому, что система алгебраических уравнений (3) становится вырожденной и численное ее решение требует применения специальных методов решения. Существует оптимальное значение Δ (рис.3), определяемое из условия минимума числа обусловленности алгебраической системы уравнений (4), при котором численное решение достигается с наибольшей точностью.

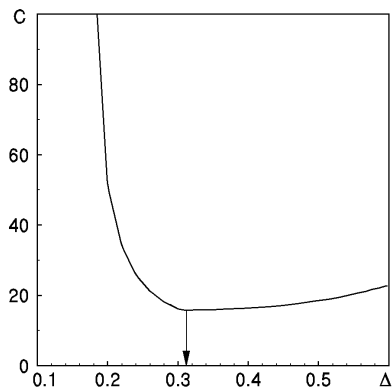


Рис.3. Зависимость числа обусловленности от смещения системы точечных вихрей от береговой линии

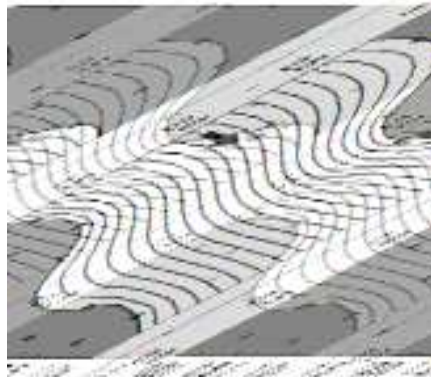


Рис.4. Распределение функции тока в проливе, полученное после решения задачи адаптированным методом дискретных особенностей

Береговая линия может содержать острые выступы, при обтекании которых морские течения могут формировать срывающиеся крупномасштабные вихревые структуры. В этом случае на каждом выступе размещается дополнительная точка коллокации (например, точка $N+1$ на рис.2) и вихрь интенсивности Γ_{N+1} , удаленный от выступа на расстояние δ .

Перемещение подвижного вихря приводит к изменению интенсивности вихря. Как только расстояние между подвижным вихрем и соответствующей ему точкой коллокации превысит некоторое значение δ_{cr} , в рассматриваемую систему вносится $(N+2)$ -й вихрь в начальную точку, которая использовалась для $(N+1)$ -го вихря. При этом значение интенсивности удалившегося вихря фиксируется. Вклад подвижных вихрей в линейной алгебраической системе (4) необходимо учитывать со знаком минус в правой части уравнений [15].

Для того, чтобы подвижные вихри не вносили существенных возмущений в поле скорости в областях, прилегающим к вихрям, вместо точечных вихрей удобно использовать вихри Ренкена [20].

3. Адвекция пассивной примеси в морском проливе

Рассмотрим процесс адвекции пассивной примеси в проливе, береговая линия которого показана в некотором масштабе на рис.5,а. В проливе имеется остров, его контуры в большем масштабе показаны на рис.5,б. На рис.5,а видно, что береговая линия имеет четыре выступа: по одному - на северном и южном побережье пролива, и два - на острове. На этих выступах помещаем дополнительные 4 точки коллокации и 4 вихря Ренкена интенсивности Γ_m . Обезразмерим все параметры задачи на некоторый характерный размер L_0 , связанный с масштабом карты, и на характерный интервал времени T_0 , в течение которого развивается течение. В этом случае все скорости будут пронормированы на величину L_0/T_0 , а интенсивности вихрей отнесены к величине L_0^2/T_0 .

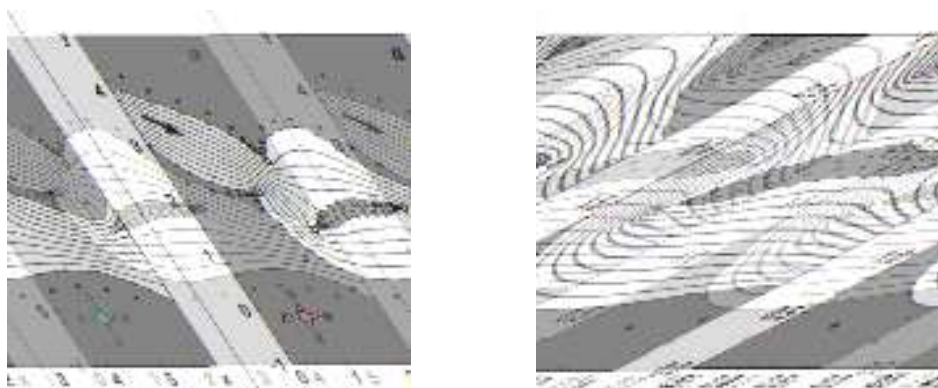


Рис.5. Распределение функции тока в проливе со сложной береговой линией:
а) общий вид пролива, б) область, прилегающая к острову

Распределение функции тока в проливе показано на рис.5,а, на котором нанесены линии равного уровня с эквидистантным шагом $\Delta\Psi = 0.1$ (на рис.5,б линии уровня показаны с $\Delta\Psi = 0.05$). Видно, что предельные линии тока повторяют контур береговой линии рассматриваемого пролива, следовательно, граничное условие (3) выполняется вдоль всей береговой линии.

Пусть в некоторый момент времени на входе пролива появилось загрязнение, рис.6,а. Для отслеживания динамики процесса адвекции пассивного контура, охватывающего область загрязнения, введем систему $N_m = 180$ маркеров. Исследования показывают, что траектории жидких частиц проявляют сильную зависимость от своего начального положения, расстояние между двумя соседними маркерами сильно увеличивается. Поэтому для формирования непрерывной линии, описывающей границы области загрязнения, в вычислениях использовался метод кусочной сплайн-интерполяции [12], который позволяет добавлять необходимое количество маркеров.

Результаты моделирования процесса адвекции пассивной примеси в проливе представлены на рис.6,б-е. На начальном этапе пятно примеси достаточно быстро смещается к сечению с выступами, с которых сходит последовательность крупномасштабных вихревых структур. Эти вихри закручиваются в соответствии со знаком циркуляции, частично уменьшая эффективное сечение канала для пассивной примеси рис.6,б. Расчеты показывают, что на начальном этапе подвижные вихревые структуры, образованные на выступах в рассматриваемом проливе, оказывают незначительное влияние на распространение загрязнения в канале.

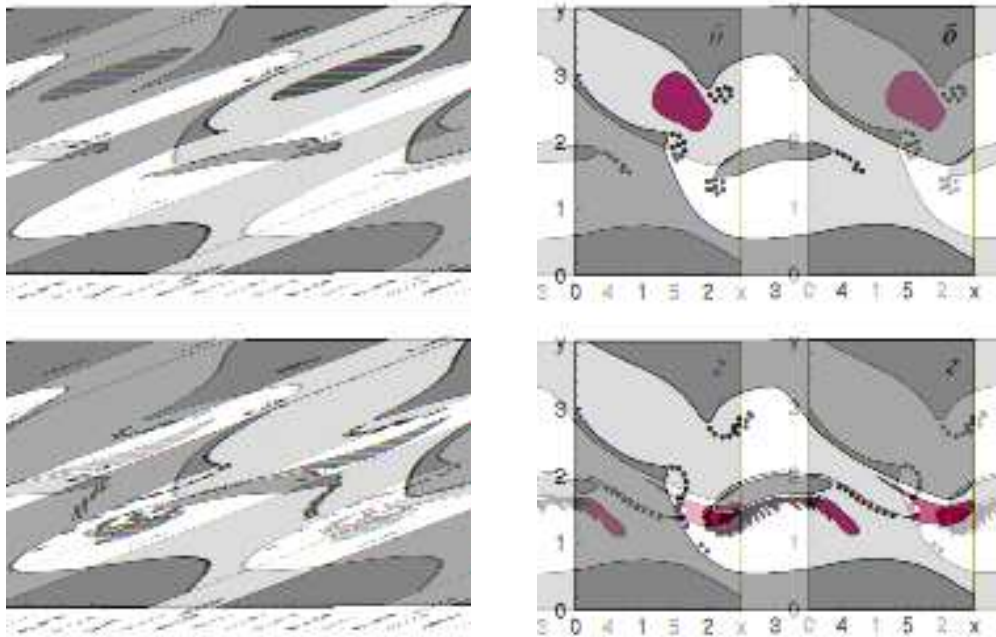


Рис.6. Распространение пятна пассивного загрязнения, изначально расположенного на входе пролива, с течением времени: а) $t=0.0$, б) $t=0.4$, в) $t=1.5$, г) $t=3.0$.

Исследования показывают, что пассивная примесь, попавшая в южную часть острова, попадает под влияние крупномасштабных вихревых структур и подвергается интенсивному перемешиванию с чистой жидкостью. Положение подвижных вихрей и загрязнения в момент времени $t=1.5$ показаны на рис.6,в. С течением времени примесь смещается в тыльную область острова, постепенно отрывается от острова и сносится течением к устью пролива.

Финальная стадия адвекции в рассматриваемом проливе показана на рис.6,е. Видно, что загрязнение в проливе разделяется на две части. Северная часть сносится течением и практически не перемешивается с окружающей жидкостью. С другой стороны, южная часть загрязнения подвергается интенсивному перемешиванию в восточной части острова. В эту область течения сносится система крупномасштабных вихревых структур, в поле скорости которых наступает режим интенсивной адвекции.

4. Выводы

Рассмотрена задача о двухмерной адвекции пассивной примеси морскими течениями с произвольными границами. Численное решение задачи основано на методе дискретных особенностей, адаптированном к двухмерным задачам адвекции. Главной особенностью метода является смещение системы вихрей вглубь береговой линии. При этом исчезают сингулярности в распределении поля скорости в непосредственной близости к границам течения.

Предлагаемый вычислительный метод позволяет учесть процессы отрыва крупномасштабных вихревых структур при обтекании выступов береговой линии морскими течениями. Для этого вводится система дополнительных точек коллокации и система подвижных вихрей Ренкена, которые располагаются у выступов береговой линии [13, 16, 17, 21].

В качестве демонстрационного примера рассмотрено решение задачи об адвекции пассивной примеси морским течением в проливе, береговая линия которого представлена в определенном масштабе на рис.5. Исследования показывают, что течение в рассматриваемом проливе разделяет выделенную область пассивной примеси примерно на две равные части, одна из которых сносится течением в северной части острова, а другая - в южной части. Северная часть слабо перемешивается течением в проливе, не смотря на то, что эта часть примеси проходит рядом с системой подвижных вихрей, сформированных на выступах береговой линии. С другой стороны, южная часть примеси попадает в зону интенсивного перемешивания в тыльной зоне острова, в которую попадают подвижные вихри, сформированные на южном выступе острова.

Численное решение задачи не требует больших вычислительных ресурсов и позволяет в первом приближении достаточно быстро получить предварительный прогноз распространения области загрязнения, попавшей на морскую поверхность. Предварительные результаты адвекции, полученные указанным выше методом, могут оказать существенную помощь при формировании решений по ликвидации последствий экологических аварий в непосредственной близости к береговым линиям на море и в океане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lucas D.H. Developments in air pollution measurement // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1969. – V.265, N.1161. – p.143-151.
2. Peirson D.H. Interhemispheric transfer of radioactive pollution from nuclear explosions // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1969. – V.265, N.1161. – p.295-300.
3. Heaps N.S. A two-dimensional numerical sea model // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1969. – V.265, N.1160. – p.93-137.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 253с.
5. Ottino J.M. *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 683p.
6. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // *Trans. Roy. Soc. London.* – 1990. – V.333. – p.273-288.
7. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. Киев: Наукова думка, 1993. – 279с.
8. Jones S.W. The enhancement of mixing by chaotic advection. // *Phys. Fluids.* – 1991. – V.A3, N.5. - p.1081-1086.
9. Perugini D., Poli G., Mazzuoli R. Chaotic advection, fractals and diffusion during mixing of magmas: evidence from lava flows // *J. Volcan. Geotherm. Res.* – 2003. – V.124. – p.255-279.
10. Rom-Kedar V., Zaslavsky G.M. Chaotic kinetics and transport (Overview) // *Chaos.* – 2000. V.10, N.1. – p.1-2.
11. Dritchel D.G. Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows // *Comp. Phys. Per.* 1989. V.10. – p.77-146.
12. Гуржий О.А., Мелешко В.В., Ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кускової сплайн-інтерполяції в задачі про адекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // *Доп. НАН України.* – 1996. - N.8. – с.54-62.
13. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.:Наука, 1978. – 351с.
14. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. *Vortex methods: theory and practice.* Cambridge: Cambridge Univer. Press. – 2000. – 314p.
15. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988. – 232с.
16. Довгий С.О., Лифанов И.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. Київ: Наукова думка. 2004, 510с.
17. Горелов Д.Н. К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // *Прикл. механика и техн. Физика.* - 1990. - N.1., с.167-170.
18. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами // *Обчислювальна та прикладна математика.* – 1997. - Вип. 2(82). – с.112-123.
19. Гуржий А.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Режимы хаотического перемешивания жидкости в круге парой точечных вихрей / В кн. "Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей" (под

- ред.Борисова А.В. и др.) // Москва, Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. – 2003. с.441-467.
20. Вилля Г. Теория вихрей. - М.,Л.: Гостехиздат, 1936. – 266с.
21. Белоцерковский С.М. Метод численного решения пространственной задачи о диффузии вихрей / Труды Военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е.Жуковского. // М.: Изд. Академии, Вып.1313. – 1986. – с.40-51.

Надійшла у першій редакції 24.03.2009, в останній - 31.10.2009.

© Гуржий А. А., Черний Д. И., 2009