УДК 517.95

Плоская динамическая задача термоупругости в компонентах смещения и уравнение в частных производных третьего порядка

Т. З. Чочиев

Владикавказский научный центр Академии наук РФ и РСО-Алания

Вопрос построения компонентов смещения, удовлетворяющих плоской динамической задаче термоупругости, сведен к решению линейного дифференциального уравнения третьего порядка с тремя независимыми переменными. Методом понижения порядка производной найдено решение, удовлетворяющее всем дополнительным требованиям задачи. Актуальность результата состоит не только в получении явного решения, но и в выражении компонентов смещения через это решение.

Ключевые слова: *плоская динамическая задача термоупругости, компоненты смещения, дифференциальное уравнение третьего порядка, понижение порядка, явное решение*

Питання побудови компонентів зміщення, що задовольняють пласкій динамічній задачі термопружності, зведене до розв'язку лінійного диференційного рівняння третього ступеню з трьома незалежними змінними. Методом зниження ступеню похідної знайдено розв'язок, який задовольняє усім додатковим вимогам задачі. Актуальність результату полягає не тільки в отриманні явного розв'язку, а також у отриманні виду залежності компонентів зміщення від цього розв'язку.

Ключові слова: *пласка динамічна задача термопружності, компоненти зміщення, диференціальне рівняння третього ступеню, зниження ступеню, явний розв'язок*

The question of building the components of displacements satisfying the flat dynamic problem of thermoelasticity, reduced to solving a linear differential equation of third order with three independent variables. The method of lowering the order of the derivative of a solution satisfies all the requirements of the additional tasks. The relevance of the result is not only to obtain explicit solutions, but also in terms of components of displacement, through this decision.

Keywords: *plane dynamic problem of thermoelasticity, the components of displacement, the differential equation of third order, reduction of order, an explicit solution*

1. Постановка задачи.

Как известно, плоская динамическая задача термоупругости в компонентах смещения изучена мало [1-5]. Путем приведения уравнения высшего порядка к системе уравнений первого порядка, удалось установить зависимость компонентов смещения от некоторой функции L^*, являющейся решением уравнения третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 L^*}{\partial t^3}+a\frac{\partial^3 L^*}{\partial t\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 L^*}{\partial t^2}+c\frac{\partial^2 L^*}{\partial t\partial x}+d\frac{\partial^2 L^*}{\partial t\partial y}+e\frac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y}+i\frac{\partial L^*}{\partial t}+j\frac{\partial L^*}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+nL^*=q \quad (1.1)$$

Область рассмотрения представляет собой некоторый цилиндрической формы объем Ω, ограниченный поверхностью S, с основанием D, лежащим на плоскости xOy, с контуром Γ и с образующими, параллельными оси Ot. L^* допускает непрерывные частные производные третьего порядка вплоть до S. Требуется найти решение L^*, удовлетворяющее уравнению (1.1); при $t=0$

$$L^*\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y);\ \left.\frac{\partial L^*}{\partial t}\right|_{t=0} = F_0(x,y)\,, \tag{1.2}$$

а на контуре Г выполняется

$$L^*\big|_{\Gamma} = F(x^*, y^*) \qquad \big((x^*, y^*)\in\Gamma\big). \tag{1.3}$$

2. Исследование уравнения (1.1).

Если в соотношении

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial t^2} + a_1\frac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y} + b_1\frac{\partial L^*}{\partial t} + c_1\frac{\partial L^*}{\partial x} + d_1\frac{\partial L^*}{\partial y} + e_1 L^*\right) +$$

$$+\lambda\left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial t^2} + a_1\frac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y} + b_1\frac{\partial L^*}{\partial t} + c_1{}^*\frac{\partial L^*}{\partial x} + d_1{}^*\frac{\partial L^*}{\partial y} + e_1{}^* L^*\right) = q\,, \tag{2.1}$$

где $a_1, b_1, ..., e_1, c_1^*, d_1^*, e_1^*$ через заданные коэффициенты выражаются соответственно

$$a_1 = a;\ b_1 = b - \lambda;\ \lambda = \frac{1}{a}\left(e - \frac{\partial a}{\partial t}\right);\ c_1 = c;\ d_1 = d;\ e_1 = i - \lambda b_1 - \frac{\partial b_1}{\partial t}$$

$$c_1^* = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial c}{\partial x};\ d_1 = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial d}{\partial t};\ e_1^* = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial e_1}{\partial t}\,, \tag{2.1$_1$}$$

выполнить указанную операцию, сгруппировать и принять во внимание значения коэффициентов, то сразу придем к (1.1). Но с другой стороны (2.1) записываем как систему равенств [5-7],

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L^*}{\partial t^2} + a_1\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y} + b_1\dfrac{\partial L^*}{\partial t} + c_1\dfrac{\partial L^*}{\partial x} + d_1\dfrac{\partial L^*}{\partial y} + e_1 L^* = v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \lambda v = q + \lambda\left[(c_1 - c_1{}^*)\dfrac{\partial L^*}{\partial x} + (d_1 - d_1{}^*)\dfrac{\partial L^*}{\partial y} + (e_1 - e_1{}^*)L^*\right] \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L^*}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y} + b_1\dfrac{\partial L^*}{\partial t} + \left[c_1 - l\lambda(c_1 - c_1{}^*)\right]\dfrac{\partial L^*}{\partial x} + \left[d_1 - l\lambda(d_1 - d_1{}^*)\right]\dfrac{\partial L^*}{\partial y} + \\ + \left[e_1 - l\lambda(e_1 - e_1{}^*)\right]L^* = \rho, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \left(\lambda - \dfrac{1}{l}\right)v = q - \dfrac{\rho}{l}, \\ l\lambda\left[(c_1 - c_1{}^*)\dfrac{\partial L^*}{\partial x} + (d_1 - d_1{}^*)\dfrac{\partial L^*}{\partial y} + (e_1 - e_1{}^*)L^*\right] + \rho = v; \end{cases} \tag{2.3}$$

где ρ – решение третьего уравнения и обеспечивает эквивалентность систем (2.2) и (2.3), l – решение уравнения.

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \left(b - \lambda_3 - \frac{1}{\lambda_1}\right)l + 1 = 0 \qquad \left(l\,|_{t=0} = 1\right), \tag{2.3$_1$}$$

λ_3 – некоторое решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}+\lambda_3^2+(b_1-\lambda)\lambda_3-c_1+\lambda l(c_1-c_1^*)=0\,. \tag{2.4}$$

Первое уравнение системы не простое. Поэтому его рассмотрим отдельно от других. Если в соотношении

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial t}+\lambda_3 L^*\right)+\left(b-\lambda-\lambda_4\right)\left(\frac{\partial L^*}{\partial t}+\lambda_3 L^*+\lambda_1\frac{\partial L^*}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial L^*}{\partial y}\right)=\rho-a\frac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y} \tag{2.5}$$

раскрыть скобки, сгруппировать и принять во внимание

$$\lambda_1=\frac{c_2}{b-\lambda-\lambda_3}\quad \lambda_2=\frac{d_2}{b-\lambda-\lambda_3};\; c_2=c_1-l\lambda(c_1-c_1^*);\;\; d_2=d_1-l\lambda(d_1-d_1^*);$$

$$e_2=e_1-\lambda l(e_1-e_1^*)\,,$$

то получим первое уравнение (2.3). Но (2.5) есть система равенств [7].

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L^*}{\partial t}+\lambda_3 L^*=\text{€},\\[2mm] \dfrac{\partial \text{€}}{\partial t}+\left(b-\lambda-\lambda_3\right)\text{€}+\left(b-\lambda-\lambda_3\right)\left(\lambda_1\dfrac{\partial L^*}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial L^*}{\partial y}\right)=\rho-a\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y},\end{cases} \tag{2.6}$$

которая допускает приведение к другой системе

$$\begin{cases}l_1 a\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y}+l_1\left(b-\lambda-\lambda_3\right)\left(\lambda_1\dfrac{\partial L^*}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial L^*}{\partial y}\right)+\lambda_3 L^*+\dfrac{\partial L^*}{\partial t}=\rho_1,\\[2mm] \dfrac{\partial \text{€}}{\partial t}+\left(\left(b-\lambda-\lambda_3\right)-\dfrac{1}{\lambda_1}\right)\text{€}=\rho-\dfrac{\rho_1}{l_1},\\[2mm] -l_1 a\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial x\partial y}-l_1\left(b-\lambda-\lambda_3\right)\left(\lambda_1\dfrac{\partial L^*}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial L^*}{\partial y}\right)+\rho_1=\text{€},\end{cases} \tag{2.7}$$

где ρ_1 – решение третьего уравнения и доказывает эквивалентность систем (1.10) и (1.9). l_1 и l_2 удовлетворяют

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(al_1)}{\partial t}-d_3(b_3-b_3^*)(al_1)^2+\left(\dfrac{b_3}{l_2}-d_3\right)l_1 a+\dfrac{1}{l_2}=0,\\[2mm] \dfrac{1}{l_2}=l_1 a\left[d_3-b-\lambda-\lambda_3+\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial t}\right].\end{cases} \tag{2.8}$$

Тут же отмечаем, что из выполнения системы (2.7) следует выполнимость первого уравнения системы (2.3). Но (2.7) нужно привести к первому порядку. Отдельно переписываем первое уравнение и представим его в форме:

$$l_1 a\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\xi}+a_3\frac{\partial L^*}{\partial\eta}+b_3 L^*\right)+c_3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\xi}+a_3\frac{\partial L^*}{\partial\eta}+b_3 L^*\right)+d_3\left(\frac{\partial L^*}{\partial\xi}+a_3\frac{\partial L^*}{\partial\eta}+b_3^* L^*\right)\right\}+$$

$$+\frac{\partial L^*}{\partial t}=\rho_1\,, \tag*{(2.7)$_1$}$$

где

$$a_3 = 1;\ c_3 = -1;\ b_3 = \frac{d_2}{a};\ d_3 = \frac{c_2}{a};\ d_3 b_3 = \frac{\lambda_3}{l_1 a} - \frac{\partial b_3}{\partial \xi} + \frac{\partial b_3}{\partial \eta};\ \xi = x + y;\ \eta = x - y,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^*}{\partial \xi} + a_3 \dfrac{\partial L^*}{\partial \eta} + b_3 L^* = v^*, \\ l_1 a \left[\dfrac{\partial v^*}{\partial \xi} + c_3 \dfrac{\partial v^*}{\partial \eta} + d_3 v^* \right] + \dfrac{\partial L^*}{\partial t} - l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) L^* = \rho_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

которая эквивалентна другой,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^*}{\partial \xi} + a_3 \dfrac{\partial L^*}{\partial \eta} + l_2 \dfrac{\partial L^*}{\partial t} + \left[b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*) \right] L^* = \rho_2, \\ l_1 a \left[\dfrac{\partial v^*}{\partial \xi} + c_3 \dfrac{\partial v^*}{\partial \eta} + \left(d_3 - \dfrac{1}{a l_1 l_2} \right) v^* \right] = \rho_1 - \dfrac{\rho_2}{l_2}, \\ -l_2 \dfrac{\partial L^*}{\partial t} + l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*) L^* + \rho_2 = v^*, \end{cases} \quad (2.10)$$

если ρ_2 – решение третьего уравнения. Из выполнимости (2.10) следует выполнимость (2.9), или $(2.7)_1$, то есть, первое уравнение системы (2.7).

Таким образом, из первого уравнения (1.13) имеем:

$$L^* = e^{-\int_0^t \frac{b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*)}{l_2} dt} \left[L_2(\sigma_1, \sigma_2) + \Phi_2 \right];\ \Phi_2 = \int_0^t \frac{\rho_2}{l_2} e^{\int_0^t \frac{b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*)}{l_2} dt} dt, \quad (2.11)$$

где

$$d\sigma_1 = \mu_1 (l_2 d\xi - dt);\ d\sigma_2 = \overline{\mu}_1 (dt - l_2 d\eta),$$

согласно первому условию (1.2)

$$L_2(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi_0(x, y). \quad (2.11)_1$$

В симметричной форме второго уравнения (2.10) отсутствует элемент времени dt. Поскольку его присутствие представляет в дальнейшем необходимость, то упомянутую форму заменяем равносильной:

$$d\xi + dt = \frac{d\eta + c_3 dt}{c_3} = \frac{dv^*}{\rho_1 - \dfrac{\rho_2}{l_2} - \left(d_3 - \dfrac{1}{l_1 l_2 a} \right) v^*}.$$

Равенство первых двух членов очевидно. Знак равенства третьего члена сохраняется за счет функции v^*. Следовательно,

$$v^* = e^{-\int_0^{\xi^*} \left(d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a} \right) d\xi^*} \left[C(\sigma^*) + \int_0^{\xi^*} \frac{1}{l_1 a} \left(\rho_1 - \frac{\rho_2}{l_2} \right) e^{\int_0^{\xi^*} \left(d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a} \right) d\xi^*} d\xi^* \right] \quad (2.12)$$

и удовлетворяет второму уравнению (2.10), где $C(\sigma^*)$ неизвестна,

$$d\xi^* = d\xi + dt;\ d\eta^* = \frac{d\eta}{c_3} + dt;\ d\sigma^* = d\xi^* + \frac{d\eta^*}{c_3}.$$

На основании (2.12), (2.11) и тождества, следующего из первого уравнения (2.8),

$$e^{\int_0^t \frac{b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*)}{l_2} dt} = \frac{1}{l_1 a} e^{\int_0^{\xi^*} \left(d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a}\right) d\xi^*},$$

третье уравнение (2.10) представляем так:

$$-l_2 \frac{\partial(\Phi_2 + L_2)}{\partial t} + b_3(\Phi_2 + L_2) = \frac{1}{l_1 a}\left[C(\sigma^*) + \int_0^{\xi^*} \frac{\rho_1}{l_1 a} e^{\int_0^{\xi^*} (d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a}) d\xi^*} d\xi^* - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\xi^*} \frac{1}{l_1 a} \frac{\rho_2}{l_2} e^{\int_0^{\xi^*} (d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a}) d\xi^*} d\xi^* \right] - l_2 \frac{\partial[\Phi_2 + L_2]}{\partial t} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial t},$$

или

$$\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right)(\Phi_2 + L_2) = \frac{1}{l_1 a}\left[C(\sigma^*) + \Phi_1 + L_2 - \xi \left(\frac{\rho_2}{l_2} e^{\int_0^t \frac{b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_2^*)}{l_2} dt} \right)_{\xi_1} \right], \quad (2.13)$$

где $\xi_1 :\ t < \xi_1 < \xi^*$,

$$\Phi_1 = \int_0^{\xi^*} \frac{\rho_1}{l_1 a} e^{\int_0^{\xi^*} \left(d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a}\right) d\xi} d\xi .$$

Понятно, что с изменением t и ξ^* меняется ξ_1. Поэтому примем:

$$\frac{\partial \Phi_{\xi_1}}{\partial \xi_1} = \left(\frac{\rho_2}{l_2} e^{\int_0^t \frac{b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*)}{l_2} dt} \right)_{\xi_1}.$$

Тогда из очевидного тождества $\Phi_2 = \overline{\Phi}_2 + \Phi_2 - \overline{\Phi}_2$ (2.13) представляем:

$$\begin{cases} \left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right)\left[\Phi_2 + L_2 + \Phi_\xi\right] = -\frac{1}{l_1 a}\left(C(\sigma^*) + \Phi_1 + L_2\right) + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial t} + \frac{1}{l_1 a} L_2, \\ \frac{\partial \Phi_{\xi_1}}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\xi}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right)\Phi_{\xi_1} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из этих двух уравнений соответственно имеем:

$$\begin{cases} \Phi_2 + L_2 = \dfrac{C(\sigma^*) + \Phi_1 + l_1 l_2 a \dfrac{\partial L_2}{\partial x} + L_2}{l_1 a b_3 + 1} - e^{\int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right) d\xi} \\ \Phi_{\xi_1} = e^{\int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right) d\xi_1}. \end{cases} . \qquad (2.15)$$

В силу обозначения (2.11)

$$\rho_2 = l_2 \left[\frac{C_1(\sigma^*) + \Phi_1 l_1 l_2 a \dfrac{\partial L_2}{\partial t} + L_2}{l_1 a b_3 + 1} - e^{\int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right) d\xi_1} - \frac{\partial L_2}{\partial t} \right] e^{-\int_0^t \frac{b_3 - l_1 l_2 a d_3 (b_3 - b_3^*)}{l_2} dt}, \qquad (2.15)_0$$

где $C_1(\sigma^*)$ определяет общее значение Φ_2 и Φ_{ξ_1} в точке ξ_1,

$$C_1(\sigma^*) = (l_1 a b_3 + 1)_{\xi_1} \left\{ -\frac{\Phi_1 + l_1 l_2 a \dfrac{\partial L_2}{\partial t} + L_2}{l_1 a b_3 + 1} + e^{\int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right) d\xi_1} + \frac{\partial L_2}{\partial t} - b_3 - \frac{1}{l_1 a} \right\}_{\xi_1} .$$

Таким образом, установлением $(2.15)_1$ обеспечена эквивалентность систем (2.9) и (2.10). Далее необходимо еще доказать эквивалентность систем (2.6) и (2.7). Так как система (2.10) имеет решение, то система (2.7) получает упрощение [7],

$$\begin{cases} l_1 a \dfrac{\partial^2 L^*}{\partial x \partial y} + l_1 (b - \lambda - \lambda_3) \left(\lambda_1 \dfrac{\partial L^*}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial L^*}{\partial y} \right) + \lambda_3 L^* + \dfrac{\partial L^*}{\partial t} = \rho_1, \\ \dfrac{\partial \text{€}}{\partial t} + \left(b - \lambda - \lambda_3 - \dfrac{1}{\lambda_1} \right) \text{€} = \rho - \dfrac{\rho_1}{l_1}, \\ \dfrac{\partial L^*}{\partial t} + \lambda_3 L^* = \text{€}, \end{cases} \qquad (2.14)_1$$

где первое уравнение уже исследовано (см. $(2.7)_1$ или систему (2.9)). Напоминаем, выполнимость третьего уравнения доказывает эквивалентность упомянутых систем, которая осуществляется через ρ_1.

В связи с этим ρ_1 вернемся к (2.15) и перепишем ее так:

$$\Phi_2 + L_2 = e^{\int_0^t \frac{1}{l_2}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right) dt} (L_1 + \Psi_1), \qquad (2.15)_1$$

где

$$\Psi_1 = \int_0^t \frac{\Phi_1}{l_1 l_2 a} e^{-\int_0^t \frac{1}{l_2}\left(b_3 + \frac{1}{l_1 a}\right) dt} dt; \quad \Phi_1 = \int_0^{\xi^*} \frac{\rho_1}{l_1 a} e^{\int_0^{\xi^*} \left(d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a}\right) d\xi^*} d\xi^*, \qquad (2.15)_2$$

$$L_1 = \frac{L_2}{1+e^{\int\limits_0^{\xi_1} \frac{l_1 a}{\xi}\left(b_3-\frac{1}{l_1 a}\right)d\xi}} - \int\limits_0^t \frac{1}{l_1 l_2 a}\left(C(\sigma^*)+L_2\right)e^{-\int\limits_0^t \frac{1}{l_2}\left(b_3+\frac{1}{l_1 a}\right)dt}dt - e^{-\int\limits_0^t \frac{1}{l_2}\left(b_3+\frac{1}{l_1 a}\right)dt}\,\overline{\Phi}_2 .$$

Итак, первую формулу (2,11), то есть решения первого уравнения (2.14) и второго уравнения, представленные в форме

$$L^* = e^{\int\limits_0^t\left(l_1 a d_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1 l_2 a}\right)dt}(L_1+\Psi_1), \qquad (2.16)$$

$$\text{€}(x,y,t) = e^{-\int\limits_0^t (b-\lambda-\lambda_3-\frac{1}{\lambda_1})dt}\left[\text{€}(x,y)+\int\limits_0^t\left(\rho-\frac{\rho_1}{l_1}\right)e^{\int\limits_0^t\left(b-\lambda-\lambda_3-\frac{1}{\lambda_1}\right)dt}dt\right], \qquad (2.16)_1$$

на основании тождеств,

$$\begin{cases} l_1 e^{\int\limits_0^t \frac{b_3-l_1 l_2 a d_3(b_3-b_3^*)}{l_2}dt} = \frac{1}{a_2}e^{\int\limits_0^{\xi^*}\left(d_3-\frac{1}{l_1 l_2 a}\right)dt}, \\ e^{\int\limits_0^t (b-\lambda-\lambda_3-\frac{1}{\lambda_1})dt} = \frac{1}{a_2}e^{\int\limits_0^{\xi^*}\left(d_3-\frac{1}{l_1 l_2 a}\right)d\xi^*}, \end{cases} \qquad (2.17)$$

следующих из (2.8), третье уравнение переводятся к виду:

$$\frac{\partial(\Psi_1+L_1)}{\partial t}+\left[l_1 a d_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1 l_2 a}+\lambda_3\right](\Psi_1+L_1) = e^{-\int\limits_0^t \frac{1}{l_2}\left(b_3+\frac{1}{l_1 a}\right)dt}\frac{1}{l_1}\left(\text{€}_0(x,y)+\Phi-\Phi_1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\rho_1}{l_1 a}e^{\int\limits_0^{\xi^*}(d_3-\frac{1}{l_1 l_2 a})d\xi^*}\right)\right);\ \Phi = \int\limits_0^t \rho e^{\int\limits_0^t (b-\lambda-\lambda_3-\frac{1}{\lambda_1})dt}dt,\ \Phi_1 = \int\limits_0^t \frac{\rho_1}{l_1}e^{\int\limits_0^t\left(b-\lambda-\lambda_3-\frac{1}{\lambda_1}\right)dt}dt, \qquad (2.17)_1$$

или, приняв во внимание обозначение Ψ_1 (см. $(2.15)_2$), окончательно будем иметь:

$$\frac{\partial(\Psi_1+L_1)}{\partial t}+\frac{l_1 a d_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1 l_2 a}+\lambda_3}{1+l_2 a}(L_1+\Psi_1) = L_0, \qquad (2.17)_2$$

где

$$L_0 = \frac{l_2 a}{1+l_2 a}\frac{\partial L_1}{\partial t}+\frac{1}{l_1(1+l_2 a)}e^{-\int\limits_0^t\left(b_3+\frac{1}{l_1 l_2 a}\right)dt}\left[\text{€}_0(x,y)+\Phi\right].$$

Следовательно, из $(2.17)_2$ $L_1+\Psi_1$ имеет вид

$$\Psi_1 + L_1 = e^{-\int_0^t \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 + l_2 a} dt} \left[\Psi_0(x,y) + \int_0^t L_0 e^{\int_0^t \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 + l_2 a} dt} dt \right] \quad (2.18)$$

причем, при $t = 0$ неизвестная $\Psi_0(x,y) = L_1\big|_{t=0}$. Другую неизвестную $\text{€}_0(x,y)$, входящую в L_0, нужно определить из условия (1.2). То есть, обе части (2.18) дифференцируем по t и в результате допускаем $t = 0$, получим:

$$\text{€}(x,y) = F(x,y) l_1 (1 + l_2 a) + (l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3 - l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*)(1 + l_2 a)) L_1 + $$
$$+ l_2 a \frac{\partial L_2}{\partial t}.$$

И, наконец, представилась возможность определить ρ_1. В частности, вернувшись к обозначениям $(2.15)_2$, легко заметить, что

$$\rho_1 = l_1 a e^{-\int_0^{\xi^*} \left(d_3 - \frac{1}{l_1 l_2 a} \right) d\xi^*} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial (\Psi_1 + L_1)}{\partial t} - \frac{\partial L_1}{\partial t} \right) l_1 l_2 a e^{\int_0^t \frac{1}{l_2} (b_3 + \frac{1}{l_1 a}) dt} \right]. \quad (2.19)$$

Тем самым доказана эквивалентность систем (2.6) и (2.7), или выполнимость первого уравнения системы (2.3). Чтобы установить эквивалентность систем (2.2) и (2.3) нужно рассмотреть последние два уравнения системы (2.3). Так как ρ содержится в L_0 (см. $(2.17)_1$), то первую формулу (2.18) представляем в форме

$$\Psi_1 + L_1 = \left(\Psi + \text{€} \right) e^{-\int_0^t \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 - l_2 a} dt}, \quad (2.20)$$

где поскольку ρ содержится в Φ (см. $(2.17)_1$), то через Ψ обозначили

$$\Psi = \int_0^t \frac{\Phi}{l_1 (1 - l_2 a)} e^{-\int_0^t \frac{1}{l_2} \left(b_3 + \frac{1}{l_2 a} \right) dt + \int_0^t \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 - l_2 a} dt} dt, \quad (2.21)$$

$$\text{€} = C_1(x,y) + \int_0^t R\, e^{\int_0^t \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 - l_2 a} dt} dt, \quad C_1(x,y) = L_1\big|_{t=0},$$

$$R_0 = \frac{\text{€}_0(x,y) - l_1 l_2 a \frac{\partial L_1}{\partial t} e^{\int_0^t \frac{1}{l_2} \left(b_3 + \frac{1}{l_1 a} \right) dt}}{l_1 (1 - l_2 a)} e^{-\int_0^t \frac{1}{l_2} \left(b_3 + \frac{1}{l_1 a} \right) dt},$$

причем € и R_0 – вполне определенные функции. Из второго уравнения системы (2.3) для v строим:

$$v = e^{-\int_0^t (\lambda - \frac{1}{l}) dt} \left[v_0(x,y) + \int_0^t (g - \frac{\rho}{l}) e^{\int_0^t (\lambda - \frac{1}{l}) dt} dt \right],$$

где $v_0(x,y)$ – неизвестна, l – решение уравнения (2.3)₁, из выполнимости которого следует:

$$\frac{1}{l} e^{\int_0^t \left(\lambda - \frac{1}{l}\right) dt} = e^{\int_0^t (b - \lambda - \lambda_3 - \frac{1}{\lambda_1}) dt},$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_3$ – известны. В дальнейшем важно знать ρ через Ψ. Поэтому из обозначения $(2.17)_1$ и формулы (2.21) записав ρ через Ψ, а L^* через $\Psi + \text{€}$ (см. (2.16) и (2.18)),

$$\rho = e^{-\int_0^t \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 - l_2 a} dt} \left(l_1(1 - l_1 a) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \left\{ \frac{\partial [l_1 (1 - l_2 a)]}{\partial t} + l_1 (1 - l_2 a) \left[\frac{1}{l_1} \quad (b_3 + \frac{1}{l_1 a}) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3}{1 - l_2 a} \right] \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right), \tag{2.22}$$

$$L^* = (\Psi + \text{€}) e^{-\int_0^t \frac{l_2 a \left[l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} + \lambda_3 \right]}{1 - l_2 a} dt}, \tag{2.23}$$

третье уравнение системы (2.3), после приведения подобных членов, относительно $\Psi + \text{€}$ приводимо к виду:

$$\frac{\partial^2 (\Psi + \text{€})}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial (\Psi + \text{€})}{\partial t} + b_4 \frac{\partial (\Psi + \text{€})}{\partial x} + c_4 \frac{\partial (\Psi + \text{€})}{\partial y} + d_4 (\Psi + \text{€}) = g_4, \tag{2.24}$$

где

$$a_4 = \frac{N^*}{l_1(1 - l_2 a)}; b_4 = \frac{l\lambda(c_1 - c_1^*)}{l_1(1 - l_2 a)}; c_4 = \frac{l\lambda(d_1 - d_1^*)}{l_1(1 - l_2 a)}; d_4 = \frac{l\lambda M^*}{l_1(1 - l_2 a)};$$

$$g_4 = \frac{\partial^2 \text{€}}{\partial t^2} + \frac{N^*}{l_1(1 - l_2 a)} \frac{\partial \text{€}}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{ll_1(1-l_2a)}e^{\int_0^t\left(\frac{l_2a\left[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1l_2a}\right]+\lambda_3}{1-l_2a}dt-b+\lambda+\lambda_3+\frac{1}{\lambda_1}\right)dt}\times\left[v_0(x,y)+\int_0^t ge^{\int_0^t(\lambda-\frac{1}{l})dt}dt\right],$$

$$N^*=\frac{\partial[l_1(1-l_2a)]}{\partial t}+\frac{l_1(1-l_2a)}{l_2}\left(b_3+\frac{1}{l_2a}\right)-l_1\left[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1l_2a}+\lambda_3\right]+$$

$$+\frac{l_1(1-l_2a)}{l}e^{\int_0^t\left[\frac{1}{l_2}\left(b_3+\frac{1}{l_2a}\right)-\left(b-\lambda-\lambda_3-\frac{1}{\lambda_1}\right)\right]dt}.$$

$$M^*=e_1-e_1^*-(c_1-c_1^*)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\frac{l_2a\left[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1l_2a}\right]+\lambda_3}{1-l_2a}dt-$$

$$-(d_1-d_1^*)\frac{\partial}{\partial y}\int_0^t\frac{l_2a\left[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1l_2a}\right]+\lambda_3}{1-l_2a}dt.$$

3. Об эквивалентности систем (2.2) и (2.3).

Уравнение (2.24) есть частный случай первого уравнения системы (2.2) (когда $a=0$). Повторяя проведенные там рассуждения, (2.24) приведем к системе уравнений [4,7],

$$\begin{cases}\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial t}+\lambda_3^*(\Psi+\hat{E})=\omega,\\ \frac{\partial\omega}{\partial t}+\lambda_4^*\left(\omega+\lambda_1^*\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial x}+\lambda_2^*\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial y}\right)=g_4,\end{cases}\tag{3.1}$$

или, в виде удобном для исследования,

$$\begin{cases}\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial t}+l^*b_4\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial x}+l^*c_4\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial y}+\lambda_3^*(\Psi+\hat{E})=\rho^*,\\ \frac{\partial\omega}{\partial t}+\left(\lambda_4^*+\frac{1}{\lambda_1^*}\right)\omega=g_4-\frac{\rho^*}{l^*},\\ -l^*b_4\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial x}-l^*c_4\frac{\partial(\Psi+\hat{E})}{\partial y}+\rho^*=\omega,\end{cases}\tag{3.2}$$

где ρ^* – решение третьего уравнения. Из первых двух равенств следует:

$$\begin{cases} \Psi + \text{€} = e^{-\int\limits_0^t \lambda_3^* dt}\left[\Psi_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*) + \Phi^*\right], \\ \omega = e^{-\int\limits_0^t \left(\lambda_4^* - \frac{1}{l^*}\right)dt}\left[\omega_0(x,y) + \int\limits_0^t \left(g_4 - \dfrac{\rho^*}{l^*}\right) e^{\int\limits_0^t \left(\lambda_4^* - \frac{1}{l^*}\right)dt}\right], \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\Phi^* = \int\limits_0^t \rho^* e^{\int\limits_0^t \lambda_3^* dt} dt\,, \tag{3.3)$_1$ (}$$

l^* – решение уравнения

$$\frac{\partial l^*}{\partial t} + (\lambda_3^* - \lambda_4^*) l^* + 1 = 0 \qquad (l\,|_{t=0} = 1)$$

и сопровождается тождеством

$$\frac{1}{l^*} e^{\int\limits_0^t \left(\lambda_4^* - \frac{1}{l^*}\right)dt} = e^{\int\limits_0^t \lambda_3^* dt}\,,$$

а λ_3^* удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{\partial \lambda_3^*}{\partial t} - \lambda_3^{*\,2} + a_4 \lambda_3^* = d_4\,,$$

$$\lambda_4^* = a_4 - \lambda_3^*;\ \ \lambda_2^* = \frac{c_4}{\lambda_4^*};\ \lambda_1^* = \frac{b_4}{\lambda_4^*};\ d\sigma_1^* = \mu_4^*(dx - l^* d_4 dt);\ \ d\sigma_2^* = \overline{\mu}_4[dy - l^* c_4 dt]\,.$$

Согласно (3.3) третье равенство (3.2) приводимо:

$$\frac{\partial(\Phi^* + \Psi_0)}{\partial t} - l^* b_4 \frac{\partial(\Phi^* + \Psi_0)}{\partial x} - l^* c_4 \frac{\partial(\Phi^* + \Psi_0)}{\partial y} + M^*(\Phi^* \Psi_0) = L_0^{**}, \tag{3.4}$$

где

$$L_0^{**} = \frac{1}{l^*}\left[\omega_0(x,y) + \int\limits_0^t g_4 e^{\int\limits_0^t (\lambda_4^* - \frac{1}{l^*} dt)} dt\right] + \left[(l^* + 1)\left(b_4 \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t \lambda_3^* dt + c_4 \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^t \lambda_3^* dt\right) + \frac{1}{l^*}\right]\Psi_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$$

$$M^* = l^*\left(b_4 \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t \lambda_3^* dt + c_4 \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^t \lambda_3^* dt\right) + \frac{1}{l^*};\quad \Psi_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*)\Big|_{t=0}\ \text{€}|_{t=0}$$ (см.(2.21)$_1$ и (2.18)$_1$)

Из уравнения (3.4) записываем:

$$\Phi^* + \Psi_0 = e^{-\int\limits_0^t M^* dt}\left[\Phi_0^*(\tau_1^*, \tau_2^*) + \int\limits_0^t L_0^{**} e^{\int\limits_0^t M^* dt} dt\right], \tag{3.5}$$

где $\Phi_0^*(\tau_1^*, \tau_2^*)\Big|_{t=0} = \Psi_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \text{€}$, $d\tau_1^* = \mu_4^*(dx + l^* b_4 dt)$; $d\tau_4 = \overline{\mu}_4^*(dy + l^* c_4)$.

Этим доказана эквивалентность систем (3.2) и (3.1). Итак, из обозначения $(3.3)_1$ и формулы (3.5) для ρ^* получим.

$$\rho^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} e^{-\int\limits_0^t \lambda_3^* dt}, \tag{3.5_1}$$

где под $\dfrac{\partial \Phi^*}{\partial t}$ подразумевается определенная из (3.5) частная производная.

Таким образом, из выполнимости (3.4) следует эквивалентность систем (3.2) и (3.1); из выполнимости системы (3.1) следует выполнимость уравнения (2.24). Но выполнимость (2.24) дает эквивалентность систем (2.2) и (2.3); то есть, выполнимость исходного уравнения (1.1).

Последовательное построение ρ^*, ρ, ρ_1 и ρ_2 (см. соответственно $(3.5)_1$, (2.22), (2.19) и $(2.15)_0$) и построение соответствующих функций: $\Phi_2 + L_2$; $\Psi_1 + L_1$ (или Φ_1 $(2.15)_2$); $\Psi + €$ и $\Phi^* + \Psi_0$ с соответствующими формулами (2.15), (2.18), (3.3) и (3.5), нас привели к построению L^*,

$$L^* = e^{-\int\limits_0^t \left(\frac{l_2 a \left[l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a} \right] + \lambda_3}{1 - l_2 a} + \lambda_3^* + M^* \right) dt} \int\limits_0^t \frac{1}{l^*} e^{\int\limits_0^t M^* dt} \left(\omega_0(x,y) + v_0(x,y) \int\limits_0^t R^* e^{\int\limits_0^t \lambda_3^* dt} dt \right) dt + $$
$$+ w_1, \tag{3.6}$$

где

$$w_1 = e^{-\int\limits_0^t (\lambda_3^* + M^*) dt} \left(\Phi_0^*(\tau_1^*, \tau_2^*) + \int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t M^* dt} \left[w_0 + \frac{1}{l^2} \int\limits_0^t K^* e^{\int\limits_0^t \lambda_3^* dt} dt \right] dt \right),$$

$$K^* = \frac{\partial^2 L^*}{\partial t^2} + \frac{N^*}{l_1(1 - l_2 a)} \frac{\partial L^*}{\partial t} + \left(\int\limits_0^t q e^{\int\limits_0^t (\lambda - \frac{1}{l}) dt} dt \right) \frac{1}{l l_1 (1 - l_2 a)} \times$$
$$\times e^{\int\limits_0^t \left(\frac{l_2 a [l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a}] + \lambda_3}{1 - l_2 a} - b + \lambda + \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1} \right) dt};$$

$$R^* = \frac{1}{l l_1 (1 - l_2 a)} e^{\int\limits_0^t \left(\frac{l_2 a [l_1 a d_3 (b_3 - b_3^*) + \frac{1}{l_1 l_2 a}] + \lambda_3}{1 - l_2 a} - b + \lambda + \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1} \right) dt};$$

$$w_0 = \left[(l^* + 1) \left(b_4 \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^t \lambda_3 dt + c_4 \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^t \lambda_3^* dt \right) \right] \Psi_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*); \quad g_4 = K^* + v_0(x,y) R^*.$$

$$L^* |_{t=0} = w_1 = \Phi_0^*(\tau_1^*, \tau_2^*) = \varphi_0(x,y),$$

удовлетворяющей уравнению (1.1) и условиям (1.2). Поскольку $\omega_0(x,y)$ и $v_0(x,y)$ – произвольные функции, то не будет большим ограничением, если считать, что $v_0(x,y)=\omega_0(x,y)$. Параллельно с этим замечаем, что

$$\frac{\partial L^*}{\partial t}=-\left(\frac{l_2a[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\dfrac{1}{l_1l_2a}]+\lambda_3}{1-l_2a}+\lambda_3^*+M^*\right)L^*+$$

$$+e^{-\int\limits_0^t\left(\frac{l_2a[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\frac{1}{l_1l_2a}]+\lambda_3}{1-l_2a}+\lambda_3^*+M^*\right)dt}\times\left(\frac{1}{l^*}e^{\int\limits_0^t M^*dt}\omega(x,y)\left[1+\int\limits_0^t R^*e^{\int\limits_0^t\lambda_3^*dt}dt\right]+\frac{\partial w_1}{\partial t}\right).$$

Отсюда при $t=0$ следует:

$$\left.\frac{\partial L^*}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left(\frac{l_2a[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\dfrac{1}{l_1l_2a}]+\lambda_3}{1-l_2a}+\lambda_3^*+M^*\right)\Phi_0^*(\tau_1^*,\tau_2^*)+\frac{\omega_0(x,y)}{l^*}+\frac{\partial w_1}{\partial t},$$

или, устремив (x,y) к граничной точке (x^*,y^*) на Г, с учетом условия (1.3) будем иметь

$$\omega_0(x^*,y^*)=l^*F(x^*,y^*)+l^*\Phi_0^*(\tau_1^*,\tau_2^*)\left(\frac{l_2a[l_1ad_3(b_3-b_3^*)+\dfrac{1}{l_1l_2a}]+\lambda_3}{1-l_2a}+\lambda_3^*+M^*\right)-l^*\frac{\partial w_1}{\partial t}$$

$$\text{на } \Gamma\,. \qquad (3.7)$$

Полагается, что $\omega_0(x,y)$ – гармоническая внутри D и непрерывная вплоть до Г. Тогда (3.7) будут предельными значениями гармонической функции изнутри. Построение гармонической функции внутри D по заданным ее значениям вдоль контура Г есть хорошо известная внутренняя задача Дирихле.

Таким образом, решение плоской динамической задачи термоупругости в компонентах смещения приведено к построению функции L^*, являющейся решением линейного уравнения в частных производных третьего порядка (1.1), оно определяется формулой (3.6), удовлетворяет (1.1), начальным условиям (1.2) и краевому условию (1.3); через нее компоненты смещения выражаются формулой

$$u=K+e^{-N}(\overline{L}_1-L^*),\quad u^*=\overline{K}+e^{-\overline{N}}(L_1+L^*), \qquad (3.8)$$

где $K,\overline{K},N,\overline{N},\overline{L}_1$ и L_1 – заданные функции, а L^* дается формулой (2.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 518 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1975. – 872 с.
4. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч.II. – Владикавказ: Из-во. СОГУ, 2004. – С.116.
5. Чочиев Т.З. Взаимодействие полей деформации и температуры при распространении температурного возмущения // Вестник Харьковского университета, 2007. № 775. Вып.7. С. 246-257.
6. Чочиев Т.З. О плоской динамической задаче в компонентах смещения // Труды XIV международного симпозиума МДОМФ-2009. Ч.2. – Харьков-Херсон. – С.446-449.
7. Чочиев Т.З. Термоупругость и линейные уравнения в частных производных высшего порядка // Вестник Харьковского нац. университета, №780, 2007. – С.175-186.

Надійшла у першій редакції 12.06.2009, в останній - 08.07.2009.