УДК 621.391:517.518.3

Недиадні вейвлет-перетворення: дискретний випадок

В. В. Мальчиков, О. Р. Чертов
Національний технічний університет України «КПІ», Україна

В статті проводиться порівняльний аналіз методів дискретного недиадного вейвлет-перетворення. Виділено основні характеристики розглянутих методів. Дано рекомендації щодо їх застосування.

Ключові слова: *вейвлет-перетворення, коефіцієнт масштабування*

В статье проводится сравнительный анализ методов дискретного недиадного вейвлет-преобразования. Выделены основные характеристики рассмотренных методов. Даны рекомендации по их применению.

Ключевые слова: *вейвлет-преобразование, коэффициент масштабирования*

The article deals with the comparative analysis of the non-dyadic discrete wavelet transform methods. The main characteristics are selected. Recommendations about the application fields are formed.

Key words: *wavelet transform, scaling coefficient*

1. Вступ

В інженерній практиці для дослідження різноманітних сигналів природного та штучного походження застосовуються різні класи перетворень – Фур'є, Лапласа, Уолша, Радона тощо. З 80-х років минулого століття для частотно-часового аналізу нестаціонарних сигналів переважно використовують вейвлет-перетворення (ВП). Першими це зробили Морле́ та Гроссман, займаючись аналізом сейсмічних даних та когерентними квантовими станами відповідно. Математичні засади ВП було закладено Мейєром, який показав існування відповідних функцій (вейвлетів), що утворюють ортогональний базис в просторі $L_2(\mathfrak{R})$, тобто в просторі дійсних функцій, квадрат котрих є інтегрованим. Добеші здійснила перехід від неперервного до дискретного ВП та розробила клас вейвлетів, що мають максимальну гладкість при фіксованій довжині свого носія. Малла́ поширив на вейвлети концепцію кратномасштабного аналізу та запропонував процедуру швидкого ВП (пірамідальний алгоритм), яка має обчислювальну складність $O(n)$, тоді як швидке перетворення Фур'є має значно гіршу оцінку – лише $O(n \cdot \log_2(n))$.

Наразі область застосування ВП – наближення функцій і сигналів, їх фільтрація та стиснення, пошук в сигналі певних особливостей тощо [1].

На практиці найчастіше використовуються так звані диадні ВП (ВП з коефіцієнтом масштабування, що дорівнює 2), оскільки вони мають найбільш ефективну програмну реалізацію. Проте в ряді випадків можливостей диадних ВП недостатньо. Наприклад, якщо пов'язані особливості досліджуваного явища знаходяться одразу в декількох сусідніх частотних інтервалах диадного ВП, то для адекватного аналізу цих даних набагато краще буде виконати розбиття частотної області на такі інтервали, які б повністю охоплювали зазначені особливості. Таким чином, застосування недиадних ВП може забезпечити більш точне відокремлення компонент сигналу [2].

2. Джерела дослідження

На даний момент запропоновано декілька методів побудови вейвлетів із коефіцієнтом масштабування, відмінним від 2, які ґрунтуються на різних математичних засадах та мають відмінні характеристики щодо рівня універсальності, можливої ефективної реалізації тощо [2-6]. Тому виникає необхідність у проведенні порівняльного аналізу існуючих методів та виробленні критерію вибору оптимального методу недиадного ВП для його застосування на практиці для розв'язання тієї чи іншої задачі. Авторами вже було виконане подібне дослідження для неперервних недиадних ВП [7].

3. Постановка задачі

Об'єктом дослідження є недиадне дискретне ВП, що застосовується для математичної обробки різноманітних сигналів. Мета статті – визначення принципових характеристик існуючих методів недиадного дискретного ВП та формування, на основі їх порівняльного аналізу, рекомендацій щодо найкращих областей застосування.

4. Основні поняття

Нехай N – дійсне число, а $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – функції з простору $L_2(\Re)$. Функція $\varphi(x)$ називається масштабуючою функцією, якщо вона задовольняє співвідношенню (4.1):

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot \varphi(Nx - k) . \tag{4.1}$$

Число N називається коефіцієнтом масштабування ВП. Набір коефіцієнтів $\{h_k\}$ називається низькочастотним фільтром розкладу.

Вейвлет $\psi(x)$ задовольняє співвідношенню (4.2), аналогічному до (4.1):

$$\psi(x) = \sqrt{N} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \cdot \psi(Nx - k) . \tag{4.2}$$

Набір коефіцієнтів $\{g_k\}$ називається високочастотним фільтром розкладу.

Якщо для всіх $k = 0, 1, \ldots, m-1$ виконується рівність (4.3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \psi(x) dx = 0 , \tag{4.3}$$

то кажуть, що функція $\psi(x)$ має m нульових моментів.

Якщо позначити через $a_{k,j}$ та $d_{k,j}$ відповідно апроксимуючі та деталізуючі коефіцієнти k-го рівня розкладу, то початковий сигнал $s(t)$ можна представити як суму його апроксимації на k-ому рівні і k деталізуючих складових:

$$s(t) = \sum_j \sqrt{N^j} \cdot a_{k,j} \cdot \varphi\left(N^j t - k\right) + \sum_{r=1}^{k} \sum_j \sqrt{N^j} \cdot d_{r,j} \cdot \psi\left(N^j t - r\right) . \tag{4.4}$$

Функція

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot e^{-ik\omega} \tag{4.5}$$

називається частотною функцією масштабуючої функції $\varphi(x)$.

5. Опис методів

5.1 Метод, що базується на представленнях алгебри Кунца

Даний метод запропоновано Брателлі та Йоргенсеном [3]. Він базується на побудові відображення множини $\{\varphi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N-1}\}$, яка складається із масштабуючої функції та вейвлетів з коефіцієнтом масштабування N, на представлення алгебри Кунца $\mathcal{O}_N$. Брателлі та Йоргенсен показали, що система ізометрій S_i, яка визначається співвідношенням (5.1):

$$\left(S_k \xi\right)(z) \equiv H_k(z)\xi\left(z^N\right) \quad \forall \xi \in L_2(T), \quad z \in T, \quad k = 0,1,\ldots N-1\,, \tag{5.1}$$

на сепарабельному гільбертовому просторі $L_2(T)$ числових функцій, квадрат яких інтегровний на одиничній кулі T, породжує C^*-алгебру, яка задовольняє характеристичному рівнянню для алгебри Кунца тоді і тільки тоді, коли майже для всіх $z \in T$ матриця фільтрів (5.2)

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho z) & \ldots & H_0\left(\rho^{N-1} z\right) \\ H_1(z) & H_1(\rho z) & \ldots & H_1\left(\rho^{N-1} z\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho z) & \ldots & H_{N-1}\left(\rho^{N-1} z\right) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

являється унітарною, де $\rho \equiv e^{2\pi i/N}$.

Шляхом перетворення Фур’є по циклічній групі $\{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{N-1}\}$ матриця фільтрів зводиться до наступного вигляду (5.3):

$$\mathbf{A}\left(z^N\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z & \rho z & \ldots & \rho^{N-1} z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{N-1} & \rho^{N-1} z^{N-1} & \ldots & \rho^{(N-1)^2} z^{N-1} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

де **A** – унітарна матриця.

Задача підбору фільтрів недиадного ВП при цьому зводиться до побудови унітарної матриці. Коефіцієнт масштабування в даному методі може бути тільки натуральним числом, відмінним від одиниці.

5.2. Раціональний кратномасштабний аналіз (Боссар)

Ошер показав [4], що при кратномасштабному аналізі коефіцієнт масштабування може бути не тільки цілим, а й раціональним числом, більшим за 1. Боссар, Нікольє і Трюшете запропонували [5] швидкий пірамідальний алгоритм знаходження відповідних коефіцієнтів вейвлет-розвинення.

Якщо масштабуючий коефіцєнт N дорівнює деякому раціональному числу p/q, то обчислення апроксимуючих та деталізуючих коефіцієнтів проводиться за допомогою згортки апроксимуючих коефіцієнтів попереднього рівня із сукупністю низькочастотних $\left\{\tilde{h}_n\right\}, 0 \le n \le q-1$ та високочастотних $\left\{\tilde{g}_m\right\}, 1 \le m \le p-q$ фільтрів відповідно.

Фільтри $\left\{\tilde{h}_n\right\}$ та $\left\{\tilde{g}_m\right\}$ є симетричними до фільтрів $\left\{h_n\right\}$ та $\left\{g_m\right\}$:

$$\tilde{h}_n(k) = h_n(-k),\ \tilde{g}_m(k) = g_m(-k), \tag{5.4}$$

котрі будуються згідно формул (4.1) та (4.2) відповідно.

В силу того, що ортогональні вейвлетні базиси формуються в частотній області, то і побудова фільтрів для раціонального кратномасштабного аналізу також проводиться у частотній області. При цьому Фур'є-перетворення коефіцієнтів фільтрів $\left\{h_n\right\}$ та $\left\{g_m\right\}$ мають відповідно наступний вигляд:

$$\hat{h}_n(\omega) = \sqrt{N} \cdot \frac{\hat{\varphi}(N \cdot \omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} \cdot e^{-inN\omega},\quad \hat{g}_m(\omega) = \sqrt{N} \cdot \frac{\hat{\psi}^m(N \cdot \omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}, \tag{5.5}$$

Оскільки замість обчислення коефіцієнтів фільтрів знаходяться Фур'є-образи цих коефіцієнтів, то пірамідальний алгоритм ВП у випадку раціонального масштабуючого коефіцієнта може бути також перенесений у частотну область.

5.3. Змішаний коефіцієнт масштабування (Поллок)

Основна ідея даного методу полягає у розробці пакетного ВП із можливістю вибору на кожному рівні розвинення свого масштабуючого коефіцієнту.

Поллок [2] узагальнює методику диадного пакетного ВП, при якому на j-ому кроці весь частотний діапазон розбивається на 2^j рівних інтервали. Він пропонує розбивати частотний діапазон на p рівних інтервали, де p – довільне просте число.

Побудова фільтрів для ВП проводиться в частотній області. Позначимо через $\psi(\omega)$ Фур'є-образ масштабуючої функції, а через $\psi_{j/N}(\omega)$ – j-ий фільтр з послідовності N фільтрів, які поділяють частотний діапазон на N рівних частин. Нехай весь частотний діапазон спочатку розбивається на n рівних інтервалів, кожен з яких на наступному кроці розбивається на p рівних інтервалів. Тоді смужчастий фільтр, що пропускає j-ий інтервал з np інтервалів, можна визначити за допомогою співвідношення (5.6):

$$\psi_{j/np}(\omega) = \psi_{k/p}(n \cdot \omega) \cdot \psi_{l/n}(\omega), \tag{5.6}$$

де числа l та k визначаються за формулами (5.7):

$$l = (j \ \mathrm{div}\ p),\ k = \begin{cases} (j \ \mathrm{mod}\ p),\ l - \text{непарне}, \\ p + 1 - (j \ \mathrm{mod}\ p),\ l - \text{парне}. \end{cases}, \tag{5.7}$$

де div – операція обчислення цілої частині від ділення першого аргумента на другий, а mod – операція обчислення залишку від ділення.

Таким чином, якщо відомий розклад кількості відліків початкового сигналу на прості множники, то, використовуючи формулу (5.6) рекурентно, можна збудувати набори фільтрів для всього набору даних.

Коефіцієнт масштабування в цьому методі може бути лише простим числом. Проте він може змінюватися при переході з рівня на рівень. Послідовність зміни коефіцієнту масштабування в загальному випадку може бути довільною, і обирається в залежності від походження даних, що аналізуються, та особливостей, що розшукуються. Поллок пропонує брати послідовність масштабуючих коефіцієнтів в порядку зменшення, оскільки це дозволяє мінімізувати кількість операцій множення в процесі побудови фільтрів.

5.4. Метод базисів Ґрьобнера

Основна ідея цього методу полягає у побудові ортонормальних фільтрів мінімальної довжини із заданим числом нульових моментів для недиадного ВП із раціональним коефіцієнтом масштабування.

Байрам та Селеснік в своїй роботі [6] перебудовують умови точного відтворення ВП з коефіцієнтом масштабування 3/2, що виражаються формулами (5.8), в еквівалентну форму (5.9), яка більше підходить для знаходження базисів Ґрьобнера [8]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{6}\left[\mathbf{H}(z)\mathbf{H}\left(z^{-1}\right)+\mathbf{H}(-z)\mathbf{H}\left(-z^{-1}\right)\right]+\frac{1}{3}\mathbf{G}\left(z^{2}\right)\mathbf{G}\left(z^{-2}\right)=1\\ \frac{1}{6}\left[\mathbf{H}\left(zW^{2}\right)\mathbf{H}\left(z^{-1}\right)+\mathbf{H}\left(-zW^{2}\right)\mathbf{H}\left(-z^{-1}\right)\right]+\frac{1}{3}\mathbf{G}\left(z^{2}W\right)\mathbf{G}\left(z^{-2}\right)=0\\ \frac{1}{6}\left[\mathbf{H}(zW)\mathbf{H}\left(z^{-1}\right)+\mathbf{H}(-zW)\mathbf{H}\left(-z^{-1}\right)\right]+\frac{1}{3}\mathbf{G}\left(z^{2}W^{2}\right)\mathbf{G}\left(z^{-2}\right)=0.\end{gathered} \tag{5.8}$$

$$\begin{gathered}\left[\downarrow 3\right]\left\{H_0\left(z^2\right)\mathbf{H}\left(z^{-1}\right)\right\}=1\\ \left[\downarrow 3\right]\left\{z^{-3}H_1\left(z^2\right)\mathbf{H}\left(z^{-1}\right)\right\}=1\end{gathered} \tag{5.9}$$

де $W\equiv e^{2\pi i/3}$,

$\mathbf{H}(z)$ та $\mathbf{G}(z)$ – це матриці низькочастотних та високочастотних фільтрів розкладу,

$H_0(z)$ та $H_1(z)$ – це поліфазні компоненти матриці $\mathbf{H}(z)$, що визначаються співвідношенням $\mathbf{H}(z)=H_0\left(z^2\right)+z^{-3}H_1\left(z^2\right)$,

$\left[\downarrow 3\right]$ – оператор децимації (прорідження) кожного третього відліку сигналу.

Викладки, що наведені Байрамом та Селесніком, можуть бути узагальнені і на довільний раціональний коефіцієнт масштабування.

Умови наявності заданої кількості нульових моментів також виражаються у термінах теорії базисів Ґрьобнера:

$$\operatorname{mod}\left(\mathbf{H}(z),\left(z^2+z+1\right)^K\right)=0, \tag{5.10}$$

де K – це задана кількість нульових моментів.

В результаті, для знаходження коефіцієнтів фільтрів залишається розв'язати нелінійну систему з рівнянь (5.9) та (5.10).

Головним недоліком методу базисів Ґрьобнера є те, що він потребує великих обчислювальних затрат на пошук розв'язку нелінійної системи при великих довжинах фільтрів.

6. Співставлення існуючих методів недиадного дискретного ВП

Основні властивості та особливості розглянутих методів зведено в Табл. 1. Виходячи з виділених характеристик, можна зробити наступні висновки.

Табл.1. Основні характеристики методів недиадного дискретного ВП

Властивість	Методи недиадного дискретного ВП			
	метод на представленнях алгебри Кунца	метод Поллока	метод Боссара	метод на базисах Ґрьобнера
Ефективний алгоритм реалізації	можливі проблеми при факторизації унітарної матриці	середня складність реалізації	швидкий пірамідальний алгоритм	висока обчислювальна складність
Коефіцієнт масштабування	натуральне число	просте число	раціональне число	раціональне число
Динамічна зміна коефіцієнту масштабування	відсутня	присутня	відсутня	відсутня
Ортогональність вейвлетних базисів	в тому числі і біортогональні	послідовна ортогональність	так	так
Вибір послідовності коефіцієнтів масштабування	ні	так	ні	ні

Метод Поллока може бути використаний у випадку, коли на кожному кроці кратномасштабного аналізу потрібно динамічно змінювати коефіцієнт масштабування (наприклад, річні дані групуються в поквартальні, які потім розбиваються на щомісячні). Проте цей метод дозволяє використовувати в якості коефіцієнту масштабування лише прості числа. Тому за необхідності у використанні в якості масштабуючого коефіцієнта непростого числа потрібно виконати декілька кроків метода Поллока, використовуючи в якості послідовності масштабуючих коефіцієнтів набір простих дільників.

Якщо ж для більш точного відокремлення особливостей вихідного сигналу потрібно використовувати не цілі значення масштабуючого коефіцієнту, то метод Боссара має обчислювальну перевагу над методом, основаним на базисах Ґрьобнера. Проте останній може бути використаний у тому випадку, коли потрібно збудувати фільтри для ВП із наперед заданим числом нульових моментів.

Метод, що базується на представленнях алгебри Кунца, для натуральних коефіцієнтів масштабування, більших за одиницю, дозволяє досить просто побудувати аналітичний вигляд всіх фільтрів через коефіцієнти низькочастотного фільтру розкладу. Але факторизація матриці **A** із формули (5.3) в деяких випадках може вимагати нетривіальних евристичних міркувань.

7. Висновки

В даній роботі авторами вперше проведено огляд існуючих методів дискретного недиадного ВП, визначені принципові характеристики розглянутих методів. На основі аналізу обраних характеристик надані рекомендації для використання того чи іншого методу для розв'язання задач певного типу.

Залишається відкритим питання про вибір найбільш відповідного коефіцієнту масштабування в кожному конкретному випадку. Також представляється перспективною задача динамічної зміни масштабуючого коефіцієнта на різних рівнях кратномасштабного аналізу в залежності від особливостей сигналу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
2. Pollock D.S.G., Cascio I.L. Non-dyadic wavelet analysis // Optimisation, Econometric and Financial Analysis: Advances in Computational Management Science, Kontoghiorghes E.J. and Gatu C. (eds.) – Springer Verlag. – 2007. – Vol. 9. – P. 167-204
3. Bratelli O., Jorgensen P.E.T. Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale N // Integral Equations Operator Theory. – 1997. – Vol. 28, №4. – P. 382-443.
4. Auscher P. Ondelettes fractales et applications. Ph.D. Thesis. Universite IX Paris, Dauphine. Paris, France. – 1989.
5. Baussard A., Nicolier F., and Truchetet F. Rational multiresolution analysis and fast wavelet transform: application to wavelet shrinkage denoising // Signal Processing. – Vol. 84, №10. – 2004. – P. 1735-1747.
6. Bayram I., Selesnick I.W. Design of orthonormal and overcomplete wavelet transforms based on rational sampling factors // IEEE Trans. Signal Processing. – 2009. – Vol. 57, №1. – P. 131-145
7. Чертов О.Р., Мальчиков В.В. Недиадні вейвлет-перетворення: неперервний випадок // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці: Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції. 15-17 квітня 2010 р., м. Луганськ. – Луганськ : Phoenix, 2010. – С. 146-147.
8. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. – М.: МЦНМО, 2003. – 65 с.

Надійшла у першій редакції 23.04.2010, в останній -11.10.2010.