

УДК 532.517.4+532.546

Гидромеханические аспекты изучения структуры турбулентного потока с поперечным сдвигом в каналах и пористых средах

М. А. Саттаров

Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Предложена замкнутая модификация системы уравнений Рейнольдса с добавочными дифференциальными членами и соответствующими им коэффициентами. Получены частные решения уравнений для случая двумерного турбулентного потока с поперечным сдвигом. Установлены соотношения и условия возникновения вихревой вязкости, длины пути смешения, частоты турбулентности и логарифмического закона распределения осредненных скоростей в напорных каналах, капиллярах и пористых средах.

Ключевые слова: двумерного турбулентного поток, уравнений Рейнольдса, вихревой вязкости, длины пути смешения, осредненная скорость, каналы, капилляры

Запропоновано замкнуту модифікацію системи рівнянь Рейнольда з додатковими диференціальними членами та відповідними до них коефіцієнтами. Отримані часткові розв'язки рівнянь для випадку двовимірного турбулентного потоку з поперечним зсувом. Встановлено співвідношення та умови виникнення вихрової в'язкості, відстані перемішування, частоти турбулентності та логарифмічного закону розподілу середніх швидкостей у напірних каналах, капілярах і порових середовищах.

Ключові слова: двовимірний турбулентний поток, рівняння Рейнольда, вихрова в'язкість, відстань перемішування, середня швидкість, канали, капіляри.

A closed modification of the Reynolds system of equations with new differential terms and corresponding coefficients has been obtained. Particular solutions to the equations of steady-state turbulent flows are given. Relations and conditions for eddy viscosity, mixing length, turbulence frequency, and logarithmic velocity distribution law in pressure channels and porous media have been found.

Keywords: two-dimensional turbulent flow, the Reynolds equations, eddy viscosity, the mixing path length, the averaged velocity, channels, capillaries

1. Рейнольдсовы напряжения, вихревая вязкость Буссинеска и полуэмпирические теории турбулентности

Как известно [1], в уравнениях Рейнольдса компоненты осредненной скорости и давления имеют тот же вид, что и компоненты мгновенной скорости в уравнениях Навье-Стокса с той лишь разницей, что к компонентам ньютонова напряжения прибавились неизвестные рейнольдсовы напряжения $\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$.

В результате, имеем незамкнутую систему уравнений среднего движения:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{X_i}{\rho} - \frac{\partial \bar{p}}{\rho \partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где u_i, u'_i, \bar{u}_i – мгновенные, пульсационные и осредненные составляющие скорости частиц, \bar{p}, ρ и ν – давление, плотность и кинематическая вязкость несжимаемой жидкости; X_i – проекции объёмных сил, Δ – оператор Лапласа.

1.1. Ж.Буссинеск в 1877 г. [2], ещё до открытия системы уравнений (1), изучая поток воды в трубопроводах, обнаружил «кажущуюся» (вихревую) вязкость, намного превышающую молекулярную μ , и касательное напряжение для двумерного случая течения написал в виде:

$$\tau_{xz} = \tau_N + \tau_{xz} = \mu \frac{d\bar{u}}{dz} + A \frac{d\bar{u}}{dz}, \quad (\tau_{xz} = -\rho \overline{u'_x u'_z}) \quad (\text{I})$$

где $d\bar{u}/dz$ – градиент осредненной скорости, τ_N и τ_{xz} – касательные напряжения по Ньютону и Буссинеску, μ и A – молекулярная и вихревая вязкости, соответственно.

1.2. Сложность и незамкнутость системы (1) принудили ученых прибегнуть к экспериментам и приближенным методам расчета динамики реальных жидкостей. В 1915-50 годы Тейлором, Прандтлем, Карманом на основе дедуктивных, а Рейхардом, Александером, Бэроном и другими на базе индуктивных методов был построен ряд полуэмпирических теорий, основной целью которых было установление их соответствия с данными экспериментов, а также, в частности, определение вихревой вязкости A из (I) в связи с локальной структурой течения вязкой жидкости.

Критический анализ феноменологических теорий и уравнений, развитие и границы их применимости на основе сопоставления с множеством опытов, а также основы статистической теории турбулентности изложены в известных монографиях А.А.Тоунсенда [3], И.О.Хинце [4] и А.С.Монина и А.М.Яглома [5].

М.Д.Миллионщиков [6], приняв длину пробега вихря из l молекул за путь смещения, а скорость трения Кармана [2] $v_* \equiv \sqrt{\tau_0 / \rho}$ за масштаб пульсаций, касательное напряжение (I) и вихревую вязкость A записал в виде:

$$\tau \equiv \tau_N + \tau_{xz} = \nu \frac{d\bar{u}}{dz} + \rho \nu_* \frac{d\bar{u}}{dz}, \quad A \equiv \mu_T = \rho \nu_* \quad (\text{II})$$

Из (II) получена система уравнений ламинарного и турбулентного течений соответственно у стенки и внутри трубы. При этом коэффициент A выбирается так, чтобы траекторией решения второго уравнения системы была логарифмическая линия. Обработка данных классических опытов Никурадзе [2, 7] и множества других данных привели автора к выводу: «Таким образом, если говорить точно, закону логарифма, по измерениям Никурадзе, удовлетворяют не все значения расстояния от стенки, а лишь значения в пределах $\bar{z} > 0,2 \div 0,4$. Связаны ли указанные отклонения от логарифмического закона с неточностью измерений, чистотой постановки опыта, включая понятие гладкости поверхности, или они отражают действительно имеющее место явление, было бы желательно изучить экспериментально».

Обзор многочисленных научных работ 1960-97 гг. (их около 2000 статей), посвященных турбулентности: принципы осреднения уравнений Навье-Стокса, построение физических моделей в рамках осреднения, современные достижения статистической теории, методы расчета кинематических характеристик потока реальной жидкости, все это ясно сформулировано и подробно описано в шести главах объемистого учебника Жиана Пикюета «Турбулентные потоки. Модели и физика» [8]. Много страниц книги посвящено изложению новых достижений

теории изотропной турбулентности в тесной связи с классическими гипотезами и спектральными законами Говарта-Кармана-Колмогорова [9-10]. Основным объектом исследования автора являются рейнольдсовы напряжения и их роль в формировании физико-механических характеристик пограничного слоя при наличии и отсутствии градиента давления, степени шероховатости стенки, возникновении вихревой вязкости и, обусловленные этими факторами законы распределения скоростей в живом сечении потока с поперечным сдвигом. Модели и опыты, подтверждающие существование логарифмического закона, логарифмических слоев и зон, распределения скоростей у стенки красной нитью проходят через сотни страниц книги. При обилии данных опытов и модельных представлений течения вязкой жидкости в трубе и пограничном слое, вопрос об универсальности закона логарифма Пикюет считает еще открытым (с. 317).

2. Уравнения турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости А.Н.Колмогорова

Проблема замыкания системы уравнений Рейнольдса по сей день не потеряла актуальности. Впервые, еще в 1942 г., развивая гипотезу Буссинеска (I), А.Н.Колмогоров предложил гипотезу о пропорциональности тензора рейнольдсова напряжения тензору скоростей деформации [11]:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = A \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \rho k = 2A \bar{D}_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j; \\ 0, & \text{если } i = j \end{cases}, \quad (2)$$

где $A = \rho l \sqrt{k} = \rho l \sqrt{(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) / 2}$ – осредненная вихревая вязкость; l и k – масштабы пульсаций и кинетической энергии в единице массы.

На основе (2), ряда гипотез и пульсационных соотношений система (1) была приведена к замкнутой системе уравнений с тремя неизвестными постоянными, «которые должны быть определены раз и навсегда сравнением какого-либо решения уравнений с экспериментальными данными» [11].

Далее тензор (2) был расширен путем умножения тензоров второго ранга [12] и усложнен тензорами более высокого ранга [13], что привело ученых «к мысли о неполной адекватности самой гипотезы вихревой вязкости истинной природе турбулентного переноса... В задачах о турбулентных течениях в трубах, открытых руслах и пограничном слое гипотеза Буссинеска со скалярным коэффициентом A остается пока основным расчетным средством» [14]. В последующем эти уравнения были развиты Колмогоровым, Баренблатом [15] и другими для описания движения взвешенных наносов в трубопроводах и открытых руслах и успешно используются в технической гидромеханике.

3. О гидродинамическом способе изучения структуры турбулентного потока с поперечным сдвигом

Предположим, что компоненты рейнольдсова напряжения под действием молекулярной вязкости, свойства неразрывности в несжимаемой жидкости являются непрерывными функциями соответствующих компонент градиента осредненной скорости и могут быть разложены в ряд в окрестностях точек экстремума скорости по степеням $\partial \bar{u}_i / \partial x_j$ [16]:

$$-\overline{u'_i u'_j} \cong F \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\tau_{ij}^*}{\rho} + \varepsilon_{ij}^* \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{\prime*} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \dots, \quad (3)$$

$$\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u'_i u'_j} \Big|_*, \quad \varepsilon_{ij}^* = \partial(-\overline{u'_i u'_j}) / \partial(\partial \bar{u}_i / \partial x_j) \Big|_*, \quad \varepsilon_{ij}^{\prime*} = \partial \varepsilon_{ij}^* / \partial(\partial \bar{u}_i / \partial x_j) \Big|_* \quad (3a)$$

Тогда гипотеза Колмогорова (2) о связи тензора рейнольдсова напряжения с тензором деформации для анизотропной турбулентности ($-\overline{u'_i u'_j} \neq -\overline{u'_j u'_i}$), согласно (3) может быть расширена и представлена в виде:

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \frac{1}{2} [-\overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_j u'_i}] \approx \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\tau_{ij}^*}{\rho} + \frac{\tau_{ji}^*}{\rho} \right) + \left(\varepsilon_{ij}^* \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ji}^* \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ij}^{\prime*} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \varepsilon_{ji}^{\prime*} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \dots \right\}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) видно, что в точке экстремума коэффициенты ряда (3) состоят из рейнольдсовых напряжений и их производных от соответствующего компонента градиента скорости. За точку экстремума примем точку контакта турбулентного ядра с ламинарным подслоем.

Подставляя (3) в (1), получим новую систему уравнений среднего движения Навье-Стокса [16]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{X_i}{\rho} - \frac{\partial \bar{p}}{\rho \partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\tau_{ij}^*}{\rho} + (\nu + \varepsilon_{ij}^*) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{\prime*} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \dots \right], \quad (5)$$

Величины τ_{ij}^* / ρ , ε_{ij}^* , $\varepsilon_{ij}^{\prime*}$ являются дифференциальными прототипами величин, известных в феноменологических уравнениях Буссинеска, Прандтля-Кармана: «скорость трения» $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ (см/с) (динамическая скорость) на твердой стенке, ε_{ij}^* (см²/с) – вихревая вязкость, длина пути смещения l (см) ($\varepsilon_{ij}^{\prime*} = l^2$) [2], а $\varepsilon_{ij}^{\prime\prime*}$ (см²/(1/с)), $\varepsilon_{ij}^{\prime\prime\prime*}$ (см²/(1/с)²), ... суть новые числовые характеристики турбулентного потока в точке экстремума.

3. Двумерные модели турбулентного потока с поперечным сдвигом

3.1. Полагая в (5) $\bar{u}_1 \equiv u$, $\bar{u}_2 \equiv v$, $\bar{u}_3 \equiv w$, после допустимых упрощений, вместе с уравнением неразрывности, получим обобщение уравнения Прандтля [1] для случая прямолинейного турбулентного движения на плоскости xOz :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_{xz}^*}{\rho} + \frac{\tau_{zx}^*}{\rho} + (\nu + \varepsilon_{xz}^*) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varepsilon_{xz}^{\prime*}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \nu N(x, z) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где u, w – компоненты осредненной скорости, $\nu N(x, z) = (\nu + \varepsilon_{zx}^*) u_x + \dots$, напряжения, которые из-за их малости, далее принимаем равными нулю. $\tau_{xx}^* \equiv -\rho \overline{u'^2}$ – добавочное турбулентное давление.

3.2. Турбулентные течения при отсутствии градиента давления.

В теориях подобия и размерностей [2, 9] модели течения в пограничных слоях построены при отсутствии градиента давления в предположении, что градиент скорости является функцией расстояния от стенки, касательного напряжения и плотности жидкости. Такие уравнения нетрудно получить из (6), например, при $u_t = u_x = 0$, и $X = p_x = 0$. При этом первым интегралом (6) для случая движения жидкости в трубе или между двумя параллельными стенками с учетом условия симметрии на оси потока, т.е. при $u_z(0) = 0$, будет уравнение:

$$(\nu + \varepsilon_{xz}^*)u_z + \dots = -\varepsilon_{xz}^* u_z^2 / 2, \quad (7)$$

а из уравнения (7) следует:

$$u_z \equiv 0 \text{ или} \quad (7a)$$

$$u_z = -2\theta(z), \quad (u_z < 0). \quad (7б)$$

Решением (7a) будет $u_1 = const. \neq 0$, это означает, что поток движется как твердое тело, при $u_1 \equiv 0$ – имеем гидростатическое равновесие. Из (7б) следует линейная зависимость частоты турбулентности от градиента скорости. С учетом характера изменения градиента скорости на промежутке $0 \leq z < R$, представим частоту турбулентности в виде $\theta(\xi) = \theta_0 R / (R - z)$. Тогда из (7б) получим логарифмический закон распределения скоростей:

$$u_2 - u_e = 2\theta_0 R \ln \frac{R_e + \delta - z}{\delta}, \quad u_{\max} = 2\theta_0 R \ln \frac{R_e + \delta}{\delta}. \quad 0 \leq z \leq R - \delta. \quad (8)$$

Здесь $R = R_e + \delta$ – радиус трубы; u_e – динамическая скорость в точке экстремума $z = R_e$, θ_0 – частота в точке $z = 0$, R_e и δ – турбулентный и ламинарный слой. Из уравнений (7)-(7б) получим формулы для расчета длины пути смешения l^2 и частоты турбулентности θ , соответственно:

$$\varepsilon_{xz}^* \equiv l^2 = 2(\nu + \varepsilon_{xz}^*) / |u_z| \quad \text{и} \quad \theta = |u_z| / 2 \quad (7в)$$

3.3. О структуре турбулентного потока в трубах и каналах.

При наличии градиента давления, поместив начало координат в центр живого сечения потока в трубе ($\sigma = 1$, $\xi^2 = x^2 + z^2$) и в канале с параллельными стенками ($\sigma = 0$, $\xi = z \leq \pm R$), из уравнения (5), после разового интегрирования с учетом принципа симметрии, получаем:

$$\left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 - 2\theta(\xi) \frac{du}{d\xi} - I_* \xi = 0, \quad 0 \leq \xi \leq R_e \quad (9)$$

где $\theta(\xi) = \nu(1 + \bar{\varepsilon}_{xz}) / l^2$, $I_* = 2gI / (1 + \sigma)l^2$, $\rho g I = -\partial p / \partial x$;

Решение уравнения (9) при граничном условии $u(R_e) = u_e$, дает закон распределения скоростей в напорных каналах при наличии градиента давления:

$$u - u_e = \int_{\xi}^{R_*} \left[\theta(\xi) \pm \sqrt{\theta^2(\xi) + I_* \xi} \right] d\xi.$$

Отсюда видно, что наряду с градиентом давления, определяющим фактором распределения скоростей является величина турбулентной частоты $\theta(\xi)$.

4. О характеристиках равномерной турбулентности.

В случае развитого равномерного турбулентного течения, полагая $R_e \approx R$ и $u_e \approx 0$, уравнение (9) запишем в виде:

$$-\nu(1 + \bar{\varepsilon}_{x\xi})u_\xi = gI\xi/(1 + \sigma) \quad (\bar{\varepsilon}_{x\xi} = \varepsilon_{x\xi}/\nu) \quad (10)$$

Из (10) при заданных значениях осредненной скорости и ее градиента в заданных точках живого сечения потока непосредственно получаем формулу для расчета приведенной величины вихревой вязкости Буссинеска:

$$\bar{\varepsilon}_{x\xi} = \frac{gI\xi}{\nu(1 + \sigma)|du/d\xi|} - 1, \quad (11)$$

Заменяя функцию $\nu(1 + \bar{\varepsilon}_b(\xi))$ ее средним $\overline{\bar{\varepsilon}_{x\xi}(\xi)}$, решая (10), получим формулу для профиля скоростей (парабола Буссинеска) и расходной скорости U :

$$u(\xi) = \frac{gIR^2}{2\nu(1 + \sigma)\overline{\bar{\varepsilon}_{x\xi}(\xi)}}(1 - \bar{\xi}^2), \quad U = \frac{2^\sigma gIR^2}{\nu\overline{\bar{\varepsilon}_U}(1 + \sigma)^2(3 + \sigma)} \cdot \left(\bar{\xi} = \frac{\xi}{R} \right) \quad (12)$$

С учетом равенства $\overline{\bar{\varepsilon}_{x\xi}} = 1 + \overline{\bar{\varepsilon}_U}$ получим формулу для осредненной оценки коэффициента вихревой вязкости $\overline{\bar{\varepsilon}_{x\xi}} \approx \overline{\bar{\varepsilon}_U}$:

$$\overline{\bar{\varepsilon}_U}(\bar{\xi}) = \frac{gIR^2(1 - \bar{\xi}^2)}{2\overline{\bar{\varepsilon}_U}(\bar{\xi})(1 + \sigma)} - 1; \quad \bar{\varepsilon}_U = \frac{2^\sigma IRat_{cp}}{4(1 + \sigma)^2(3 + \sigma)} - 1. \quad \left(Rat_{cp} = \frac{Re_U}{Fr_U} \equiv \frac{gR^2}{\nu U} \right). \quad (13)$$

В рассматриваемом случае вихревая вязкость равна нулю при соотношениях:

$$gIR^2(1 - \bar{\xi}^2)/2\overline{\bar{\varepsilon}_U}(\bar{\xi})(1 + \sigma) = \nu \quad \text{и} \quad 2^{\sigma-2} IRat_{cp}/(1 + \sigma)^2(3 + \sigma) = \nu, \quad (14)$$

и в поле расходной скорости U она возникает лишь при условиях:

$$\frac{IRat_{cp}}{2^{2-\sigma}(1 + \sigma)^2(3 + \sigma)} > 1 \quad \text{или} \quad \frac{IgR^2}{2^{2-\sigma}\nu(1 + \sigma)^2(3 + \sigma)U} > 1. \quad (15)$$

Итак, в стационарном потоке определяющими факторами вихревой вязкости являются градиент давления I , коэффициент подобия $Rat_{cp} = Re_U/Fr_U$ и форма живого сечения потока. При отсутствии градиента $\partial p/\partial x = 0$, так же как вне поля силы тяжести ($g = 0$), вихревая вязкость $\bar{\varepsilon}_U$ не возникает.

5. Сравнение модельных формул с данными опытов.

5.1. Среди множества лабораторных работ по изучению движения вязких жидкостей в гладких и шероховатых трубах опыты Никурадзе [2, 7] отличаются

точностью и полнотой полученной первичной информации о распределении осредненных скоростей частиц жидкости в живом сечении потока (в таблицах Никурадзе отсчет данных опытов ведется от стенки трубы $r = R$ (стр. 98-99 и 114-115 [2])). Нами использованы первичные данные для оценки коэффициентов добавочных членов новых дифференциальных уравнений (8) и (10).

На рис.1 отражены: 1 – профили скоростей течения воды в гладкой трубе ($d = 1$ см): опытные [2]–значки \circ ; сплошные линии – по закону логарифма (8) при $I = 0,0595; 1,255$; $R/\delta_1 \approx 700$; $R/\delta_2 \approx 2200$ см см; 3– вихревая вязкость для равномерного потока вычислена по формуле (12); 2– средняя длина пути смешения l и 4– частота турбулентности θ , вычислены по формуле (7в).

Из табл. 1 видно: закон логарифма (8) с высокой точностью описывает данные измерения и с ростом I , растет проникающая способность турбулентного потока в глубь ламинарного подслоя. Высокая сходимость закона логарифма обнаружена автором и при обработке всех остальных данных опытов Никурадзе.

Таблица 1. оценки сходимости расчета формулы (8) с данными опытов Никурадзе.

r , см	$\nu = 0,0135 \text{ см}^2/\text{с}, I = 0,0595$				$\nu = 0,0135 \text{ см}^2/\text{с}, I = 1,255$			
	u_N , см/с	\bar{u}_N	\bar{u}_{\ln}	$\Delta \bar{u}_{N-\ln}$, в %	u_N , см/с	\bar{u}_N	\bar{u}_{\ln}	$\Delta \bar{u}_{N-\ln}$, в %
0,005	28,0	0,411	0,371	5,31	174	0,454	0,425	6,4
0,01	35,0	0,514	0,482	6,89	214	0,558	0,528	5,4
0,05	47,0	0,690	0,667	3,33	277	0,723	0,722	0,1
0,20	59,5	0,874	0,867	0,44	341	0,890	0,890	0,0
0,40	66,4	0,975	0,968	0,46	376	0,981	0,973	0,8
0,48	67,9	0,997	0,994	-0,44	382,7	0,998	0,995	0,3
0,49	68,0	0,998	0,996	-0,15	383,1	0,999	0,998	0,1

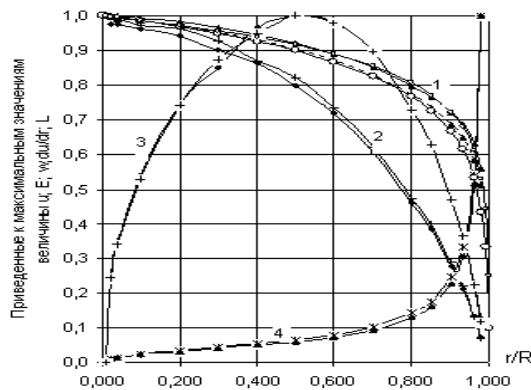


Рис. 1. Турбулентные характеристики потока в трубе.

Как видно (рис. 1), правая ветвь вихревой вязкости (формула (12)) на отрезке $1 \leq \bar{r} < 1/2$ монотонно растет, достигая своего максимума в точке $\bar{r} = 1/2$. Ветвь вязкости на отрезке $1/2 \leq \bar{r} \leq 1$ убывает, имея отличный от нуля

минимальный предел по формуле (11) $\bar{\varepsilon}_{x\xi}^* \rightarrow 1$ в точке $r = R_e$. Статистическая обработка данных измерений скоростей u_i как для гладких, так и шероховатых труб на отрезке $-1/2 \leq \bar{r} \leq +1/2$ показывают, что распределение скоростей в данной части турбулентного ядра наилучшим образом выравнивается параболой с максимумом в точке $\bar{r} = 0$ и с коэффициентом регрессии близким к единице. Обнаружено значительное влияние шероховатости стенки на величину расхода трубы (в шероховатой трубе она на 30-50% меньше, чем в гладкой). Но влияние шероховатости на вихревую вязкость почти не наблюдается (<5-8%). Отсюда следует, что вихревая вязкость в тесной связи с молекулярной вязкостью формирует кинематическую структуру жидкости, и почти не зависит от качества стенки трубы. При этом в живом сечении потока в трубе вихревая вязкость описывается также параболой с высоким коэффициентом регрессии и решение уравнения (10) дает закон логарифма [16].

5.2. Величина $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ – в теориях Прандтля-Кармана принято «в качестве меры возмущенного турбулентного движения» [2] и выражает добавочное напряжение на твердой стенке и используется в теории подобия как динамическая скорость для сравнения соответствия данных различных опытов. Никурадзе определяет v_* по известной в динамики русловых потоков формуле:

$$v_*^2 = \overline{u'w'} = \tau_0 / \rho = gI\mathfrak{R}, \quad (\mathfrak{R} \equiv R/2) \quad (16)$$

где $\mathfrak{R} \equiv R/2$ – гидравлический радиус цилиндрической трубы.

Для вывода (16) напишем уравнение Рейнольдса (1) для двумерной задачи со стационарным равномерным потоком в круглой ($\sigma = 1$) и плоской ($\sigma = 1$) трубе:

$$\left. \begin{aligned} d((\pi\xi)^\sigma (\mu u_x - \rho \overline{u'w'})) &= (\pi\xi)^\sigma p_x d\xi = 0 \\ u_x &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

Для идеальной жидкости ($\mu = 0$) решение системы уравнений (17) дает закон изменения рейнольдсова напряжения в живом сечении потока:

$$\overline{u'w'} = \tau_{x\xi} / \rho = gI\xi / (1 + \sigma). \quad (16a)$$

Отсюда, при $r = R_e$ для оценки динамической скорости u_e получим формулу

$$u'w'|_* = u_*^2 = \tau_{x\xi}^* / \rho = gRI / (1 + \sigma). \quad (16b)$$

Из (16) при $I_1 = 0,0595$ и $I_2 = 1,255$ получено $u_{*1} = 3,82$ и $u_{*2} = 17,55$ см/с, которые по формуле (16) должны иметь место на стенке трубы. Расчет по формуле (8) дает $u_{eI_1} = 3,8192$; $u_{eI_2} = 17,56$ см/с и находятся вдали от стенки на расстояниях $\delta_1 = 0,000734$ см и $\delta_2 = 0,000235$ см, что показывает динамичный характер ламинарного подслоя в поле силы тяжести и градиента давления.

5.3. Коэффициент сопротивления λ в трубах определяем для средней скорости (формула (12)) путем сравнения ее с формулой Дарси [2, 6]:

$$\lambda = \left[2^{4-\sigma} (1 + \sigma)(3 + \sigma) \bar{\varepsilon}_{trcr}^+ \right] / \text{Re}_{cp} = 2^\sigma I / Fr_{cp} (1 + \sigma) \quad (18)$$

На рис. 2 даны графики зависимости λ от приведенных чисел Рейнольдса \overline{Re} (значок Δ) и Фруда \overline{Fr} (значок \circ), $\lambda = f_1(\overline{Re})$, $\lambda = f_2(\overline{Fr})$ для течения воды через гладкие ($d = 2$ см; значки \bullet, \blacktriangle) и шероховатые ($d = 2,474; 2,434; 2,434$ и $2,412$ см, значки \circ, Δ) трубы при шероховатости $k = 0,01; 0,02; 0,04; 0,08$ см. При малых \overline{Re} и \overline{Fr} в шероховатых трубах λ в зависимости от величины k ведет себя неустойчиво и с ростом аргумента стремится к пределу, а в гладких трубах λ с ростом \overline{Re} и \overline{Fr} монотонно убывает.

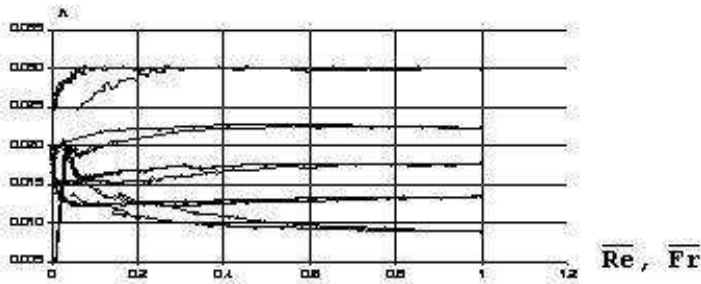


Рис.2. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса и Фруда в трубах.

На рис.3 даны графики функций $\lambda = f(\overline{\varepsilon}_{xr} + 1)$, при $k = 0,01; 0,02; 0,04; 0,08$ см. Для шероховатых труб λ , начиная с некоторого значения $\overline{\varepsilon}_b + 1$, принимает постоянное значение и с ростом k , удаляется все дальше от кривой (знаки \circ), отражающей течение в гладких трубах.

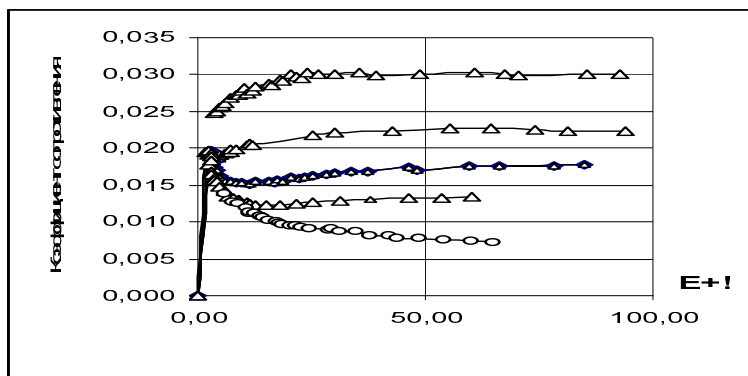


Рис.3. Зависимость коэффициента трения от эффективной вязкости в трубе

6. Гидромеханические аспекты изучения фильтрационных аномалий в пористых средах

Для изучения фильтрационных аномалий в [18, 22-23] предложены теория и модели течения ньютоновских и бингамовских жидкостей в пористых средах. Здесь дана интерпретация ранее феноменологических уравнений фильтрации с позиции гипотезы и теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова[10]

Предположим, что движение частиц жидкости в порах дисперсно-пористой среды описывает сложную извилистую траекторию, а процесс фильтрации в целом как псевдо турбулентное явление, удовлетворяет принципам теории локально-изотропной турбулентности со среднестатистическими параметрами в пространстве, заполненном твердыми частицами, образующими устойчивые однородные решетки.

Принимая формулу связи вектора скорости \vec{v} фильтрации с вектором скорости среднего движения частиц жидкости: $\mathbf{v} = m\mathbf{u}$ (m – пористость среды) [19], представим пористую среду как совокупность прямолинейных капилляров и для скорости \vec{v} получим аналогичные (5-6) уравнения, учитывающие величину пористости m .

Формулы фильтрации в цилиндрических и плоских капиллярах аналогичны, как и для случая равномерной турбулентности (см. п.4)

6.1. Опыты течения в капиллярах и пористых средах [20-23]

$\nu_0 = (\nu + \varepsilon_{xz}^*) / \nu$ – эффективная вязкость, I – градиент напора, V и K – скорость и коэффициент фильтрации (см/с), λ – коэффициент сопротивления.

Табл. 2. Течение различных жидкостей через кварцевый капилляр [20]. $d = 0,033$ см, вода – $\nu_0 = 0,0088$ см²/с; спирт – $\nu_0 = 0,012$ см²/с; температура – 30⁰ С

I	V_0	K	ν_0	λ_0	V_0	K	ν_0	λ_0
0,01	0,03	3	1,374	719,4	0,025	2,5	1,113	1036
0,05	0,15	3	1,374	143,9	0,125	2,5	1,113	207
0,15	0,4	2,67	1,546	60,7	0,38	2,53	1,098	67
0,3	0,8	2,67	1,546	30,3	0,78	2,67	1,070	32

Табл. 3. Течение минерализованной воды через кварцевый песок [21]. Диаметр частиц: $d = 0,16 - 0,20$ см, слабый раствор хлористого кальция; $T = 20^0$ С

I	V	K	ν_0	Re_V	Fr_V
0,003	0,165	55	5,887	3,3	0,0001
0,014	1,36	97,1	3,333	26,9	0,0094
0,068	6,6	97,1	3,336	130,7	0,2220
0,22	16,94	77	4,205	335,4	1,4626

Табл. 4. Течение дистиллированной воды через образцы речного песка. Диаметр частиц: $d = 0,1 - 0,20$ см. [22-23]

I	V	K	ν_0	Re_V	Fr_V
0,02	0,015	0,75	161,9	0,2970	0,0000
0,08	0,056	0,7	173,4	1,1089	0,0000
0,15	0,135	0,9	134,9	2,6733	0,0001
0,3	0,3	1,0	121,4	5,9406	0,0005

Выводы.

1. На основе развития гипотез Буссинеска-Колмогорова и синтеза её с гипотезой Рейнольдса получена замкнутая система уравнений Рейнольдса с новыми дифференциальными членами и коэффициентами и их интерпретация с позиции теории турбулентности с поперечным сдвигом.

2. В случае установившегося движения, как при наличии, так и без градиента давления получены частные решения уравнений в виде логарифмических законов распределения для пограничного слоя и трубы. Получены также, удобные для инженерных приложений, частные решения линеаризованных уравнений в виде параболы (Буссинеска), с осредненными характеристиками реального потока.

3. При равномерном течении определяющими факторами вихревой вязкости являются градиент давления, коэффициент подобия $Rat_{cp} = Re_{\nu} / Fr_{\nu} \equiv gR^2 / \nu U$ и форма живого сечения потока.

4. Утверждается, что как бы мала не была ньютонова вязкость, она как абсолютная физическая константа, так или иначе, участвует в формировании динамических свойств реального потока при любых значениях коэффициента подобия $Rat_{cp} = gR^2 / \nu U$, как при относительной оценке количества вихревой вязкости, так и при формировании характера распределения скоростей.

5. Показано, что в рамках теории мелкомасштабных пульсаций процесс фильтрации однородных, минерализованных и многокомпонентных жидкостей в капиллярах и пористых средах можно изучить гидромеханическими способами значительно шире и глубже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А. и Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2, - М.: Гостехтеориздат, 1963. – 612с.
2. Проблемы турбулентности. Пер. статей Л.Прандтля, Т.Кармана, И.Никурадзе, О.Рейнольдса и др. Пер. с англ. под. ред. М.А.Великанова. М.: ОНТИ, 1936. 332 с.
3. Таунсенд, А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во Иностран. лит-ры, 1959, 400 с.
4. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. Пер. с англ. под редакцией Г.Н.Абрамовича. Госиздат Физ.-мат. литературы, М.: 1963, 680 с.
5. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. – Ч.1. – М.: Наука, 1965. – 639 с.
6. Миллионщиков М.Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М.: Наука, 1969, 43 с.
7. Nikuradze I. Stromungsgetetze in rauchen Rohren. VDJ Forschungsheft, 1933, №361, 22 p.
8. Piquet, Jian. Turbulent flows. Models and Physics. Revised 2 nd Printing 2001. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 762 p.
9. Ландау Л.Д. и Лифшиц М.Е. Механика сплошных сред. М: Гостехиздат, 1954. – 796 с.

10. Колмогоров А.Н.. Локальная структура турбулентности несжимаемой вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, №4. С. 299-303;
11. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, т.6, № 1-2 –С. 56-58.
12. Монин А.С. О характеристиках анизотропной турбулентности. – Докл. АН СССР, 1950, т. 75, № 5, с. 621-624.
13. Дмитриев М.Н., Лурье М.В. О реологической модели анизотропной турбулентности. – Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 4, с. 775-777
14. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. Ленинград, гидрометеиздат, 1979, 311 с.
15. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. – Прикладная математика и механика, 1953, т. 17, №3.– С. 261-274.
16. Саттаров М.А. Гидромеханический метод оценки осредненных характеристик турбулентного потока // Докл. АН Республики Таджикистан, 2006, Т.49, № 4. - С.321-327
17. Саттаров М.А. Гидромеханические аспекты классификации характеристик турбулентного потока с поперечным сдвигом // Докл. АН Республики Таджикистан. Душанбе, 2007, Т.50, № 11-12. - С.826-835
18. Саттаров М.А. Некоторые модели фильтрации в пористых средах. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, №1. С. 54-57
19. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод, - М.: Наука, 1977. – 664с.
20. Бондаренко Н.Ф. Физика движения подземных вод, - Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 215с.
21. Skawinski R. Lasowska A. Non-Darcian flow of water solutions in artificial porous medium with grain sizes of several millimeters.// Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech. 1974. v.22, №5, P. 377-380, P. 373-376. 1974. v.22, № 6, P.477-481
22. Саттаров М.А. 1) Вопросы фильтрации в области малых скоростей течения. Автореф. дис... докт. тех. наук: 01.02.05. Киев, 1978. С. 1- 44.
23. Саттаров М.А. Реология и законы фильтрации. // Математические модели и их приложения. Сб. научн. Тр. – Новосибирск, 1999. – С. 159-169.

Надійшла у першій редакції 10.05.2009, в останній - 13.05.2009.

© Саттаров М. А., 2009