УДК 532.546

Компьютерный метод решения задачи определения поля давлений в нелинейном случае

Г. В. Голубев
Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

Рассматривается проблема определения поля давлений в неоднородном трещиновато-пористом пласте. Выведено первоначально нелинейное уравнение в частных производных с дивергентной главной частью и установлен его тип. Даётся постановка задачи и предлагается метод решения, основанный на методе Галёркина с конечными элементами. Также дан общий алгоритм и многочисленные примеры.

Ключевые слова: *поле давлений, трещиновато-пористый пласт, уравнение в частных производных, метод Галёркина, конечные элементы, алгоритм.*

Ми розглядаємо проблему визначення поля тиску у неоднорідному тріщинувато-пористому пласті. Отримано взагалі нелінійне рівняння у частинних похідних з дивергентною головною частиною та встановлено його тип. Ми формулюємо задачу і пропонуємо метод розв'язку на основі методу Гальоркіна із скінченими елементами. Також дано загальний алгоритм і наведено численні приклади.

Ключові слова: *поле тиску, тріщинувато-пористий пласт, рівняння у частинних похідних, метод Гальоркіна, скінчені елементи, алгоритм.*

We consider the problem on determination of pressure field in heterogeneous fractured porous stratum. We derived the initial nonlinear differential partial equation with the main divergent part and established its type. We formulate this problem and suggest the method for solution on the basis Galerkin method with finite elements. Also given are the general algorithm and a number of examples.

Key words: *pressure field, heterogeneous fractured porous stratum, differential partial equation, Galerkin method, finite elements, algorithm.*

В работе рассматривается фильтрация в неоднородных трещиновато-пористых средах. Трещиновато-пористой называется среда, состоящая из пористых блоков, отделенных друг от друга развитой системой трещин. Особенностью ее является то, что главные запасы нефти и газа находятся в пористых блоках, а основное движение нефтегазового потока происходит по трещинам. При фильтрации в таких средах наблюдаются аномалии, которые не происходят в обычных гранулярных терригенных коллекторах. Аномалия первая: при бурении скважин на определенных глубинах отмечается интенсивный уход бурового раствора, хотя проницаемость породы, определенная по кернам и шлифам, очень мала. С традиционной точки зрения так быть не должно. Аномалия вторая: при работе эксплуатационных скважин на установившихся режимах наблюдаются высокие дебиты при очень малой проницаемости пласта, определенной опять по кернам и шлифам. Дело оказалось в том, что весь пласт пронизан системой сообщающихся между собой трещин, по которым и происходит приток флюидов в скважину или уходит промывочная жидкость. Созданные к тому времени модели фильтрации не описывали в полной мере особенностей фильтрации в карбонатных коллекторах, главная из которых – различный характер трещиноватости. Потребовалось создание новой теории фильтрации в трещиноватых породах, поскольку существовавшая теория не объясняла указанных выше аномалий. Заметим, что месторождения нефти в карбонатных трещиноватых породах открыты и разрабатываются на Северном Кавказе (Грозненские месторождения), в Среднем Поволжье, в частности Татарстане, в Белоруссии, во многих зарубежных, особенно ближневосточных странах. В качестве математической модели трещиновато-пористой среды примем модель Баренблатта-Желтова [1]. Будем считать, что фильтрация в трещинах описывается нелинейным двучленным законом Форхгеймера

$$\nabla p = -\mu \bar{v}_1 / k_1 - \beta \mu v_1 \bar{v}_1 / k_1. \qquad (1)$$

Здесь использованы обозначения: $\bar{v}_1$ – скорость фильтрации, p – функция давления, μ – вязкость жидкости, β – постоянная.

Закон Форхгеймера в форме, разрешенной по отношению к скорости фильтрации, представляется в виде

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \text{ где } B_1 = (\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) / 2\beta |\nabla p|. \qquad (2)$$

Для движения жидкости в пористых блоках породы используем нелинейный закон ДХК (Девликамова, Хабибуллина, Кабирова):

$$\bar{v}_2 = -k_2 u \nabla p / [\mu_0 + \mu_1 (u-1)], u = 1 + \exp c_1 (|\nabla p| - \beta_1), \qquad (3)$$

где $\bar{v}_2$ – скорость фильтрации в блоках; k_2 – проницаемость блоков; β_1 – градиент давления, соответствующий началу интенсивного разрушения структуры нефти; c_1 – определяет скорость разрушения образовавшейся структуры; μ_0, μ_1 – вязкости нефти до и после разрушения структуры.

Будем считать коэффициенты проницаемости и трещин и блоков переменными величинами, функциями координат, давления и градиента давления: $k_1 = k_1(x, y, p, |\nabla p|), k_2 = k_2(x, y, p, |\nabla p|)$. Получим основное уравнение фильтрации при комбинации законов (2) и (3). Для суммарного потока имеем

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = -B_2 \nabla p, \qquad (4)$$

где

$$B_2 = (\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) / 2\beta |\nabla p| + k_2 u / [\mu_0 + \mu_1 (u-1)], u = 1 + \exp c_1 (|\nabla p| - \beta_1).$$

Радиальная и поперечная составляющие скорости фильтрации суммарного потока имеют вид

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_2 \frac{\partial p}{\partial r}), v_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(B_2 \frac{\partial p}{\partial \theta}),$$ где r, θ – полярные координаты.

К закону (4) добавляем соотношение, которое получается из уравнения неразрывности суммарного потока и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления. Оно имеет следующий вид в случае фильтрации несжимаемой жидкости и единичной толщины пласта

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + f(r, \theta, t) = 0. \qquad (5)$$

Здесь f – функция плотности отбора, t – время.

Вычисляя производные $\partial(rv_r)/\partial r, \partial v_\theta/\partial\theta$ и подставляя их в уравнение (5), придем к основному уравнению фильтрации в рассматриваемом случае, которое в сокращенной форме запишется так

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_2\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(B_2\frac{\partial p}{\partial\theta})+f=0. \qquad (6)$$

Если рассматривать (6) как уравнение для определения функции давления, то оно имеет вид

$$a_{11}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta}+a_{22}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}+H(r,\theta,p,\frac{\partial p}{\partial r},\frac{\partial p}{\partial\theta})=f, \qquad (7)$$

где введены следующие обозначения

$$a_{11}=\frac{1}{|\nabla p|}[(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1)/2\beta-(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1)(\frac{\partial p}{\partial r})^2/2\beta|\nabla p|^2+c(\frac{\partial p}{\partial r})^2/|\nabla p|*$$

$$*\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+\frac{\partial c}{\partial|\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial r})^2/\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}]+\frac{1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}[k_2+\frac{\partial k_2}{\partial|\nabla p|}*$$

$$*(\frac{\partial p}{\partial r})^2/|\nabla p|]+k_2(\frac{\partial p}{\partial r})^2c_1\frac{\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}/|\nabla p|-k_2c_1\mu_1(\frac{\partial p}{\partial r})^2[1+(\frac{\partial p}{\partial r})^2[1+$$

$$+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)]/(\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha))^2|\nabla p|,$$

$$a_{22}=\frac{1}{r^2|\nabla p|}[(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1)/2\beta-(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1)(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/2\beta r^2|\nabla p|^2+c(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/$$

$$/r^2|\nabla p|\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+\frac{\partial c}{\partial|\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/r^2\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}]+\frac{1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}[k_2+$$

$$+\frac{\partial k_2}{\partial|\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/r^2|\nabla p|]/r^2+k_2c_1(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2\frac{1}{r^4}\frac{\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}/|\nabla p|-k_2c_1\mu_1*$$

$$*(\partial p/\partial\theta)^2r^{-4}[1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)]/(\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha))^2|\nabla p|,$$

$$a_{12}=\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{1}{r^2}[-(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1)/2\beta|\nabla p|^3+c/|\nabla p|^2\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+\frac{\partial c}{\partial|\nabla p|}/$$

$$/|\nabla p|\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+k_2c_1\frac{\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}/|\nabla p|+\frac{\partial k_2}{\partial|\nabla p|}\frac{1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}/$$

$$/|\nabla p|-k_2c_1\mu_1[1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)]/(\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha))^2|\nabla p|],$$

$$H=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1)(1+(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/r^2|\nabla p|^2)/2\beta|\nabla p|-\frac{c}{|\nabla p|^2}\frac{\partial p}{\partial r}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/r^3*$$

$$*\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+(\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial c}{\partial\theta})/|\nabla p|\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+\frac{\partial c}{\partial p}|\nabla p|/\sqrt{1+4|\nabla p|c}-$$

$$-\frac{\partial c}{\partial|\nabla p|}\frac{\partial p}{\partial r}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/r^3|\nabla p|\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}+\frac{1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-)}[k_2\frac{\partial p}{\partial r}/r+(\frac{\partial k_2}{\partial r}+\frac{\partial k_2}{\partial p}*$$

$$*\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\partial k_2}{\partial|\nabla p|}\frac{1}{r^3}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2)/|\nabla p|+\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial\theta}(\frac{\partial k_2}{\partial\theta}+\frac{\partial k_2}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\theta})/|\nabla p|]-k_2c_1\frac{\partial p}{\partial r}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2\frac{1}{r^3|\nabla p|}*$$

$$*\frac{\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{\mu_0+\mu_1\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}+k_2c_1\mu_1\frac{1+\exp(c_1|\nabla p|-\alpha)}{(\mu_0+\mu_1\exp(c|\nabla p|-\alpha)^2}(\frac{\partial p}{\partial\theta})^2/r^3|\nabla p|,c=\frac{k_1}{\mu},\alpha=c_1\beta_1.$$

Удается доказать, что уравнение (7) принадлежит к эллиптическому типу. При определении поля давлений в неоднородной трещиновато-пористой среде важно прежде всего получить решение для круговой области с одной эксцентричной скважиной. Соответствующую задачу сформулируем следующим образом.

В области $D=\{r\in[0,R]\}$ с границей ∂D найти решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям:

$p=p_k(\theta)$ при $r=R,$ где $p_k(\theta)-$заданное распределение давления на контуре питания (краевое условие), $R-$радиус круга;

в точке $A_i(r_i,\theta_i)$ функция p имеет логарифмическую особенность заданного дебита Q_i и справедливо равенство $\lim\oint B_2(\partial p/\partial n)ds=Q_i$

при $\gamma_i\to 0,$ где γ_i-произвольный контур, охватывающий скважину, $n-$ внутренняя нормаль к нему, B_2-ранее записанное выражение из формулы (4).

Для решения этой задачи будет использован один из вариантов метода Галеркина с конечными элементами [2-3]. При этом будут применяться криволинейные четырехугольные элементы. Криволинейный четырехугольный элемент можно брать не только с четырьмя узлами, но и с восемью, расположив дополнительные узлы на каждой из его сторон. Такое увеличение числа узлов увеличивает до 16 число степеней свободы элемента. Для области типа круга, сектора, кругового кольца и т.п. целесообразно ввести радиально-кольцевую сетку и применять проекционно-разностные схемы в полярных координатах. Их преимущество состоит в том, что четырехугольными элементами радиально-кольцевой сетки можно полностью аппроксимировать область указанного типа и избежать сноса краевых условий. Это целесообразно делать, например, для круговой области с центральной скважиной. Шаги сетки по радиусу и полярному углу примем такие $h=R/(N+1),l=2\pi/(M+1).$ Сетку определим как множество точек $(r_k,\theta_k),(r_k=h(N+1-k),\theta_s=ls,k=0,1,...,N,s=0,1,...,M).$

Введем следующие функции с конечным носителем

$$\omega_{rk}(r)=(r-r_{k+1})/(r_k-r_{k+1}),$$

если $r\in[r_{k+1},r_k],\omega_{rk}(r)=(r_{k-1}-r)/(r_{k-1}-r_k),$ если $r\in[r_k,r_{k-1}],\omega_{rk}(r)=0,$ если $r\notin[r_{k+1},r_{k-1}],k=N,N-1,...,1;$ $\omega_{\theta s}(\theta)=(\theta-\theta_{s-1})/(\theta_s-\theta_{s-1}),$ если $\theta\in[\theta_{s-1},\theta_s],$ $\omega_{\theta s}(\theta)=(\theta_{s+1}-\theta)/(\theta_{s+1}-\theta_s),$ если $\theta\in[\theta_s,\theta_{s+1}],\omega_{\theta s}(\theta)=0,$ если $\theta\notin[\theta_{s-1},\theta_{s+1}],$

$s = 1, 2, ..., M$. Поясним, что по радиусу идут узлы с индексами $r_{N+1}, r_N, ..., r_0$, а по полярному углу $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{M+1}$. Функция $\omega_{rk}(r)$ в качестве области определения имеет отрезок $[r_{k+1}, r_{k-1}]$. Она непрерывна и отлична от нуля только на этом интервале, где состоит из двух линейных участков, и достигает максимума, равного единице, в точке $r = r_k$. Эта функция обладает аналогом свойства полноты: любую непрерывную кусочно-линейную функцию с возможными изломами в узловых точках можно представить в виде линейной комбинации таких функций. Кроме того, функция $\omega_{rk}(r)$ обладает свойством ортогональности, но не в совсем обычном смысле. Функция $\omega_{rk}(r) \in W_2^1(r_{N+1}, r_0)$, т.е. она принадлежит пространству Соболева функций, суммируемых с квадратами первых производных, поскольку и сама функция и ее производные могут иметь на интервале $[r_{k+1}, r_{k-1}]$ только конечные разрывы. То же относится и к $\omega_{\theta s}(\theta)$. Далее рассмотрим следующую систему функций

$$\omega_{ks}(r, \theta) = \omega_{rk}(r)\omega_{\theta s}(\theta) \quad (r, \theta) \in D_h \tag{8}$$

При использовании конечных элементов решение ищется принадлежащим некоторому подпространству F_h исходного гильбертова пространства F: $F_h \subseteq F$. В качестве F_h выберем линейную оболочку функций $\{\omega_{ks}\}$, т.е. множество всех линейных комбинаций этих функций. Систему $\{\omega_{ks}\}$ возьмем базисом пространства F_h. К системе базисных функций предъявляются следующие требования:

1) Взятые в любом конечном числе они должны быть линейно независимы. Поскольку функции с конечным носителем имеют локальный характер и отличны от нуля на разных участках области, то это требование в данном случае выполняется.

2) Система $\{\omega_{ks}\}$ должна обладать аналогом свойства полноты, выполнение которого следует из того, что любую непрерывную кусочно-линейную по переменным r, θ функцию можно представить в виде следующей линейной комбинации $f(r, \theta) = \sum f(r_k, \theta_s)\omega_{ks}(r, \theta)$. Приближенное решение задачи в подпространстве F_h с базисом (8) будем искать в виде линейной комбинации базисных функций с постоянными коэффициентами

$$p^h = \sum p_{ij}\omega_{ij}(r, \theta), \quad (r_i, \theta_j) \in D_h \tag{9}$$

где узловые параметры p_{ij} неизвестны. Распределение давления в пределах типичного криволинейного четырехугольного элемента с вершинами в узлах $(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$ и сторонами $h_i, r_i l_j$ описывается при этом формулой

$$p_e^h = \alpha_{e0} + \alpha_{e1} r + \alpha_{e2}\theta + \alpha_{e3} r\theta. \tag{10}$$

Функция p_e^h линейна по каждому аргументу при фиксированном другом. Определяя постоянные $\alpha_{e0}, \alpha_{e1}, \alpha_{e2}, \alpha_{e3}$ из условий $p^h(r_i, \theta_j) = p_{ij}, p^h(r_i + h_i, \theta_j) =$

$= p_{i+1,j}, p^h(r_i, \theta_j + l_j) = p_{i,j+1}, p^h(r_i + h_i, \theta_j + l_j) = p_{i+1,j+1},$ получаем выражение

$$p_e^h = [p_{ij}(r_i + h_i - r)(\theta_j + l_j - \theta) + p_{i+1,j}(r - r_i)(\theta_j + l_j - \theta) + p_{i,j+1}(r_i + h_i - r)(\theta - \theta_j) + \\ + p_{i+1,j+1}(r - r_i)(\theta - \theta_j)] / h_i l_j, \qquad (11)$$

Таким образом, в пределах типичного элемента получается аппроксимация действительной зависимости $p(r,\theta)$ участком поверхности гиперболического параболоида. Формула (11) дает возможность подсчитать давление в любой точке элемента, если известны его значения в вершинах. Решение в виде функции (11) ищется с использованием априорных сведений о гладкости решения, а именно строится в виде непрерывной функции, имеющей кусочно-непрерывные первые производные. При использовании конечных элементов зависимость базисных функций от конфигурации области не имеет места. Однако, при увеличении числа элементов и узлов меняется разбивка области и изменяются базисные функции. Следовательно, при переходе от одного приближения к другому мы имеем дело не с последовательностью базисных функций, как в методе Бубнова-Галеркина, а с последовательностью наборов базисных функций. Для получения основных соотношений метода Галеркина с конечными элементами мы будем использовать метод взвешенных невязок или метод Бубнова-Галеркина, который можно рассматривать в качестве частного случая первого более общего метода. Коэффициенты p_{ij} (значения давления в узлах сетки) будем определять из условия, чтобы исходное уравнение после подстановки в него выражения (9), т.е. невязка, стало ортогональным к весовым функциям $w_{ks}(k = 1,2,...,N; s = 1,2,...,M)$. Ортогональность в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ понимается как равенство нулю скалярного произведения двух элементов, которое определяется формулой

$$(f, g) = \int_{(D)} f(x)g(x)dx.$$

Поэтому, при использовании метода взвешенных невязок составляется система уравнений $\iint_{(D)} Rw_{ks}drd\theta = 0, (k = 1,2,...,N; s = 1,2,...,M)$, где $R-$невязка.

Заметим, что в методе Бубнова-Галеркина полагают $w_{ks} = \omega_{ks}$, т.е. в качестве весовых функций принимают базисные функции. Дебит скважины рассредоточим по площади соответствующего элемента, где она находится. Тогда функция давления не будет содержать логарифмической особенности в области D, а плотность отбора f на соответствующем элементе не равна нулю. Для круговой же области с центральной скважиной делать этого нет необходимости. В этом случае будет иметь место как точная аппроксимация формы области, так и выполнение краевых условий на контуре питания и контуре скважины без их сноса. Умножим уравнение (7) на w_{ks} и проинтегрируем его по области D

$$\iint_{(D)} (a_{11}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} + a_{22}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + H - f) w_{ks}(r,\theta)drd\theta = 0, (k, s = 1,2,...,N, M) \qquad (12)$$

Подставляем сюда p из (9)

$$\sum_{i,j}\iint_{(D)}(a_{11}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r\partial\theta}+a_{22}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial\theta^2}+H)w_{ks}drd\theta=G_{ks},$$

где $G_{ks}=\iint_{(D)}fw_{ks}drd\theta$

Далее учтем, что $\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r^2}=0,\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial\theta^2}=0,$ а $\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r\partial\theta}$ есть некоторая ненулевая постоянная, выражающаяся через шаги по радиусу и полярному углу. Тогда последнее уравнение перепишется

$$\sum_{i,j}p_{ij}\iint_{(D)}(2a_{12}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r\partial\theta}+H)w_{ks}(r,\theta)drd\theta=G_{ks},(k=1,2,...,N;s=1,2,...,M) \quad (13)$$

Здесь узловые параметры p_{ij} фигурируют как в качестве коэффициентов перед соответствующими интегралами, так и входят в a_{12} и H. Таким образом, это нелинейная система алгебраических уравнений. Введем вектора $\overline{p}$ и $\overline{G}$ с компонентами $\{p_{ks}\}$ и $\{G_{ks}\}$. Равенства (13) перепишем так

$$\sum_{i,j}p_{ij}a_{ks}^{ij}=G_{ks},(k=1,2,...,N;s=1,2,...,M). \quad (14)$$

где a_{ks}^{ij} есть элемент матрицы A, который вычисляется по формуле

$$a_{ks}^{ij}=\iint_{(D)}(2a_{12}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r\partial\theta}+H)w_{ks}(r,\theta)drd\theta,(k=1,2,...,M;s=1,2,...,M). \quad (15)$$

Равенства (15) представляют собой нелинейную систему алгебраических уравнений с неизвестными p_{ij}, которую запишем в векторном виде так

$$A\overline{p}=\overline{G}. \quad (16)$$

Коэффициенты этой системы, определяемые по формулам (15), преобразуем следующим образом

$$a_{ks}^{ij}=\sum_{i,j}\int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_{j+1}}(2a_{12}w_{ks}+Hw_{ks})drd\theta. \quad (17)$$

Если положить $w_{ks}=\omega_{ks}=\omega_{rk}(r)\omega_{\theta s}(\theta),\ w_{ks}=\omega_{ks}=\omega_{rk}(r)\omega_{\theta s}(\theta),$ т.е. в качестве весовых функций принять базисные функции, то формула для коэффициентов перепишется

$$a_{ks}^{ij}=\sum_{i,j}\int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_{j+1}}(2a_{12}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial r\partial\theta}\omega_{rk}\omega_{\theta s}+H\omega_{rk}\omega_{\theta s})drd\theta,(k=1,2,...,N;s=1,2,...,M). \quad (18)$$

При этом элементы a_{ks}^{ij} равны нулю, если $|i-k|>1,|j-s|>1,$ т.е. матрица системы (16) оказывается разреженной, что облегчает ее решение и сокращает число операций, При составлении системы (14) или (16) должны учитываться условия периодичности

$$a_{ks}^{ij}\Big|_{\theta=0} = a_{ks}^{ij}\Big|_{\theta=2\pi}, \; p\Big|_{\theta=0} = p\Big|_{\theta=2\pi}.$$

Таким образом, исследуемая задача приведена к виду, когда дальнейшее ее решение осуществляется с помощью компьютеризованных вычислений. Далее можно обратиться, например, к программному продукту Mathcad, где для решения систем нелинейных уравнений есть специальная стандартная подпрограмма, использующая итерационный метод Левенберга-Маркардта (разновидность градиентного метода). Процедура имеет ряд ограничений. По алгоритму, изложенному в данной работе, проводились расчеты примеров в случае существования точного аналитического решения задачи. Результаты вычислений можно оценить как вполне приемлемые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаймуратов Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта.-М.:Недра, 1980.-224с..
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.-М.: Мир, 1977.-404с.
3. Голубев Г.В. Решение задач фильтрации в трещиновато-пористых средах при нелинейных законах движения жидкостей с использованием дискретных особенностей // Труды XIV междун. симпозиума МДОЗМФ-2009, ч.2, Харьков-Херсон, 2009, с.278-281.

Надійшла у першій редакції 09.04.2010, в останній - 28.10.2010.