

УДК 519.6

4D математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерлінації, інтерфлетації, мішаної апроксимації та вейвлетів

С. І. Кулик, О. М. Литвин, О. О. Литвин, Ю. І. Першина

*Українська інженерно-педагогічна академія, Україна**Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна*

Розроблений новий метод опису внутрішньої структури об'єкту, що змінюється з часом. В основі методу лежить використання томограм, отриманих у різні моменти часу на системі площин, що перетинають об'єкт. Подано аналіз методів побудови внутрішньої структури об'єкта, на основі інтерлінації, інтерфлетації функцій двох змінних, а також методів обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням вейвлетів.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, математичне моделювання, інтерлінація, інтерфлетація, вейвлети.

Разработан новый метод описания внутренней структуры объекта, которая меняется со временем. В основе метода лежит использование томограмм, полученных в разные моменты времени на системе плоскостей, пересекающих объект. Предложен анализ методов построения внутренней структуры объекта, на основе интерликации, интерфлтации функций двух переменных, а также методов вычисления коэффициентов Фурье функций двух переменных с использованием вейвлетов.

Ключевые слова: компьютерная томография, математическое моделирование, интерликация, интерфлтация, вейвлеты.

The new method of the description of internal structure of object which changes in time is developed. At the heart of a method use of the tomograms received during the different moments of time on system of planes, crossing object lays. The analysis of methods of tomograms construction based on interlineation, inerflatation of two variables functions, and also methods of calculation of Fourier factors of two variables functions by wavelets is offered.

Key words: Computer tomography, mathematical modeling, interlineation, inerflatation, wavelets.

1. Вступ, актуальність

Задача відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, що змінюється в часі, є однією з найбільш актуальних задач сучасності. Вона виникає в різних галузях науки й техніки. Зокрема, така задача виникає в медичній практиці у випадку проведення декількох повторних досліджень пацієнта в різні моменти часу й необхідності математичного аналізу на їх основі ефективності лікування, а також при обробці сейсмічних сигналів при дослідженні кори Землі [1].

Особливо важливим є побудова 4D моделей на основі томографічних даних у різні моменти часу. Ця задача сама по собі є дуже складною у зв'язку з великими масивами використовуваної інформації на кожному етапі часу, а також у зв'язку з очевидними обмеженнями на візуалізацію результатів відновлення в моменти часу, що не збігаються з моментами, для яких надаються експериментальні дані. Відзначимо, що функція чотирьох змінних може бути візуалізована тільки лише за своїми значеннями в окремих точках або графіками своїх слідів на окремих лініях або поверхнях (зокрема, площинах).

У ряді випадків (наприклад, при дослідженні 3D моделі рухомого серця) необхідно враховувати, що повна зміна внутрішньої структури об'єкта здійснюється дуже швидко. Тому, якщо ми хочемо одержати послідовність математичних моделей тривимірного тіла в різні моменти часу $t = t_k, k = \overline{1, n}$, то для кожного із цих моментів часу необхідно виконати великий обсяг роботи. Для дослідження змін за часом і, зокрема, для прогнозу, очевидно, необхідне аналітичне по t, x, y, z представлення внутрішньої структури тривимірного тіла.

Враховуючи викладене вище, актуальною є задача побудови аналітичної 4D моделі об'єкта, що змінюється, на основі томограм у різні моменти часу.

2. Постановка задачі

Позначимо через $f(x, y, z, t)$ точне аналітичне представлення деякої характеристики тіла (наприклад, щільності або коефіцієнта поглинання). У якості експериментальних даних будемо використовувати: 1. Послідовність моментів часу: $t_1 < t_2 < \dots < t_n$; 2. Серію s площин, заданих рівнянням:

$\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0, p = \overline{1, s}$; 3. Томограми 3D об'єкта $T_{kp}, k = \overline{1, n}, p = \overline{1, s}$ які лежать на заданих площинах Π_p в задані моменти часу

$t = t_k, k = \overline{1, n}$. Томограми отримуємо за допомогою комп'ютерного томографа. Тобто маємо n груп томограм (в кожній групі по s томограм). В кожній групі томограми представлені в один і той же момент часу, Але вони лежать на різних площинах. Потрібно за даною інформацією побудувати функцію $F(x, y, z, t)$ із властивостями:

$$F(x, y, z, t) \in C(D), \quad f_k(x, y, z) = f(x, y, z, t_k), \\ F(x, y, z, t_k) \big|_{\omega_p(x, y, z)=0} = f_k \big|_{\omega_p(x, y, z)=0} = T_{kp}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}.$$

3. Метод побудови 4D математичної моделі

Спочатку побудуємо $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$ тривимірних математичних моделей об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t = t_k, k = \overline{1, n}$ з властивостями:

$$f(x, y, z, t_k) \big|_{\Pi_p} = f_k(x, y, z) \big|_{\Pi_p} = T_{k,p}(x), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}.$$

Тобто $f_k(x, y, z)$ є функцією, яка в точках площини Π_p в k -й момент часу збігається із зображенням p -ї томограми. Для побудови таких функцій можуть бути використані оператори сплайн-інтерфлетації, а також оператори мішаної апроксимації, які були побудовані у роботах [2, 3]. При цьому, якщо експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площин, на яких лежать томограми, а також зображення на томограмах) задані точно, то можна використовувати метод відновлення внутрішньої структури 3D тіла за допомогою операторів інтерфлетації функцій [2]. Якщо ж експериментальні дані задані з похибкою, то можна використовувати метод розв'язання задач 3D комп'ютерної томографії за допомогою мішаної апроксимації [3]. Згадані методи відновлення внутрішньої структури тіла відрізняються високою точністю.

Після побудови тривимірних моделей $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$ будемо 4D модель

$F(x, y, z, t)$, використовуючи метод інтерполяції за змінною t у вигляді формули

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) f_k(x, y, z), \quad (1)$$

де $h_p(t)$ – допоміжні функції від однієї змінної t з властивостями:

$$h_k(t_q) = \delta_{kq}, \quad k, q = \overline{1, n}, \quad \delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & k \neq q \end{cases} \quad \text{– символ Кронекера.}$$

Ці функції можуть бути поліномами (алгебраїчними або тригонометричними), сплайнами (поліноміальними або періодичними) степеня r , $r = 1, 2, 3, \dots$, і т.д.

Теорема 1. Якщо експериментальні дані (томограмми T_{kp} , $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, s}$, що лежать на площинах Π_p) відповідають функції, яку наближуємо, $f(x, y, z, t) \in C^r(D)$, $D = G \times [0, T]$, $r \geq 0$, $G \subset R^3$, $t \in [0, T]$, то можна побудувати 4D модель $F(x, y, z, t)$ внутрішньої структури об'єкта, яка змінюється, з властивостями:

$$F(x, y, z, t) \in C^r(D), \quad F(x, y, z, t_k)|_{\omega_p(x, y, z)=0} = f_k|_{\omega_p(x, y, z)=0} = T_{kp}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s},$$

Відмітимо, що задача в такій постановці не має єдиного розв'язку. Але, при певних обмеженнях на клас функцій, які наближуємо, вона буде мати єдиний розв'язок. Більш того, для деяких класів наближуваних функцій $f(x, y, z, t)$ може бути оцінена похибка наближення.

Теорема 2. Нехай похибка задання томограм T_{kp} в моменти часу t_k задовольняє співвідношенню: $\varepsilon_{kp} = \max_{(u, v) \in G} |f_k|_{\Pi_p} - T_{kp}(\bar{x})|$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, s}$,

похибка наближення операторами $F(x, y, z, t)$ інтерфлетації функції $f(x, y, z, t)$ задовольняє співвідношенню: $\varepsilon_{1k} = \max_{(x, y, z) \in D} |F(x, y, z, t_k) - f(x, y, z, t_k)|_{C(D)}$,

похибка наближення оператором інтерполяції за змінною t задовольняє співвідношенню: $\varepsilon_2 = \max_{0 \leq t \leq T} |F(x, y, z, t) - f(x, y, z, t)|_{\forall (x, y, z) \in D}$. Тоді похибка

наближення функції $f(x, y, z, t) \in C^r(D)$ оператором $F(x, y, z, t)$, побудованим за формулою (1), буде мати вигляд: $E = \max_{\substack{1 \leq p \leq s \\ 1 \leq k \leq n}} O(\varepsilon_{kp}) + \max_{1 \leq k \leq n} O(\varepsilon_{1k}) + O(\varepsilon_2)$.

4. 3D моделі внутрішньої структури тіла за допомогою 2-х або 3-х рентгенівських знімків у взаємно перпендикулярних напрямках [4,5]

Нехай $f(x, y, z)$ – аналітичний вираз для внутрішньої структури 3D тіла.

Введемо оператори

$$c1(f; y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad c2(f; x, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dy,$$

$$c12(f; z) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dy.$$

Теорема 3 [4]. Формула $Bf(x, y, z) = c1(f; y, z) + c2(f; x, z) - c12(f; z)$ є математичною моделлю внутрішньої структури 3D тіла, що використовує 2 рентгенівських знімки у взаємно-перпендикулярних напрямках Ox, Oy і має властивості

$$\int_0^1 Bf(x, y, z) dx = \int_0^1 f dx = c1(f; y, z), \quad \int_0^1 Bf(x, y, z) dy = \int_0^1 f dy = c2(f; x, z),$$

$B_{0,0}f = f \forall f(x, y, z) = u(x, z) + v(y, z)$, де $u(x, z), v(y, z)$ – довільні інтегровні функції двох змінних. Формула

$$Bf(x, y, z) = c1(f; y, z) + c2(f; x, z) + c3(f; x, y) - c1(c2(f; \cdot, \cdot); \cdot, z) - c1(c3(f; \cdot, \cdot); y, \cdot) - c2(c3(f; \cdot, \cdot); x, \cdot) + c123$$

є математичною моделлю внутрішньої структури 3D тіла, що використовує 3 рентгенівських знімки у взаємно перпендикулярних напрямках Ox, Oy, Oz і

$$\int_0^1 B_{0,0,0}f dx = \int_0^1 f dx = c_{1,0}(f; y, z); \quad \int_0^1 B_{0,0,0}f dy = \int_0^1 f dy = c_{2,0}(f; x, z);$$

$$\int_0^1 B_{0,0,0}f dz = \int_0^1 f dz = c_{3,0}(f; x, y), \quad \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f dx dy dz = C_{123}.$$

Теорема 4 [5]. $Bf = f \forall f(x, y, z) = u(y, z) + v(x, z) + w(x, y)$, де $u(x, z), v(y, z), w(x, y)$ – довільні інтегровні функції.

5. Метод обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням скінчених сум Хаара [6]

Викладемо новий метод обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних $f(x, y)$, що використовується при математичному моделюванні в комп'ютерній томографії тригонометричними поліномами Фур'є або Фейєра. Метод використовує в якості даних дискретний набір проєкцій – інтегралів від функції $f(x, y)$ уздовж заданої множини ліній, які перетинають об'єкт дослідження. Будемо використовувати такі допоміжні твердження.

Лема. При обчисленні коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy$

для $k = 0, l = 0, k = 0, l > 0, k > 0, l = 0$ за допомогою проєкцій справедлив

$$\text{рівності } CF_{00} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \gamma_2(y) dy, \quad \gamma_2(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

$$CF_{k,0} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi kx} dx dy = \int_0^1 \gamma_1(x) e^{-i2\pi kx} dx, \quad \gamma_1(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$$

$$CF_{0,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) e^{-i2\pi ly} dx dy = \int_0^1 \gamma_2(y) e^{-i2\pi ly} dy$$

При $k < 0, l < 0$ маємо $CF_{-|k|,0} = \overline{CF_{|k|,0}}$; $CF_{0,-|l|} = \overline{CF_{0,|l|}}$.

Для $k \geq 1, l \geq 1$: При $k \geq 1$: $CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3$,

$$I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl) e^{-i2\pi zl} dz}{k^2 + l^2}, \quad I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \int_0^1 F_2(l+z(k-l)) e^{-i2\pi[l+z(k-l)]} dz,$$

$$I_3 = l \int_0^1 \frac{F_3(k+zl) e^{-i2\pi(k+zl)} dz}{k^2 + l^2}, \quad \text{де } F_1(t) = \int_{-kt/l}^{kt/l} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$F_2(t) = \int_{-k/t}^{(k^2+l^2-t)/k} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv, \quad F_3(t) = \int_{(-k^2-l^2+kt)/l}^{(k^2+l^2-t)/k} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv.$$

Аналогічним чином виписуються формули для інших значень індексів k і l з використанням інших позначень для проекцій (замість F_μ використані позначення $G_\mu, \phi_\mu, \omega_\mu, \mu=1,2,3$). Зазначимо, що для значень k, l , що задовольняють умовам $k, l \leq -1$, використовується рівність $CF_{-k,-l} = \overline{CF_{k,l}}$; $CF_{-k,l} = \overline{CF_{k,-l}}$, $\overline{\alpha+i\beta} := \alpha-i\beta$. Написані вище функції $F_\mu, G_\mu, \phi_\mu, \omega_\mu, \mu=1,2,3$ є проекціями, отриманими інтегруванням функції $f(x,y)$ уздовж прямих, які перетинають квадрат $[0,1]^2$ і проходять паралельно прямим $kx+ly=t$. На практиці зазначені експериментальні дані можуть бути отримані за допомогою комп'ютерного томографа для дискретного набору значень змінної t .

Теорема 5 [6]. Для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням вейвлетів Хаара за допомогою дискретного набору проекцій маємо формули

$$CF_{0,0} \approx CF_{0,0,M} = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \gamma 1_p = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \gamma 2_q, \quad CF_{k,0} \approx CF_{k,0,M} = \sum_{p=1}^M \gamma 1_p e^{-i\frac{p}{M}},$$

$$CF_{0,l} \approx CF_{0,l,M} = \sum_{q=1}^M \gamma 2_q e^{-i\frac{q}{M}}, \quad CF_{k,l} \approx CF_{k,l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad k \geq l \geq 1,$$

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{l}{k^2+l^2} \left(\frac{e^{-i2\pi l/N_1} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \overline{F_1} \left(\frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi \frac{q}{N_1} l}, \quad \overline{F_1}(z) = F_1(zl), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{k-l}{k^2+l^2} \left(\frac{e^{-i2\pi(k-l)/N_2} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \sum_{q=0}^{N_2-1} \overset{\square}{F}_2 \left(\frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi \frac{q}{N_2} (k-l)},$$

$$\overset{\square}{F}_2(z) = F_2(l + z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{l}{k^2+l^2} \left(\frac{e^{-i2\pi l/N_3} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \overset{\square}{F}_3 \left(\frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi \frac{q}{N_3} l}, \quad \overset{\square}{F}_3(z) = F_3(k+zl) \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

Аналогічні явні вирази отримуються після заміни відповідних проєкцій їхніми вейвлет-апроксимаціями.

Метод полягає в заміні функцій $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(y)$, $F_1(zl)$, $F_2(l+z(k-l))$, $F_3(k+zl)$ скінченними сумами вейвлетів Хаара та у точному обчисленні отриманих інтегралів. Метод дозволяє використовувати крім вейвлетів Хаара також й інші вейвлети.

Теорема 6 [6]. Для похибки $|CF_{k,l} - CF_{k,l,N}|$ наближення коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l}$ функцій $f(x,y) \in C^r[0,1]^2$ формулами $CF_{k,l,N}$, які отримуються заміною функцій $F_\mu, G_\mu, \phi_\mu, \omega_\mu$ вейвлетами W_{μ,N_μ} $\mu=1,2,3$ справедлива оцінка зверху (аналогічні оцінки також можна написати для $G_\mu, \phi_\mu, \omega_\mu$)

$$|CF_{k,l} - CF_{k,l,N}| = O \left(\left\| F_\mu(\cdot) - W_{\mu,N_\mu}(\cdot) \right\|_{C[0,1]} \right).$$

Зокрема, при наближенні вейвлетами Хаара маємо $|CF_{k,l} - CF_{k,l,N}| = O(N^{-1})$.

Для проведення обчислювального експерименту для візуалізації функцій $f(x,y)$ використовувалися суми Фур'є

$$SF(x,y,N) = \sum_{k=-N}^{+N} \sum_{\ell=-N}^{+N} CF_{k,\ell} e^{i2\pi(kx+\ell y)}$$

$$\text{і Фейєра } SFE(x,y,N) = \sum_{k=-N}^{+N} \sum_{\ell=-N}^{+N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|\ell|}{N+1}\right) CF_{k,\ell} e^{i2\pi(kx+\ell y)}.$$

6. Обчислювальний експеримент

В якості прикладу розв'яжемо наступну задачу: за даними в різні моменти часу $t = t_k$, $k = \overline{1,n}$ томограмами, які отримані за допомогою магнітно-резонансного комп'ютерного томографа Siemens, побудувати 4D математичну модель серця, внутрішня структура якого змінюється з часом (експериментальні дані були отримані в радіологічному відділенні кардіологічного центру при інституті охорони матері та дитини (м. Київ)). Наведемо результати обчислювального експерименту.

В якості експериментальних даних були взяті: 1. $n = 25$ моментів часу; 2. $s = 9$ паралельних зрізів серця площинами, перпендикулярними осі Ox (метод дозволяє використовувати поряд з даними томограмами також томограми, що лежать в інших перетинах, не перпендикулярних осі Ox); 3. томограми серця, які лежать на $s = 9$ заданих площинах, в кожні з 25 моментів часу.

Тобто маємо 25 груп томограм. В кожній групі представлені томограми, зроблені в один певний момент часу, в дев'яти перетинах (тобто в кожній групі по 9 томограм). На рис. 1-2 показані приклади томограм в різні моменти часу в одних і тих же перетинах.

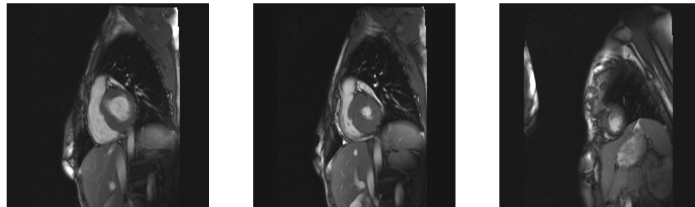


Рис.1. Приклади томограм, зроблених в момент часу t_1 , в перетинах $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.8$

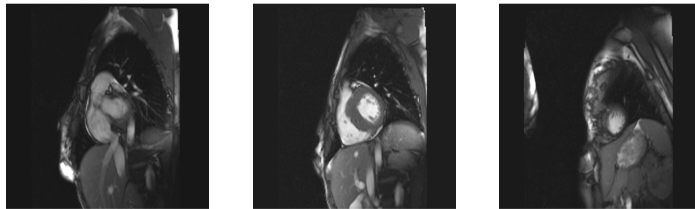


Рис.2. Приклади томограм, зроблених в момент часу t_7 , в перетинах $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.8$

На основі методу, розробленого в роботі [3], були побудовані 25 математичних моделей внутрішньої структури серця у вигляді функцій $f_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, 25}$ за допомогою операторів інтерфлетації функцій трьох змінних. Потім ці математичні моделі були використані при побудові 4D математичної моделі серця за допомогою операторів інтерполяції за змінною часу t . За допомогою побудованої 4D математичної моделі знайдемо зображення серця людини в площині, яка задається рівнянням $x = a$, в конкретний момент часу $t = t_{\text{прогнозе}}$. На рис.3 наведені результати обчислювального експерименту.

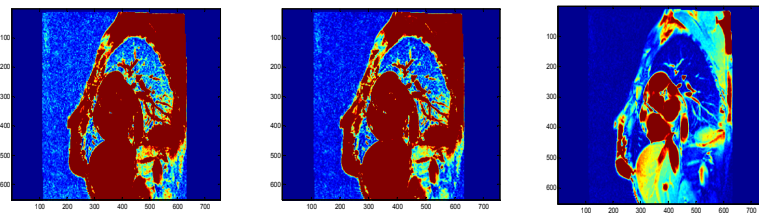


Рис.3. Відновлення внутрішньої структури серця в площині $x = 0.1$ в моменти часу t_5 , t_{12} , t_{20} відповідно

7. Висновки

В роботі запропонований новий метод побудови 4D математичної моделі 3D тіла, що змінюється з часом. 4D модель будується на основі 3D моделі об'єкта, яка використовує оператори інтерфлотації або мішаної апроксимації функцій трьох змінних x, y, z та дані про об'єкт у вигляді томограм, розміщених на різних площинах. За допомогою побудованої 4D моделі знайдена математична модель об'єкту в конкретний момент часу $t = t_{\text{прогнозне}}$. В якості прикладу проведена візуалізація об'єкту (серця людини) в площинах, заданих дослідником з використанням томограм, отриманих за допомогою магнітно-резонансного комп'ютерного томографу Siemens.

Отримана 4D модель може бути використана не тільки для знаходження зображення об'єкту в заданому перерізі у фіксований момент часу, який не збігається з експериментально заданими значеннями часу, але і для аналізу перебігу хвороби шляхом дослідження поведінки функції чотирьох змінних в залежності від часу та від просторових координат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бурмин В. Ю. Вязкость земного ядра по сейсмическим данным. // Доклады РАН. – 2008. – Т. 418, №1,2,3,4,5,6. – С. 825-828.
2. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлотації функцій. // Доповіді НАН України. – 2005. – №8. – С. 67-71.
3. Литвин О. М., Першина Ю. І. Метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням томограм та мішаної апроксимації. // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2008. – №2. – С. 18 – 24.
4. Сергієнко І. В., Литвин О. О. Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі двох рентгенівських знімків у двох взаємно-перпендикулярних ракурсах. Доповіді НАН України. – 2008. – №7 - С. 23-28.
5. Сергієнко І. В., Литвин О. О. Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі трьох рентгенівських знімків у трьох взаємно-перпендикулярних ракурсах. Доповіді НАН України. – 2008. – №8. - С. 29-34.
6. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів. Доповіді НАН України. Київ. – 2009. – №1. – С. 21-25.