УДК 519.6

Об одной краевой задаче теории нестационарного переноса на графе

Ю. А. Гладышев

Калужский государственный педагогический университет им. Циолковского, Россия

Представлено построение решения краевой задачи на графе с циклами. Использован метод построения рядов Фурье. Рассмотрены некоторые примеры.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, задача Неймана, краевая задача на графе, ациклічній граф, ряд Фурье.*

Надано побудову розв'язку граничної задачі на графі з циклами. Викорис тано метод побудови рядів Фур'є. Розглянуто певні приклади.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, задача Неймана, крайова задача на графі, ациклічний граф, ряд Фур'є.*

The construction of solutions of boundary value problems on graphs with cycles is presented. The method of generalized Fourier development is used. Some special examples are considered.

Keywords: *heat equation, Neumann problem, boundary value problem on a graph, acyclic graph, Fourier series.*

Многие задачи теории переноса в сложных системах приводят к необходимости найти решение с особенностью на геометрическом графе. Таковыми являются задачи оребрения труб, конструирование различных радиаторов при решении задач теплопроводности. Технологические задачи создания материалов с заданными свойствами приводят к необходимости искать решения задач диффузии в системах контактирующих элементов. Аналогичные задачи возникают при изучении движения электрического тока в сетях, особенно с точки зрения выделения тепла.

В математических руководствах [1], [2], посвященных теории решения краевых задач на геометрическом графе доказано существование решений с особенностями в любой точке графа.

Наибольшую трудность при построении фундаментального решения представляет наличие циклов, то есть замкнутых контуров. С точки зрения приложений этот случай наиболее интересен.

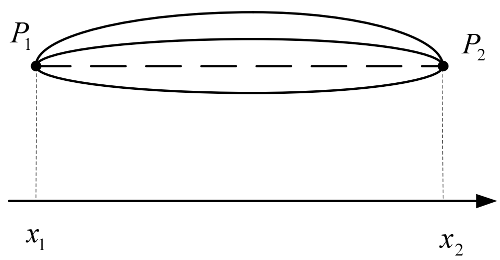

Рис.1. Пучок стержней.

В работе рассмотрен случай S циклов и дан конкретный способ построения решения с особенностью. Рассмотрен один из методов, состоящий в использовании разложения в обобщенный ряд Фурье на графе. При построении решения использовано представление основных функций в виде ряда по обобщенным степеням Берса.

В работе дан метод решения краевых задач типа Неймана (задача N) для пучка стержней, соединенных в своих концах (рис.1). Обратим внимание, что задача Дирихле для такой системы легко сводится к задачам Дирихле для одного стержня.

Для общности считаем, что общее количество ребер графа равно S. Для процесса переноса на каждом ребре задан потенциал процесса $\varphi^{(i)}(x,t), i=1,..,S$, подчиненный уравнению параболического типа, определяющего диссипативный процесс:

$$a_{2i}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{1i}(x)\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial x}\right)=\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial t} \quad . \tag{1}$$

Здесь a_{1i}, a_{2i} функции от x, определяющие физические свойства стержней, а t – время. В случае задачи теплопроводности имеем:

$\varphi^{(i)}=T^{(i)}$, где $T^{(i)}$ – температура i-го стержня и

$$a_{11}=\frac{K_iS_i}{H_i},\ a_2=\frac{1}{C_i\rho_iH_i}, \tag{2}$$

где $K_i, S_i, C_i, \rho_i, H_i$ - коэффициент теплопроводности, площадь сечения, теплоемкость, плотность и коэффициент Ламе для i-го стержня.

На границах в точках P_1, P_2 примем условие отсутствия суммарного внешнего потока:

$$-\sum_{i=1}^{S}a_{1i}\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|_{x_1}=-\sum_{i=1}^{S}a_{1i}\left.\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x}\right|_{x_2}=0\,. \tag{3}$$

Таким образом, поставленная задача является задачей Неймана, мало исследованная в математической постановке. В отличие от задачи D, как это уже говорилось, которая решается без трудностей и сводится к известной задаче для одного стержня, построение задачи N нетривиально.

Начальные условия состоят, как обычно в задании значения начального потенциала как функции координаты:

$$\varphi_i\big|_{t=0}=f_i(x),\ \ i=1,...,N. \tag{4}$$

Поскольку поставлена задача получения фундаментального решения, то будем иметь дело в основном когда f_1 задано δ-функцией, а на остальных ребрах начальные значения потенциала равно нулю.

Решение поставленной задачи будем искать в виде обобщенного ряда Фурье:

$$\varphi^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}C_nU_n^{(i)}(x)e^{-\lambda_n^2t} \quad . \tag{5}$$

При соответствующем данном ниже методе нахождения коэффициентов C_n. С этой целью на графе задано естественное определение скалярного произведения как суммы интегралов по всем ребрам с весом a_{2i}^{-1}.

Частное решение ищем в виде:

$$\varphi^{(i)}(x,t) = U^{(i)}(x)e^{-\lambda^2 t}. \qquad (6)$$

Используя аппарат рядов Берса [2] запишем $U^{(i)}$ в виде:

$$U^{(i)} = A_i \cos\lambda X(x,x_1) + B_i \sin\lambda X(x,x_1),\ i = 1,...,S. \qquad (7)$$

Из условия согласования в точках x_1 и x_2 следует равенство потенциалов. Отсюда имеем:

$$A_1 = A,\ i = 2,...,S, \qquad \text{и} \qquad (8)$$

$$A\cos\lambda X_1(x_2,x_1) + B_1 \sin\lambda X_1(x_2,x_1) = A\cos\lambda X_i(x_2,x_1) + B_i \sin\lambda X_i(x_2,x_1) \quad (9)$$

Условие (3) для потока дает еще два уравнения:

$$B_1 + B_2 + ... + B_S = 0, \qquad (10)$$

$$-A\sum_{i=1}^{S} \sin\lambda\widetilde{X}_i(x_2,x_1) + \sum_{i=1}^{S} B_i \cos\lambda\widetilde{X}_i(x_2,x_1) = 0. \qquad (11)$$

Для определения $S+1$ неизвестных постоянных $A, B_1,..., B_S$ имеем равные $S+1$ линейных уравнений. Поскольку система однородна, то для наличия нетривиального решения необходимо потребовать обращение в нуль определителя системы. Поэтому укажем структуру этого определителя. Обозначим элементы определителя как a_{ij}. Элементы первой строки имеют значения:

$$a_{11} = 0,\ a_{1i} = 1,\ i = 2,...,S+1. \qquad (12)$$

Первый столбец составлен как:

$$a_{k1} = \cos\lambda X_1(x_2,x_1) - \cos\lambda X_k(x_2,x_1),\ k = 2,...,S, \qquad (13)$$

$$a_{(B+1)1} = -\sum_{i=1}^{S} \sin\lambda\widetilde{X}_i(x_2,x_1). \qquad (14)$$

Остальные элементы последней строки запишем как:

$$a_{(S+1)i} = \cos\lambda\widetilde{X}_{i-1},\quad i = 2,...,S+1. \qquad (15)$$

Основную часть занимает полоса диагональных элементов вида:

$$a_{ik} = \sin\lambda X_i(x_2,x_1),\ i = k,\ i = 2,...,S, \qquad (16)$$

$$a_{ik} = \sin\lambda X_i(x_2,x_1),\ i = 2,...,S,\ k = i+1. \qquad (17)$$

Остальные элементы определителя исчезают.

Условие равенства определителя нулю является основным уравнением для определения собственных значений.

Приведем ряд примеров. Если $S = 1$, то получим обычное условие для определения λ для одного стержня:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\lambda\widetilde{X}_1(x_1,x_2) & \cos\lambda X_1(x_1,x_2) \end{vmatrix} = -\sin\lambda\widetilde{X}_1(x_2,x_1) = 0. \qquad (18)$$

В системе двух стержней, которые как видно дают пример цикла, значения λ определены трансцендентным уравнением вида:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\lambda X_1 - \cos\lambda X_2 & \sin\lambda\widetilde{X}_1 & -\sin\lambda X_2 \\ -\sin\lambda\widetilde{X}_1 - \sin\lambda\widetilde{X}_2 & \cos\lambda\widetilde{X}_1 & \cos\lambda\widetilde{X}_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Для системы трех стержней, включающей три цикла, выражение становится более сложным:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\lambda X_1 - \cos\lambda X_2 & \sin\lambda X_1 & -\sin\lambda X_2 & 0 \\ \cos\lambda X_2 - \cos\lambda X_3 & 0 & \sin\lambda X_2 & -\sin\lambda X_3 \\ -\sum_{i=1}^{3}\sin\lambda\widetilde{X}_i & \cos\lambda\widetilde{X}1 & \cos\lambda\widetilde{X}_2 & \cos\lambda\widetilde{X}_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Другой, более простой способ построения основной системы состоит в выборе для каждого стержня решения в «каноническом» виде:

$$\varphi^{(i)} = A\frac{\sin\lambda X_i(x,x_2)}{\sin\lambda X_i(x_1,x_2)} + B\frac{\sin\lambda X_i(x,x_1)}{\sin\lambda X_i(x_1,x_2)}. \tag{21}$$

Очевидно, что условие непрерывности потенциалов процесса переноса в точках P_1, P_2 выполнено. Остается найти константы A, B таким образом, чтобы условие потоков (суммарной непрерывности) было выполнено. Если решение имеет вид (21), то потоки найдем из выражения D_1 производной:

$$\begin{aligned} I_{1i} &= -D_{1i}\varphi\big|_{x_1} = -A\frac{\lambda\cos\lambda\widetilde{X}_i(x_1,x_2)}{\sin\lambda X_i(x_1,x_2)} - B\frac{\lambda}{\sin\lambda X_i(x_2,x_1)} \\ I_{2i} &= -D_{1i}\varphi\big|_{x_2} = -A\frac{\lambda}{\sin\lambda X_i(x_1,x_2)} - B\frac{\lambda\cos\lambda\widetilde{X}_i(x_2,x_1)}{\sin\lambda X_i(x_2,x_1)} \end{aligned}. \tag{22}$$

Введем матрицу с элементами (матрицу проводимости):

$$\begin{aligned} P_{11}^{(i)} &= \frac{\lambda\cos\lambda X_i(x_2,x_1)}{\sin\lambda X_i(x_2,x_1)}, \quad P_{12}^{(i)} = -\frac{\lambda}{\sin\lambda X_i(x_2,x_1)} \\ P_{21}^{(i)} &= \frac{\lambda}{\sin\lambda X_i(x_2,x_1)}, \quad P_{22}^{(i)} = -\frac{\lambda\cos\lambda\widetilde{X}_i(x_2,x_1)}{\sin\lambda X_i(x_2,x_1)} \end{aligned}. \tag{23}$$

Поэтому запишем:

$$\left.\begin{aligned} A\sum_{i=1}^{S}P_{11}^{(i)} + B\sum_{i=1}^{S}P_{12}^{(i)} = 0 \\ A\sum_{i=1}^{S}P_{21}^{(i)} + B\sum_{i=1}^{S}P_{22}^{(i)} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Следовательно, для определителя примем:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{S} P_{11}^{(i)} & \sum_{i=1}^{S} P_{12}^{(i)} \\ \sum_{i=1}^{S} P_{21}^{(i)} & \sum_{i=1}^{S} P_{22}^{(i)} \end{vmatrix} = 0 . \tag{25}$$

Можно показать, это также следует из единственности решения поставленной задачи, что два выражения для нахождения собственных значений полностью эквивалентны.

После нахождения собственных значений необходимо найти связь значений A, B из однородной системы и записать решения. Далее следует провести нормировку решения, использую результаты работы [3].

Таким образом, остается, используя понятие скалярного произведения на графе, найти коэффициенты разложения заданных на ребрах графа функций.

Разложение имеет общий вид:

$$\varphi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{N_n} \varphi^{(i)} . \tag{26}$$

Для построения решения с особенностью возьмем в качестве исходных функций без ограничения общности:

$$f_1 = M\delta(x - x_0),\ f_i = 0,\ i \ge 2. \tag{27}$$

Поэтому для коэффициентов C_n разложение в ряд имеем:

$$C_n = \frac{M}{N_1 a_2^{(1)}(x_0)} \left[\frac{A \sin \lambda X_1(x_0, x_2)}{\sin \lambda (x_1, x_2)} + \frac{B \sin \lambda X(x_0, x_1)}{\sin \lambda X(x_2, x_1)} \right]. \tag{28}$$

Напомним, что если стержни однородны, то функции $\sin \lambda X_i$, $\cos \lambda X_i$ имеют вид:

$$\cos \lambda X_i(x, x_1) = \cos \lambda \widetilde{X}_i(x, x_1) = \cos \frac{1}{\sqrt{a_{1i} a_{2i}}} (x - x_1), \tag{29}$$

$$\sin \lambda X_i(x, x_1) = \sqrt{\frac{a_{2i}}{a_{1i}}} \sin \lambda \frac{x - x_1}{\sqrt{a_{1i} a_{2i}}} . \tag{30}$$

Приведем частный, но важный в практике случай, когда все стержни одинаковы по своим параметрам. Следовательно, система симметрична и это приводит к вырождению собственных значений, то есть совпадению ряда ранее различных собственных значений.

Тогда уравнения, определяющие процесс в стержне совпадают и имеют вид:

$$\frac{d^2 U^{(i)}}{dx^2} + \lambda^2 U^{(i)} = 0 . \tag{31}$$

Положим для простоты $x_1 = 0, x_2 = \pi$. Искомое решение, если взять первый вариант решения, имеет вид:

$$U^{(i)} = A_i \cos \lambda x + B_i \sin \lambda x . \tag{32}$$

Подстановка в определитель дает для собственного значения:

$\lambda = n, n = 0,1,...$.

Для коэффициентов $A, B_1,..., B_S$ имеем:

$$A \neq 0, B_i = 0; \quad A = 0, B_1 + B_2 + ... + B_s = 0. \tag{33}$$

Одному собственному значению соответствует S различных собственных функций. Однако, решения должны быть ортогонализированы. Приведем результат этой операции.

Имеем симметричное, то есть одинаковое на всех стержнях решение:

$$U_{n,0}^{(i)} = A\cos nx. \tag{34}$$

Остальные $S-1$ решений несимметричны. Если k – номер линейно независимого решения при данном n, а i – номер стержня (ребра), то система линейно независима и система ортогональных решений имеет вид:

$$U_{n,k}^{(i)} = \begin{cases} 0, i < k, \\ (S-i)\sin nx, i = k, \\ -\sin nx, i > k, k = 1,.., S-1. \end{cases} \tag{35}$$

Вместе с симметричным решением ($k = 0$) имеем ровно S линейно независимых решений.

Например, если $S = 3$, результат можно записать:

$$\begin{aligned} &U_0^{(i)} = A\cos nx, i = 1,2,3, \\ &U_1^{(i)} = 2B_1 \sin nx, \\ &U_i^{(2)} = U_1^{(3)} = -B_1 \sin nx, \\ &U_2^{(1)} = 0,\ U_2^{(2)} = B_2 \sin nx,\ U_2^{(3)} = -B_2 \sin nx. \end{aligned} \tag{36}$$

При наличии 4 параллельно соединенных стержней определим решение как:

$$\begin{aligned} &U_{n0}^{(i)} = A\cos nx, i = 1,2,3,4. \\ &\left.\begin{aligned} U_{n1}^{(1)} &= 3B_1 \sin nx \\ U_{n1}^{(2)} = U_{n1}^{(3)} = U_{n1}^{(4)} &= -B_2 \sin nx \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} U_{n2}^{(1)} &= 0 \\ U_{n2}^{(2)} &= 2B_2 \sin nx \\ U_{n2}^{(3)} = U_{n2}^{(4)} &= -B_2 \sin nx \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} U_{n3}^{(1)} &= 0 \\ U_{n3}^{(2)} &= 0 \\ U_{n3}^{(3)} &= B_3 \sin nx \\ U_{n3}^{(4)} &= -B_3 \sin nx \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{37}$$

Необходимо провести нормировку этих ортогональных решений. Для симметричного решения найдем:

$$N_{0S}^2 = \frac{\pi}{2} S. \tag{38}$$

Для несимметричных решений, нумеруя их от 1 до $S-1$ имеем:

$$N_{iaS}^2 = \frac{\pi}{2}(S-i)(S+1-i). \tag{39}$$

Обратим внимание, что норма не зависит от n, что упрощает расчеты.
Например, для случая двух стержней:

$$N_{0S}^2 = \pi,\ N_{1S}^2 = \pi. \tag{40}$$

Соответственно для трех стержней вычисления дают:

$$N_{0S}^2 = \frac{3}{2}\pi,\ N_{1aS}^2 = 3\pi,\ N_{2aS}^2 = \pi. \tag{41}$$

Общее решение запишем как сумму:

$$\varphi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{S-1} C_{nk} \frac{U_{nk}^{(i)}}{N_k} e^{-\lambda_n^2 t}. \tag{42}$$

Здесь коэффициенты C_{nk} разложения заданных функций $f^{(i)}$ определены:

$$C_{nk} = \sum_{i=1}^{S} \frac{1}{N_k} \int_0^{\pi} f^{(i)} U_{nk}^{(i)}(x)dx. \tag{43}$$

Например, если только $f^{(1)} \neq 0$ и положим $f^{(1)} = 1, f^{(i)} = 0, i = 2,...,S$, то имеем:

$$C_{nk} = \frac{1}{N_k} \int_0^{\pi} U_{nk}^{(1)}(x)dx, k = 0,...,S-1. \tag{44}$$

Эти интегралы легко вычисляются, поэтому имеем:

$$C_{n0} = 0,\ C_{2k,1} = 0,\ C_{2k+1,1} = \frac{2}{N_1}. \tag{45}$$

Для получения искомого решения уравнения (1) достаточно ввести в полученные разложения начальных значений временный множитель согласно (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Покорный Ю.А.Дифференциальные уравнения на геометрических графах.– М.: Физматлит, 2004.
2. Гладышев Ю.А.Формализм Бельтрами-Берса и его приложений в математической физике. – Калуга, 1997.
3. Гладышев Ю.А.Некоторые интегральные свойства обобщенных степеней Берса. Вестник КГПУ – Калуга, 2005.

Надійшла 20.05.2009.