УДК 532.5

Нестационарное глиссирование по поверхности тяжелой жидкости

М. В. Макасеев
НТУУ «Киевский политехнический институт», Украина

Получены интегральные уравнения для нестационарного глиссирования по поверхности тяжелой жидкости с произвольной нестационарностью. Задача поставлена как граничная с начальными условиями. Проанализированы основные виды начальных условий и получены необходимые для них формулы. В полученных уравнениях условие излучение выполняется автоматически. Справедливость этого показана на примере глиссирования с постоянной нагрузкой предельным переходом при больших моментах времени.

Ключевые слова: *нестационарное глиссирование, тяжелая жидкость, постановка задачи, начальные условия, интегральные уравнения*

Отримано інтегральні рівняння для нестаціонарного глісування по поверхні важкої рідини з довільною нестаціонарністю. Задача поставлена як гранична з початковими умовами. Проаналізовано основні види початкових умов і отримано необхідні для них формули. В отриманих рівняннях умова випромінювання виконується автоматично. Справедливість цього показана на прикладі глісування з постійним навантаженням граничним переходом при великих моментах часу.

Ключові слова: *нестаціонарне глісування, інтегральні рівняння, важка рідина, постановка задачі, початкові умови, інтегральні рівняння*

The integral equations of unsteady planing on the surface of heavy fluid with arbitrary nonstationarity are obtained. The problem was standing as boundary with initial conditions. The basic types of initial conditions are analyzed and necessary formulas are got for them. The radiation condition in the obtaining equations is performed automatically. The validity of this are indicated on the example of planing with constantly load by limiting process when the time is large.

Keywords: *unsteady planning, heavy liquid, formulation of the problem, initial conditions, integral equations*

1. Введение

Задачи о нестационарном глиссировании по водной поверхности рассматривались в литературе практически только для режимов установившихся колебанний (см. например, [1−3]). При этом потенциал течения и все остальные функции представлялись в виде гармонических зависимостей от времени. В настоящей работе задача о нестационарном глиссировании поставлена в общем виде с начальными условиями. Получены необходимые соотношения для ее решения – выражение для определения формы свободной поверхности через распределение давления и интегральное уравнений для определения функции давления. Проанализированы основные виды начальных условий, соответствующие реальным физическим постановкам задач. Получены выражения, необходимые для задания этих условий.

2. Постановка задачи

2.1 Граничная задача

Граничную двумерную задачу о глиссировании в предположениях линеаризованной теории волн можно записать в таком виде [1−3]:

$$\Delta\varphi(x,y,t)=0\,,\ y<0\,, \tag{2.1}$$

$$N\varphi(x,-0,t)=-p(x,t)-g\eta(x,t),\ -\infty<x<\infty\,,\ x\neq l(t), \tag{2.2}$$

$$p(x,t)=0,\quad x<0,\quad x>l(t), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-0,t)=N\eta(x,t),\ -\infty<x<\infty\,,\ x\neq l(t), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\,,\ y\to-\infty\,, \tag{2.5}$$

где φ − потенциал скорости, $\mathrm{N}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}-\mathrm{V}_0\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$, V_0 − постоянная скорость хода глиссера, $p(x,t)=\left[p_-(x,-0,t)-p_0\right]/\rho$ − относительное давление на границе жидкости, $p_-(x,y,t)$ − абсолютное давление в жидкости, p_0 − известное постоянное давление на свободной поверхности, $l(t)$ − смоченная длина глиссера, $\eta(x,t)$ − форма границы жидкости − при $x\le 0, x>l(t)$ свободной поверхности и при $0\le x\le l(t)$ − обтекаемой поверхности. При $0\le x\le l(t)$ будет использоваться также обозначение $\beta(x,t)=\eta(x,t)$. Предполагается, что $\beta(x,t)=h(t)+\alpha(t)x+f(x)$, где $h(t)=\beta(0,t)$ − осадка задней кромки, $\alpha(t)$ − угол хода (дифферента), $f(x)$ − функция, задающая малую кривизну тела ($f(0)=f(l_{\max})=0$, $l_{\max}$ − смоченная длина при $V_0=0$).

Неизвестными в задаче являются функции $p(x,t)$, $\eta(x,t)$, $l(t)$, $h(t)$, $\alpha(t)$. Отметим, что в предположениях линеаризованной теории поверхностных волн поставленная задача имеет физический смысл при всех V_0 [4]. Случай $V_0=0$ соответствует задаче о плавающем слабо погруженном водоизмещающем теле. При этом распределение давления на границе тела близко к гидростатическому, т.е. $p(x,t)$ мало отличается от $-g\beta(x,t)$. При $V_0>0$ режим движения определяется соотношением между этими функциями. Глиссированием принято называть режим движения по поверхности жидкости с достаточно большой скоростью, когда архимедова сила, равная $-g\beta(x,t)$, мала по сравнению с гидродинамической подъемной силой. При этом во многих исследованиях в условии (2.2) в правой части пренебрегают вторым слагаемым. В настоящей работе глиссированием условно называется режим движения при всех $V_0>0$.

2.2 Начальные условия

Начальными условиями являются:

$$\varphi(x,y,0)=\varphi_0(x,y),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,y,0)=\varphi_1(x,y), \tag{2.6}$$

$$\eta(x,0)=\eta_0(x),\ \frac{\partial\eta}{\partial t}(x,0)=\eta_1(x), \tag{2.7}$$

φ_0, φ_1, η_0, η_1 − известные функции.

Кроме того, задается Δ_0 − вес глиссера (водоизмещение при $V_0 = 0$) и абсцисса точки расположенияе центра масс b при $V_0 = 0$.

Можно указать три основных вида начальных условий, соответствующих реальным физическим задачам − невозмущенная поверхность, волновая поверхность, стационарное глиссирование.

2.3 Об условии излучения

Условие излучения в задачах теории волновых движений ставится тогда, когда решение заранее предполагается определенного вида − как правило, установившееся и полностью стационарное, или установившееся гармоническое. Начальных условий в таком случае нет. При такой постановке граничная задача имеет решения в виде свободных волн с произвольныи амплитудами и распространяющимися во всех направлениях. Для придания итоговому решению физического смысла в решении необходимо оставить только такие волны, которые распространяются в направлении от твердого тела как источника излучения.

В сформулированной выше задаче с заданными начальными условиями (2.6)−(2.7) условие излучения должно выполняться автоматически.

3. Метод решения

Для решения задачи используется метод Фурье построения фундаментальных решений [5]. Потенциал скорости доопределяется нулем в верхней полуплоскости − $\varphi(x, y, t) = 0$, $y > 0$, и вводится обобщенная функция $\varphi = (\varphi, \psi)$ над пространством основных функций ψ медленного роста. Скобочные обозначения для обобщенных функций в целях упрощения записи далее опускаются.

Из граничной задачи (2.1)−(2.5) интегрированием по частям получается следующее выражение оператора Лапласа обобщенной функции φ:

$$\Delta\varphi = -\varphi(x,-0,t)\delta'(y) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-0,t)\delta(y), \qquad (3.1)$$

где $\delta(y)$ и $\delta'(y)$ − дельта-функция и ее производная.

Преобразование Фурье по переменной x для основных функций определяется формулой $F_x[\psi(x,)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,)e^{i\lambda x}dx$. Обобщенное преобразование Фурье функции φ обозначается $\Phi(\lambda, y, t) = F_x[\varphi(x, y, t)]$. В образах Фурье решением уравнения (10), с учетом граничных условий задачи, есть функция

$$\Phi(\lambda, y, t) = \frac{\overline{N}}{|\lambda|} H(\lambda, t) e^{-|\lambda y|}, \qquad (3.2)$$

где $\overline{N} = \frac{\partial}{\partial t} + i\lambda V_0$, а $H(\lambda, t) = F_x[\eta(x, t)]$.

На основе (2.2)−(2.4) можно получить функциональное соотношение

$$\left(\frac{\overline{N}^2}{|\lambda|}+g\right)H(\lambda,t)=-P(\lambda,t), \tag{3.3}$$

где $\overline{N}^2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2i\lambda V_0\frac{\partial}{\partial t}-\lambda^2 V_0{}^2$, а $P(\lambda,t)=F_x[p(x,t)]$.

Соотношению (3.3) с учетом начальных условий (2.7) удовлетворяет функция:

$$H(\lambda,t)=|\lambda|\int_0^t P(\lambda,\tau)e^{i\lambda V_0(\tau-t)}D(\lambda,\tau-t)d\tau+G_0(\lambda,t)e^{-i\lambda V_0 t}, \tag{3.4}$$

где

$$\mathrm{D}(\lambda,\mathrm{t})=\frac{\sin\sqrt{\mathrm{g}|\lambda|}\mathrm{t}}{\sqrt{\mathrm{g}|\lambda|}},\ G_0(\lambda,t)=H_0(\lambda)\frac{\partial D}{\partial t}(\lambda,t)+H_1(\lambda)D(\lambda,t),$$

$$H_0(\lambda)=F_x[\eta_0(x)](\lambda),\ H_1(\lambda)=F_x[\eta_1(x)](\lambda).$$

Обратное преобразование Фурье (3.4) дает в пространстве оригиналов формулу для вычисления формы границы жидкости через распределение давления:

$$\eta(x,t)=\int_0^{l(t)}\int_0^t p(s,\tau)K_0(x-s-V_0(\tau-t),\tau-t)d\tau ds+\zeta_0(x+V_0 t),\ -\infty<x<\infty, \tag{3.5}$$

где [6]

$$K_0(x,t)=F_x{}^{-1}\left[\sqrt{\frac{|\lambda|}{g}}\sin\sqrt{g|\lambda|}t\right]=-\frac{t}{2\pi x^2}-$$

$$-\sqrt{\frac{g}{2\pi}}\frac{1}{|x|^{3/2}}\left[\operatorname{sgn}x\,S(\mu)f_{01}(\mu)-C(\mu)f_{02}(\mu)\right], \tag{3.6}$$

$S(x)=\int_0^x\sin\frac{\pi}{2}s^2ds$ и $C(x)=\int_0^x\cos\frac{\pi}{2}s^2ds$ − синус- и косинус-интегралы Френеля,

$$f_{01}(\mu)=\operatorname{sgn}x\sin\frac{\pi}{2}\mu^2+\frac{\mu^2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mu^2,\ f_{02}(\mu)=\cos\frac{\pi}{2}\mu^2-\frac{\mu^2}{\pi}\operatorname{sgn}x\sin\frac{\pi}{2}\mu^2,$$

$$\mu=\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}}t,\ \ \zeta_0(x,t)=F_x{}^{-1}[G_0(\lambda,t)].$$

Интеграл в (3.5), как видно из структуры ядра (3.6), состоит из двух слагаемых. В первом слагаемом особый интеграл должен пониматься в смысле Адамара.

Функция $G_0(\lambda,t)$ определяется начальными условиями − функциями $H_0(\lambda)$ и $H_1(\lambda)$. Выражения этих функций для основных случаев начальных условий будут даны в следующем разделе. Будет показано, что они выражаются через дельта-функции (свободные волны) и начальное распределение давления, если оно не нулевое, т.е. через функцию $P_0(\lambda)=F_x[p(x,0)](\lambda)$.

Соотношение (3.5) можно использовать как для вычисления формы свободной поверхности, так и для определения функции давления, выполняя его на интервале $(0,l(t))$, где частично известна функция $\eta(x,t)=\beta(x,t)$. В значительной части случаев для определения функции давления более эффективно использовать уравнение, соответствующее граничному условию (2.4):

$$\overline{N}H(\lambda,t)=V_y(\lambda,t), \tag{3.7}$$

где $V_y(\lambda,t)=F_x[v_y(x,t)]$, а $v_y(x,t)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-0,t)$ – вертикальная скорость жидкости на границе, определенная на $(0,l(t))$ как $N\beta(x,t)$. Подстановка (3.4) в (3.7) дает:

$$-|\lambda|\int_0^t P(\lambda,\tau)e^{i\lambda V_0(\tau-t)}\frac{\partial D}{\partial t}(\lambda,\tau-t)d\tau+\frac{\partial G_0}{\partial t}(\lambda,t)e^{-i\lambda V_0 t}=V_y(\lambda,t). \tag{3.8}$$

Обратное преобразование Фурье (3.8):

$$\int_0^{l(t)}\int_0^t p(s,\tau)K_1(x-s-V_0(\tau-t),\tau-t)d\tau ds+\zeta_1(x+V_0t,t)=v_y(x,t), \tag{3.9}$$

где [6]

$$K_1(x,t)=F_x^{-1}\left[|\lambda|\cos\sqrt{g|\lambda|}t\right]=-\frac{2}{\pi x^2}-$$

$$-\sqrt{\frac{g}{2\pi}}\frac{t}{|x|^{5/2}}\left[S(\mu)f_{11}(\mu)+\operatorname{sgn}x\,C(\mu)f_{12}(\mu)\right], \tag{3.10}$$

$$f_{11}(\mu)=\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2}\mu^2-\frac{\mu^2}{\pi}\operatorname{sgn}x\sin\frac{\pi}{2}\mu^2,$$

$$f_{12}(\mu)=\left(\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}\mu^2+\frac{\mu^2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mu^2\right)\operatorname{sgn}x,$$

$$\zeta_1(x,t)=F_x^{-1}\left[\frac{\partial G_0}{\partial t}(\lambda,t)\right](x,t).$$

Интегральное уравнение (3.9), как видно из структуры ядра (3.10), также содержит особый интеграл, который понимается в смысле Адамара.

Для определения переменных во времени смоченной длины $l(t)$ и угла дифферента $\alpha(t)$ интегральное уравнение (3.9), аналогично случаю стационарного движения [7], необходимо дополнить уравнениями динамики твердого тела.

4. Соотношения для начальных условий

Запишем необходимые соотношения для задания трех указанных выше основных видов начальных условий. Для случаев волновой поверхности и стационарного глиссирования необходимые соотношения выводятся из основной задачи как частные решения.

4.1. Невозмущенная поверхность

Предполагается, что перед началом движения жидкость покоится:

$$\eta_0(x)=0\,,\ \eta_1(x)=0\,,\ p_0(x)=0\,,$$

тогда, соответственно,

$$H_0(\lambda)=0\,,\ H_1(\lambda)=0\,,\ P_0(\lambda)=0\,. \tag{4.1}$$

4.2. Волновая поверхность

Предполагается, что в начальный момент времени на поверхности жидкости нет никакого возмущения, кроме регулярных установившихся волн. Волны могут быть, вообще говоря, как бегущими, так и стоячими. Выражения для функций (2.7) в таком случае можно найти, предполагая, что движение жидкости во все моменты времени гармоническое, т.е.

$$\eta(x,t)=\mathrm{Re}\,\eta^*(x)e^{ikt}\,, \tag{4.2}$$

где $\eta^*(x)$ − комплексная амплитудная функция, k − частота колебаний. Здесь необходимо учесть, что в данном случае k − частота колебаний в системе координат, движущейся со скоростью V_0 в положительном направлении оси x. Она является кажущейся с точки зрения движущегося наблюдателя − одни и те же волны при разных скоростях движения будут иметь разную кажущуюся частоту. Действительную частоту целесообразно задавать в абсолютной неподвижной системе координат. Необходимые соотношения при этом можно получить из исходной задачи, если положить в ней $V_0=0$ и $p(x,t)=0$ и после решения перейти снова в подвижную систему координат соответствующей заменой переменной.

Пусть k_0 и $\eta_0(x,t)$− частота колебаний и форма свободной поверхности в абсолютной неподвижной системе координат. Тогда

$$\eta_0(x,t)=\mathrm{Re}\,\eta_0{}^*(x)e^{ik_0t}\,. \tag{4.3}$$

Для определенности полагается $k_0\geq 0$. Соотношение (3.3) для преобразования Фурье $H_0{}^*(x)$ функции $\eta_0{}^*(x)$ при сделанных предположениях ($V_0=0$ и $p(x,t)=0$) будет иметь вид (здесь и далее знак Re и звездочка для упрощения не пишется, в окончательных результатах надо брать действительную часть):

$$\left(-\frac{k_0{}^2}{|\lambda|}+g\right)H_0(\lambda)=0\,.$$

Следовательно,

$$H_0(\lambda)=A_0\delta(\lambda-\omega_0)+B_0\delta(\lambda+\omega_0)\,, \tag{4.4}$$

где A_0, B_0 − комплексные константы, $\omega_0=k_0{}^2/g$. Обратное преобразование Фурье (4.4) дает:

$$\eta_0(x)=\overline{A}_0e^{-i\omega_0x}+\overline{B}_0e^{i\omega_0x}\,,$$

где $\overline{A}_0=A_0/2\pi$, $\overline{B}_0=B_0/2\pi$. Тогда

$$\eta(x,t)=\mathrm{Re}\left[\overline{A}_0e^{-i(\omega_0x-k_0t)}+\overline{B}_0e^{i(\omega_0x+k_0t)}\right].$$

Это суперпозиция двух волн, движущихся в разные стороны. Волна с амплитудой $\overline{A}_0$ движется в положительном направлении оси x (вправо) со скоростью $V_A = k_0 / \omega_0 = g / k_0$, волна с амплитудой $\overline{B}_0$ − влево со скоростью $V_B = -g / k_0$.

Переход к движущейся со скоростью V_0 системе координат осуществляется заменой переменных $x = \overline{x} + V_0 t$:

$$\eta_0\left(\overline{x} + V_0 t, t\right) = \mathrm{Re}\left\{\overline{A}_0 e^{-i\left[\omega_0 \overline{x} + (\omega_0 V_0 - k_0)t\right]} + \overline{B}_0 e^{i\left[\omega_0 \overline{x} + (\omega_0 V_0 + k_0)t\right]}\right\} = \eta\left(\overline{x}, t\right). \quad (4.5)$$

В движущейся системе координат относительная скорость волны с амплитудой $\overline{A}_0$ теперь $\overline{V}_A = -V_0 + g / k_0$, скорость волны с амплитудой $\overline{B}_0$ при этом $\overline{V}_B = -V_0 - g / k_0$. Если $V_0 < g / k_0$, то $\overline{V}_A > 0$, то есть волна с амплитудой $\overline{A}_0$ перемещается в сторону движения точки наблюдения, обгоняя ее. При $V_0 = g / k_0$ относительная скорость волны с амплитудой $\overline{A}_0$ равна нулю, то есть система отсчета движется со скоростью этой волны. Если $V_0 > g / k_0$, то $\overline{V}_A < 0$, то есть волна с амплитудой $\overline{A}_0$ движется навстречу глиссеру. Поскольку всегда $\overline{V}_B < 0$, то волна с амплитудой $\overline{B}_0$ всегда встречная.

Подбором констант $\overline{A}_0$ и $\overline{B}_0$ задаются различные виды исходных волн, в том числе стоячие.

Сравнение (4.5) и (4.3) показывает, что задание параметров волн в неподвижной системе координат в виде (4.3) дает в подвижной системе отличающееся от (4.3) выражение − имеет место композиция из двух волн с разными частотами $k_1 = k_0 - \omega_0 V_0$ и $k_2 = k_0 + \omega_0 V_0$. Частота k_2 положительная, k_1 может быть как положительной, так и отрицательной. Волна с частотой k_2 встречная, с частотой k_1 − попутная. При $k_1 < 0$ волна движется быстрее глиссера, при $k_1 = 0$ скорости волны и глиссера совпадают.

Очевидно, что параметры исходных волн в подвижной системе координат можно задать и в форме (4.3), и получить затем формулы для выражения параметров волн в неподвижной системе. При этом для определенности надо условиться о том, может ли быть отрицательной частота k. Следует отметить, что и в неподвижной системе координат знаком частоты можно идентифицировать направление распространения волны.

4.3. Стационарное глиссирование по невозмущенной поверхности

В этом случае предполагается, что начальный режим движения − установившийся, т.е. все величины не зависят от времени.

Функции $\eta_0(x)$ и $p_0(x)$ можно определить двумя способами. Первый − из исходной задачи при условии, что режим движения уже стационарный и нет зависимостей от времени, и второй − из исходной нестационарной задачи с нулевыми начальными условиями при больших значениях времени. Первый связан с необходимостью выполнения условий излучения, второй основан на использовании уравнения (3.3) и предельном переходе при $t \to \infty$. Покажем, что оба способа дают одинаковый результат.

В соответствии с первым способом, $\eta(x,t) = \eta_0(x)$, $p(x,t) = p_0(x)$. Соотношение (3.3) для преобразований Фурье этих функций примет вид:

$$\left(|\lambda| V_0^{\,2} - g\right) H_0(\lambda) = P_0(\lambda). \tag{4.6}$$

Этому соотношению удовлетворяет функция, являющаяся умноженным на $P_0(\lambda)$ решением в обобщенных функциях алгебраического уравнения с левой частью (4.6) и правой в виде единичной функции:

$$H_0(\lambda) = \frac{P_0(\lambda)}{V_0^{\,2}} \left(reg \frac{1}{|\lambda| - \nu} \right) +$$
$$+ \left[AP_0(\nu) + A_0 \right] \delta(\lambda - \nu) + \left[BP_0(-\nu) + B_0 \right] \delta(\lambda + \nu), \tag{4.7}$$

где reg означает регуляризацию обобщенной функции, A, B, A_0, B_0 − комплексные константы, задающие амплитуды свободных волн в пространстве оригиналов, $\nu = g / V_0^{\,2}$. Константы A и B определяются из условияе излучения − $A = \pi i$, $B = -\pi i$, A_0 и B_0 − амплитуды независимых волн, если они заданы.

Независимые волны могут задаваться, если (4.7) используется при исследовании глиссирования по волнам на основе предположения о квазистационарности движения (отметим, что скорость распространения волн при стационарном движении совпадает со скоростью движения глиссера). Поэтому далее полагается $A_0 = 0$, $B_0 = 0$.

В результате (4.7) имеет вид:

$$H(\lambda, t) = \frac{P_0(\lambda)}{V_0^{\,2}} \left(reg \frac{1}{|\lambda| - \nu} \right) + \frac{\pi i}{V_0^{\,2}} \left[P_0(\nu) \delta(\lambda - \nu) - P_0(-\nu) \delta(\lambda + \nu) \right]. \tag{4.8}$$

В соответствии со вторым способом можно предположить, что в начальный момент времени на невозмущенной поверхности жидкости мгновенно появилось возмущение давления, соответствующее, например, гидростатическому при $V_0 = 0$. Последующая эволюция границы жидкости и распределения давления определяется с помощью уравнений, соответствующих (3.5) и (3.9). Решение может быть построено последовательно по временным слоям.

Поскольку во все время движения никаких внешних возмущений нет, то следует ожидать, что при больших значениях времени при постоянной нагрузке ускорение центра масс глиссера будет равно нулю. Можно показать, что из этого предположения следует, что $P(\lambda, t) = P(\lambda)$. Тогда соотношение (4.8) примет вид:

$$H(\lambda, t) = \sqrt{\frac{|\lambda|}{g}} P(\lambda) \int_0^t e^{i\lambda V_0 (\tau - t)} \sin \sqrt{g|\lambda|} (\tau - t) d\tau .$$

Представляя синус экспоненциальной функцией, его можно преобразовать к виду

$$H(\lambda, t) = -\frac{i}{2\sqrt{g}} P(\lambda) \int_{-\infty}^{\sqrt{|\lambda|}t} \theta(t - \tau) \left[e^{-i\tau\left(V_0 \sqrt{|\lambda|} \operatorname{sgn} \lambda = \sqrt{g}\right)} - e^{-i\tau\left(V_0 \sqrt{|\lambda|} \operatorname{sgn} \lambda + \sqrt{g}\right)} \right] d\tau, \tag{4.9}$$

где $\theta(t)$ − функция Хевисайда. В пределе при $t \to \infty$ интеграл в правой части (4.9) будет суммой преобразований Фурье функции Хевисайда. Как известно [5],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) e^{i\tau\xi} d\tau = ireg\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \pi\delta(\zeta).$$

Тогда на основе (4.9) получается:

$$\lim_{t\to\infty} H(\lambda, t) = reg\, \frac{P(\lambda)}{|\lambda| V_0^{\ 2} - g} +$$

$$+\frac{\pi i}{2\sqrt{g}} P(\lambda)\left[\delta\left(V_0\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{sgn}\,\lambda - \sqrt{g}\right) - \delta\left(V_0\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{sgn}\,\lambda + \sqrt{g}\right)\right],$$

где дельта-функции сосредоточены в нулях функций, стоящих в скобках в качестве аргументов. С использованием формул разложения дельта-функций, можно записать:

$$\delta\left(V_0\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{sgn}\,\lambda \mp \sqrt{g}\right) = \frac{2\sqrt{g}}{V_0^{\ 2}}\delta(\lambda \mp \nu),$$

В результате

$$\lim_{t\to\infty} H(\lambda, t) = \frac{P(\lambda)}{V_0^{\ 2}}\left(reg\,\frac{1}{|\lambda| - \nu}\right) + \frac{\pi i}{V_0^{\ 2}}\left[P(\nu)\delta(\lambda - \nu) - P(-\nu)\delta(\lambda + \nu)\right]. \qquad (4.10)$$

Как видно, правые части (4.10) и (4.8) идентичны.

При $P(\lambda)/V_0^{\ 2} = c$, $c = const$, выражение (4.10) дает формулу для формы свободной поверхности, которую создает движущийся со скоростью V_0 импульс давления в виде дельта-функции $p(x) = c\delta(x)$ мощности c. Обратное преобразование Фурье (4.10) будет иметь вид:

$$\eta(x) = c\left[Q(x,\nu) + \sin \nu x\right], \qquad (4.11)$$

где

$$Q(x,\nu) = F_x^{-1}\left(reg\,\frac{1}{|\lambda| - \nu}\right) = -\frac{1}{\pi}\left[\cos \nu x Ci\,\nu|x| + \sin \nu|x|\left(\frac{\pi}{2} + Si\,\nu|x|\right)\right],$$

$\mathrm{Si}\,x$ и $\mathrm{Ci}\,x$ – интегральные синус и косинус.

Поскольку $\lim_{x\to\infty} Si\,\nu|x| = \pi/2$, а $\lim_{x\to\infty} Ci\,\nu|x| = 0$, то $\lim_{x\to\infty} Q(x,\nu) = -\sin \nu|x|$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \eta(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 2c \sin \nu x, & x < 0. \end{cases}$$

Это равенство означает, что впереди перед движущися импульсом давления волн нет, а позади образуются синусоидальные волны с амплитудой $2c$.

5. Выводы

Двумерная нестационарная задача глиссирования по водной поверхности для произвольной нестационарности с начальными условиями описывается сингулярными интегральными уравнениями, ядра которых выражаются через интегралы Френеля.

Получена формула для вычисления формы свободной поверхности при произвольной нестационарности и сингулярное нтегральное уравнение для определения функции давления.

Для определения переменных во времени смоченной длины и угла дифферента интегральное уравнение, аналогично случаю стационарного движения [7], в целях замыкания задачи, необходимо дополнить уравнениями динамики твердого тела.

Для трех основных случаев начальных условий, соответствующих реальным физическим задачам − невозмущенной поверхности, волновой поверхности и стационарному глиссированию, установлены соотношения, необходимые для их задания. В случае волновой поверхности установлены особенности задания параметров волн в неподвижной и подвижной, связанной с движущимся телом, системах координат.

Условие излучения в полученных интегральных уравнениях в силу задания начальных условий выполняется автоматически. Это показано предельным переходом при $t \to \infty$ на примере глиссирования с постоянной нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bessho M., Komatsu M., 1984, Two-Dimensional Unsteady Planing Surface, Journal of Ship Research, 28, № 1, pp. 18-28c.
2. Ulstein T., Faltinsen O. M., 1996, Two-Dimensional Unsteady Planing, Journal of Ship Research, 40, № 3, pp. 200-210.
3. Kashiwagi M., 2003, A Flow Model for a Displacement-Type Fast Ship with Shallow Draft in Regular Waves, Twenty-Fourth Symposium on Naval Hydrodynamics, Fukuoka, Japan, 11 p.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. − М.: Наука. 1980. − 448 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. − М.: Наука, 1988. − 512 с.
6. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. − М.: Наука, 1977. − 287 с.
7. Макасеев М.В. Установившееся движение пластины по поверхности весомой жидкости при заданной нагрузке и свободном угле хода // Прикладна гідромеханіка. 2003. Том. 5(77), №2. С. 73-75.

Надійшла у першій редакції 26.06.2009, в останній - 24.07.2009.