

УДК 519.63

Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках

Д. Ю. Косьянов, А. В. Русанов

*Институт проблем машиностроения им А. Н. Подгорного НАН Украины,
Украина*

Предложен способ построения реконструкции высокого порядка точности на неструктурированных сетках, на основе которого с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема для численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Выполнена численная оценка порядка аппроксимации реконструкции и порядка сходимости разностной схемы на ряде модельных задач.

Ключевые слова: неструктурированная сетка, метод контрольного объёма, реконструкция высокого порядка точности, явная схема.

Запропоновано спосіб побудови реконструкції високого порядку точності на неструктурованих сітках, на базі якого з застосуванням методу контрольного об'єму побудовано явну різницеву схему для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у часткових похідних гіперболічного типу. Виконано чисельну оцінку порядку апроксимації реконструкції та порядку збіжності різницевої схеми на низці модельних задач.

Ключові слова: неструктурована сітка, метод контрольного об'єму, реконструкція високого порядку точності, явна схема.

The new high order reconstruction method on unstructured grids is presented. The explicit finite volume scheme for hyperbolic conservation laws, which uses this reconstruction, is constructed. The numerical evaluation of the reconstruction order and order of scheme convergence is executed for several model tasks.

Key words: unstructured grid, finite volume method, high-order reconstruction, explicit scheme.

1. Введение

При моделировании различных физических процессов с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) гиперболического типа в областях сложной геометрической формы наиболее удобно выполнять отображение физической области на расчётную с помощью неструктурированной сетки. Такие сетки допускают автоматизацию процесса построения и адаптации к решению (например, области больших градиентов и разрывных решений) [1, 2].

В большей части используемых вычислительных методов для неструктурированных сеток применяется линейная реконструкция, что обеспечивает порядок точности не выше второго [3, 4]. Однако, как показывает опыт, повышение порядка точности разностных схем может увеличить общую эффективность вычислительного процесса, в том числе и для неструктурированных сеток [5]. Кроме того, схемы низкого порядка аппроксимации требуют существенного измельчения сетки в областях нестационарных процессов (вихревых течений), но при этом все же не

обеспечивают необходимой точности решений. Таким образом, повышение порядка точности является актуальной задачей [6].

Основные принципы построения вычислительных методов для неструктурированных сеток изложены в работах A. Harten & S. R. Chakravarthy [7], T.J. Barth & P.O. Fredrickson [3], C. Ollivier-Gooch [8], C.-W. Shu [5, 6], Z.J. Wang [9, 10] и других. Наиболее популярными являются схемы, опирающиеся на метод контрольного объёма, т.к. его применение обеспечивает локальное выполнение свойства консервативности для каждой ячейки.

В статье предложен подход к построению реконструкции произвольного порядка точности на неструктурированной сетке, на основе которого с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема высокого порядка аппроксимации по пространству. Выполнена численная оценка порядка аппроксимации реконструкции и порядка сходимости разностной схемы для ряда модельных задач.

2. Численный метод интегрирования модельных уравнений газогидродинамики

Рассматривается численное решение двумерных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа (модельные уравнения газогидродинамики):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = h(u), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2.1)$$

где x, y, t – декартовы координаты на плоскости и время; $u = u(x, y, t)$ – искомое решение уравнения (2.1); $f = f(u)$, $g = g(u)$ – потоковые функции; $h = h(u)$ – правая часть уравнения; Ω – расчётная область с кусочно-линейной границей.

Уравнение (2.1) решается с применением метода контрольного объёма для неструктурированной сетки, при котором расчётная область Ω отображается на сетку $T = \{P\}_{P \in T}$, состоящую из ограниченного числа произвольно расположенных (неупорядоченных между собой) многоугольников (ячеек) P (треугольников, выпуклых четырёхугольников и т.д.). Рассматривается случай согласованной дискретизации, при котором пересечение двух различных ячеек либо отсутствует, либо является отрезком или точкой.

После интегрирования по произвольной ячейке $P \in T$ и применения теоремы о среднем и теоремы Грина уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_P + \frac{1}{|P|} \oint_{\partial P} (f \cdot n_x + g \cdot n_y) dl = \bar{h}_P, \quad (2.2)$$

где $\bar{u}_P \equiv \bar{u}_P(t) = \frac{1}{|P|} \iint_P u(x, y, t) dx dy$ – среднее по ячейке P значение u в момент

времени t ; $|P|$ – площадь ячейки; ∂P – кусочно-линейная граница ячейки; $\vec{n} = (n_x, n_y)$ – вектор внешней единичной нормали к границе расчётной области;

$\bar{h}_P \equiv \bar{h}_P(t) = \frac{1}{|P|} \iint_P h(u(x, y, t)) dx dy$ – среднее по ячейке P значение правой части.

Дискретизация по времени. На временной оси задаётся сетка узлов вида $t_n = \tau \cdot n, \tau > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τ – шаг временной сетки. Линеаризация потоков выполнена следующим образом:

$$s = \beta \cdot s^{n+1} + (1 - \beta) \cdot s^n = s^n + \beta \cdot M^n \delta u^n, t \in [t_n, t_{n+1}], \beta \in [0, 1],$$

где $s = [f, g], M = [A, B] \equiv \left[\frac{\partial f(u)}{\partial u}, \frac{\partial g(u)}{\partial u} \right], \delta u^n = u^{n+1} - u^n$. Введенные сокращения означают, что линеаризация для потока f получается в случае $s = f$ и $M = A$, а для потока g при $s = g$ и $M = B$. Верхним индексом обозначается номер временного слоя. Для случая стационарного решения справедливо допущение $\delta u^n \approx \delta \bar{u}^n = \bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n$.

Аппроксимация производной по времени определяется выражением

$$\frac{d\bar{u}_P}{dt} \approx \frac{(1 + \gamma)\delta\bar{u}_P^n - \gamma\delta\bar{u}_P^{n-1}}{\tau}.$$

β, γ являются коэффициентами схемы.

Уравнение (2.2) после линеаризации потоков и замены производной по времени на соответствующее аппроксимирующее выражение примет вид

$$\frac{(1 + \gamma)\delta\bar{u}_P^n - \gamma\delta\bar{u}_P^{n-1}}{\tau} + \frac{\beta}{|P|} \oint_{\partial P} (A^n \cdot n_x + B^n \cdot n_y) \delta\bar{u}_P dl = RSH_P(\bar{u}^n), \quad (2.3)$$

$$RSH_P(\bar{u}^n) \equiv \bar{h}_P^n - \frac{1}{|P|} \oint_{\partial P} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl. \quad (2.4)$$

Разностная аппроксимация исходных уравнений в форме (2.3) – (2.4) в общем случае соответствует неявной трёхслойной схеме. Правая часть $RSH_P(\bar{u}^n)$ определяет явный оператор, а левая – неявный. При $\gamma = 0$ схема является двухслойной по времени, а при $\beta = 0$ – явной схемой. Более подробное описание аппроксимации уравнения (2.3) и применение трёхслойной полностью неявной схемы с коэффициентами $\gamma = 1/2$ и $\beta = 1$ описано в [11]. В статье будет рассмотрен случай явной двухслойной схемы первого порядка аппроксимации по времени, соответствующей $\gamma = 0$ и $\beta = 0$.

Дискретизация по пространству. Граница ячейки $P \in T$ задаётся набором из n_P рёбер, т.е. $\partial P = \bigcup_{i=1}^{n_P} \Gamma_i$. Интеграл в (2.4) по свойству аддитивности принимает вид

$$\oint_{\partial P} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl = \sum_{i=1}^{n_P} \int_{\Gamma_i} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl.$$

Параметризация ребра Γ_i задаётся линейной функцией

$$r(\Gamma_i, s) = \frac{r_{\Gamma_i}^{(1)} + r_{\Gamma_i}^{(2)}}{2} + s \cdot \frac{r_{\Gamma_i}^{(2)} - r_{\Gamma_i}^{(1)}}{2}, \quad r = [x, y], \quad s \in [-1, 1],$$

где $r_{\Gamma_i}^{(1)}, r_{\Gamma_i}^{(2)}$ – координаты вершин ребра в порядке, согласованном с ориентацией

ребра к внешней нормали. При этом $|\Gamma_i| = \sqrt{(x_{\Gamma_i}^{(2)} - x_{\Gamma_i}^{(1)})^2 + (y_{\Gamma_i}^{(2)} - y_{\Gamma_i}^{(1)})^2}$ – длина

ребра Γ_i ; $n_{x,i} = \frac{y_{\Gamma_i}^{(2)} - y_{\Gamma_i}^{(1)}}{|\Gamma_i|}$, $n_{y,i} = -\frac{(x_{\Gamma_i}^{(2)} - x_{\Gamma_i}^{(1)})}{|\Gamma_i|}$ – компоненты вектора внешней

единичной нормали. После применения параметризации интеграл в (4) определяется как

$$\oint_{\partial P} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_P} \frac{|\Gamma_i|}{2} \int_{-1}^1 (f(u(x(\Gamma_i, s), y(\Gamma_i, s), t_n)) \cdot n_{x,i} + g(u(x(\Gamma_i, s), y(\Gamma_i, s), t_n)) \cdot n_{y,i}) ds.$$

Приближенное вычисление искомых интегралов с необходимым порядком точности обеспечивает трёхточечная квадратурная формула Гаусса [4]

$$\int_{-1}^1 q(u(x(\Gamma_i, s), y(\Gamma_i, s), t_n)) ds \approx \sum_{j=1}^3 \omega_j q(u(x(\Gamma_i, s_j), y(\Gamma_i, s_j), t_n)), \quad q = [f, g]$$

$$\omega_1 = \frac{8}{9}, \quad \omega_2 = \frac{5}{9}, \quad \omega_3 = \frac{5}{9}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad s_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Тогда явный оператор (4) примет вид

$$RSH_P(\bar{u}^n) \equiv \bar{h}_P^n - \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{n_P} \sum_{j=1}^3 \frac{\omega_j |\Gamma_i|}{2} (f(u_j^n) \cdot n_{x,i} + g(u_j^n) \cdot n_{y,i}), \quad (2.5)$$

где $u_j^n = u(x(\Gamma_i, s_j), y(\Gamma_i, s_j), t_n)$ – значение неизвестной функции в точках интегрирования на грани ячейки. Для определения этого значения необходимо построить реконструкцию нужного порядка точности по заданным осредненным величинам $\{\bar{u}_P\}_{P \in \mathcal{T}}$. Исходными данными для определения u_j^n являются два интерполированных в точку $(x(\Gamma_i, s_j), y(\Gamma_i, s_j))$ значения: u_{jL}^n из P и u_{jR}^n из P_i (рис. 1). Здесь P_i – смежная по i -му ребру ячейка. Величина u_j^n находится из условия обеспечения «разностей против потока»:

$$u_j^n = \begin{cases} u_{jL}^n, & \text{при } (n_{x,i}A + n_{y,i}B)_{u=(u_{jL}^n + u_{jR}^n)/2} \geq 0, \\ u_{jR}^n, & \text{при } (n_{x,i}A + n_{y,i}B)_{u=(u_{jL}^n + u_{jR}^n)/2} < 0. \end{cases}$$

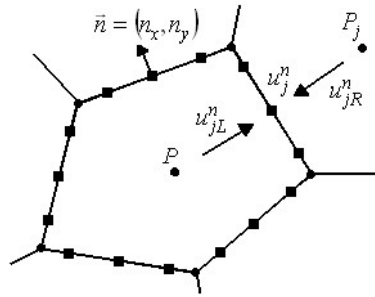


Рис. 1. Схема определения значения функции в точках интегрирования

3. Реконструкция

Для создания схем высокого порядка аппроксимации по пространству необходимо построить реконструкцию переменных внутри ячейки [3, 4, 8]. В работах Harten & Chakravarthy [7] и Carl Ollivier-Gooch [8] определены следующие основные свойства, которым должна удовлетворять полиномиальная реконструкция:

- реконструкция является гладкой функцией внутри каждой ячейки и разрывной на границах со смежными ячейками;

- везде, где исходная функция $u(x, y)$ является гладкой, реконструкция $R(x, y)$ удовлетворяет «свойству аппроксимации» $R(x, y) = u(x, y) + d^k$, где k – порядок аппроксимации реконструкции, d – линейный размер ячейки;

- при использовании осредненных по ячейке значений как исходных данных, реконструкция должна удовлетворять свойству консервативности $\bar{R}_P = \bar{u}_P, P \in T$;

- реконструкция строится по однотипному шаблону;
- реконструкция удовлетворяет принципу ENO (существенного не осциллирования), т.е. не способствует появлению существенных осцилляций вблизи разрывов и локальных экстремумов исходной функции.

По аналогии с [3, 7, 8], в работе применена кусочно-полиномиальная реконструкция, заданная многочленом Тейлора степени $(k-1)$, записанным относительно центра ячейки, где k – порядок точности схемы. Для случая 4-го порядка аппроксимации вид реконструкции следующий:

$$\begin{aligned}
 R(x, y) = & \bar{u}_P + \bar{x}_P(\hat{u}_x)_P + \bar{y}_P(\hat{u}_y)_P + \\
 & + \left[\frac{\bar{x}_P^2 - I_{xx}}{2} \right] (\hat{u}_{xx})_P + \left[\bar{x}_P \bar{y}_P - I_{xy} \right] (\hat{u}_{xy})_P + \left[\frac{\bar{y}_P^2 - I_{yy}}{2} \right] (\hat{u}_{yy})_P + \\
 & + \left[\frac{\bar{x}_P^3 - I_{xxx}}{6} \right] (\hat{u}_{xxx})_P + \left[\frac{\bar{x}_P^2 \bar{y}_P - I_{xxy}}{2} \right] (\hat{u}_{xxy})_P +
 \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\bar{x}_P \bar{y}_P^2 - I_{xyy}}{2} \right] (\hat{u}_{xyy})_P + \left[\frac{\bar{y}_P^3 - I_{yyy}}{6} \right] (\hat{u}_{yyy})_P,$$

$$I_{\frac{xxxxyy}{n \quad m}} = \frac{1}{|P|} \oint_{\partial P} \frac{\bar{x}_P^{n+1} \bar{y}_P^m}{n+1} dy, \quad \bar{x}_P = x - x_P, \quad \bar{y}_P = y - y_P,$$

где x_P, y_P – координаты центра ячейки $P \in T$, \hat{u}_ψ – значения аппроксимированных производных, $\psi = [x, y, xx, xy, yy, \dots]$. Для удовлетворения «свойства аппроксимации» $R(x, y) = u(x, y) + d^k$ необходимо выполнение следующих условий:

$$(\hat{u}_\psi)_P = (u_\psi)_P + O(d), \quad \psi = [xxx, xxy, xyy, yyy],$$

$$(\hat{u}_\psi)_P = (u_\psi)_P + O(d^2), \quad \psi = [xx, xy, yy],$$

$$(\hat{u}_\psi)_P = (u_\psi)_P + O(d^3), \quad \psi = [x, y].$$

Таким образом, для построения реконструкции нужно определить неизвестные производные с заданным порядком аппроксимации. Как известно [5, 12], по трём точкам на плоскости, образующим треугольник, можно построить линейную реконструкцию, которая позволяет найти значения u_x и u_y с первым порядком точности по пространству. Для текущего контрольного объёма P рассмотрим n_P его соседей: P_1, \dots, P_{n_P} . По тройке ячеек P, P_i, P_j , центры которых образуют треугольник, с помощью первых разностей определяются значения первых производных с первым порядком точности:

$$\delta_x u_{P,i,j} = \frac{\bar{y}_{P_j} u_{P_i} - \bar{y}_{P_i} u_{P_j}}{\Delta_{Pij}}, \quad \delta_y u_{P,i,j} = \frac{\bar{x}_{P_i} u_{P_j} - \bar{x}_{P_j} u_{P_i}}{\Delta_{Pij}}, \quad \Delta_{Pij} = \bar{x}_{P_i} \bar{y}_{P_j} - \bar{x}_{P_j} \bar{y}_{P_i},$$

$$u_{P_s} = u_{P_s} - u_P, \quad s = [i, j]$$

Общее число таких троек m_P для ячейки P зависит от её формы и расположения смежных ячеек. По аналогии с работами [5, 8] для каждой используемой тройки определяются неотрицательные весовые коэффициенты

$$\omega_{P,i,j}^{(z)} \geq 0, \quad z = [x, y], \quad \text{удовлетворяющие свойству нормировки} \quad \sum_{k=1}^{m_P} \omega_{P,i(k),j(k)}^{(z)} = 1.$$

Весовые разности записываются как:

$$\delta_x u_P = \sum_{k=1}^{m_P} \omega_{P,i(k),j(k)}^{(x)} \delta_x u_{P,i(k),j(k)}, \quad \delta_y u_P = \sum_{k=1}^{m_P} \omega_{P,i(k),j(k)}^{(y)} \delta_y u_{P,i(k),j(k)}. \quad (3.2)$$

Для вычисления производных с заданным порядком точности необходимо сохранить коэффициенты разложения (3.2) для производных до третьего порядка включительно.

Вторые разности, построенные по P, P_i, P_j , имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{xx}u_{P,i,j} &= \frac{\bar{y}_{P_j} \overline{\delta_{x^2}u_{P_i}} - \bar{y}_{P_i} \overline{\delta_{x^2}u_{P_j}}}{\Delta_{Pij}}, \\ \delta_{xy}u_{P,i,j} &= \gamma_{xy} \frac{\bar{y}_{P_j} \overline{\delta_{xy}u_{P_i}} - \bar{y}_{P_i} \overline{\delta_{xy}u_{P_j}}}{\Delta_{Pij}} + (1 - \gamma_{xy}) \frac{\bar{x}_{P_i} \overline{\delta_{xy}u_{P_j}} - \bar{x}_{P_j} \overline{\delta_{xy}u_{P_i}}}{\Delta_{Pij}}, \\ \delta_{yy}u_{P,i,j} &= \frac{\bar{x}_{P_i} \overline{\delta_{y^2}u_{P_j}} - \bar{x}_{P_j} \overline{\delta_{y^2}u_{P_i}}}{\Delta_{Pij}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где γ_{xy} – коэффициент интерполяции между двумя способами вычисления второй смешанной производной. По аналогии с первыми разностями определяются неотрицательные весовые коэффициенты $\omega_{P,i,j}^{(z)} \geq 0, z = [xx, xy, yy]$.

Вторые весовые разности и их разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}u_P &= \sum_{k=1}^{m_P} \omega_{P,i,j}^{(xx)} \delta_{xx}u_{P,i,j}, & \Delta_{xy}u_P &= \sum_{k=1}^{m_P} \omega_{P,i,j}^{(xy)} \delta_{xy}u_{P,i,j}, \\ \Delta_{yy}u_P &= \sum_{k=1}^{m_P} \omega_{P,i,j}^{(yy)} \delta_{yy}u_{P,i,j}, & \begin{bmatrix} \delta_{xx}u \\ \delta_{xy}u \\ \delta_{yy}u \end{bmatrix}_P &= A^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_{xx}u \\ \Delta_{xy}u \\ \Delta_{yy}u \end{bmatrix}_P. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В (3.4) A^{-1} определяется из выражения

$$\begin{bmatrix} \Delta_{xx}u \\ \Delta_{xy}u \\ \Delta_{yy}u \end{bmatrix}_P = A \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix}_P + O(d),$$

полученного при разложении вторых весовых разностей в ряд Тейлора относительно точки P с учётом коэффициентов разложения первых разностей. Число γ_{xy} может быть использовано для обеспечения существования A^{-1} . Как и ранее коэффициенты разложения (3.4) хранятся и используются в дальнейших вычислениях.

Процедура построения разностей более высокого порядка аналогична ранее изложенной и содержит шаг построения вспомогательных выражений $\delta_{\psi}u_{P,i,j}$, шаг весового осреднения с определением $\Delta_{\psi}u_P$ и шаг коррекции, в результате которого рассчитываются $\delta_{\psi}u_P$. После определения $\delta_{\psi}u_P$ всех порядков (первых, вторых, третьих и т.д.) вычисляются производные с нужным порядком точности методом рекурсии, начиная с производных более высоких порядков. Так, для производных до третьего порядка эта процедура имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xxx} \\ \bar{u}_{xxy} \\ \bar{u}_{xyy} \\ \bar{u}_{yyy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_{xxx}u \\ \delta_{xxy}u \\ \delta_{xyy}u \\ \delta_{yyy}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xxx} \\ u_{xxy} \\ u_{xyy} \\ u_{yyy} \end{bmatrix} + O(d), & \begin{bmatrix} \bar{u}_{xx} \\ \bar{u}_{xy} \\ \bar{u}_{yy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_{xx}u \\ \delta_{xy}u \\ \delta_{yy}u \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} \bar{u}_{xxx} \\ \bar{u}_{xxy} \\ \bar{u}_{xyy} \\ \bar{u}_{yyy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} + O(d^2), \\ & & \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_x u \\ \delta_y u \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} \bar{u}_{xx} \\ \bar{u}_{xy} \\ \dots \\ \bar{u}_{xxy} \\ \bar{u}_{xyy} \\ \bar{u}_{yyy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + O(d^3), \end{aligned}$$

где B, C – матрицы коэффициентов разложения. Описанный подход применим как для случая значений, заданных в центрах ячеек, так и для осредненных по контрольному объёму.

Минимизация производных. Для обеспечения нелинейной устойчивости явной схемы (уменьшения возможных осцилляций решения) предлагается использовать минимизацию производных:

$$(\hat{u}_\psi)_P = \min \text{mod} \left((\bar{u}_\psi)_P, (\tilde{u}_\psi)_{P_1}, \dots, (\tilde{u}_\psi)_{P_{n_P}} \right), \quad \psi = [x, y, xx, xy, yy, xxx, xxy, xyy, yyy],$$

где

$$\min \text{mod}(a, b) = \begin{cases} 0, & ab \leq 0, \\ a, & |a| \leq |b|, ab > 0, \\ b, & |b| < |a|, ab > 0, \end{cases}$$

$$\min \text{mod}(a, b, c) = \min \text{mod}(\min \text{mod}(a, b), c),$$

$(\tilde{u}_\psi)_{P_i}$ – значение соответствующей интерполированной производной из соседней i -й ячейки:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_\psi)_{P_i} &= (\bar{u}_\psi)_{P_i}, \quad \psi = [xxx, xxy, xyy, yyy] \\ (\tilde{u}_\psi)_{P_i} &= (\bar{u}_\psi)_{P_i} + (x_P - x_{P_i}) (\bar{u}_{\psi xx})_{P_i} + (y_P - y_{P_i}) (\bar{u}_{\psi yy})_{P_i}, \quad \psi = [xx, xy, yy] \\ (\tilde{u}_\psi)_{P_i} &= (\bar{u}_\psi)_{P_i} + (x_P - x_{P_i}) (\bar{u}_{\psi xx})_{P_i} + (y_P - y_{P_i}) (\bar{u}_{\psi yy})_{P_i} + \\ &+ \frac{(x_P - x_{P_i})^2}{2} (\bar{u}_{\psi xxx})_{P_i} + (x_P - x_{P_i})(y_P - y_{P_i}) (\bar{u}_{\psi xxy})_{P_i} + \frac{(y_P - y_{P_i})^2}{2} (\bar{u}_{\psi yyy})_{P_i}, \quad \psi = [x, y] \end{aligned}$$

Таким образом, при минимизации из предложенного набора аппроксимаций выбирается значение наименьшее по модулю.

4. Численные результаты

Численное тестирование предложенного подхода выполнялось для гладких функций. Оценивались порядки аппроксимации реконструкции и сходимости решений.

Оценка порядка аппроксимации реконструкции. Рассмотрены реконструкции двух функций:

- $f_1(x, y) = x^3 + 5x^2y + xy^2 - 3y^3 + 3x + y + 1$;
- $f_2(x, y) = \sin(2\pi(x+y))\sin(2\pi(x-y))$,

в расчётной области $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$. Для дискретизации выбраны три типа разностной сетки: структурированная Ω_1 (рис. 2, а), регулярная неструктурированная Ω_2 (рис. 2, б) и нерегулярная неструктурированная Ω_3 (рис. 2, в). Оценка порядка аппроксимации реконструкции выполнялась в следующей последовательности:

- по заданной аналитической функции вычисляются точные значения в центрах масс ячеек или осреднённые значения функции для сеток разных размерностей;
- по полученным точным значениям строится реконструкция в каждой ячейке;
- вычисляются отклонения значений реконструкции от точных значений в пробных точках (рис. 2, г);
- вычисляются сеточные нормы L_1, L_2, C_{\max} и оценивается численный порядок аппроксимации.

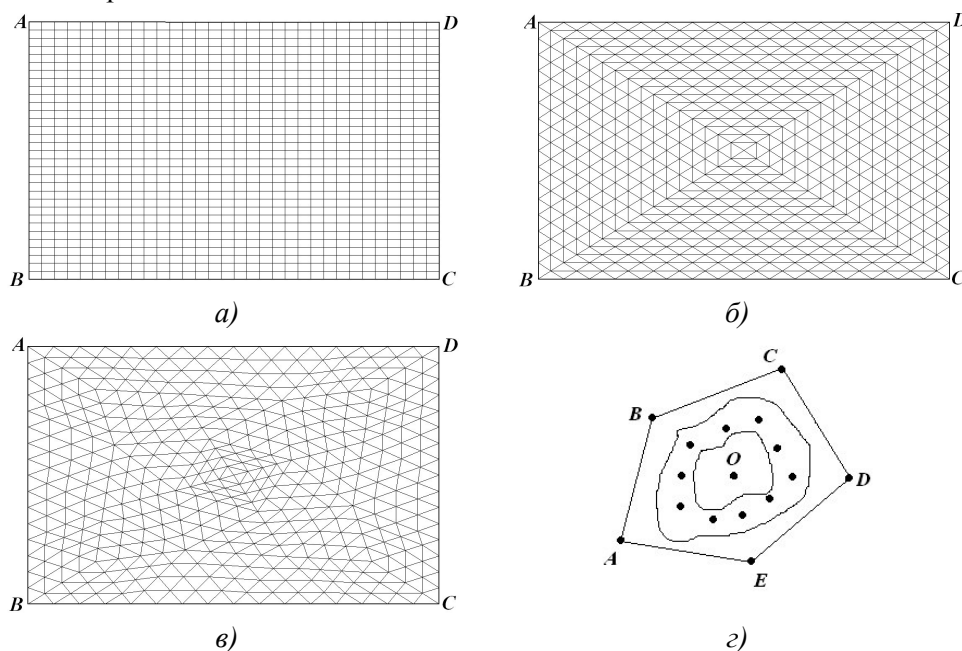


Рис. 2. Разностные сетки и схематическое расположение пробных точек:

а) Ω_1 ; б) Ω_2 ; в) Ω_3 ; г) пробные точки (в выделенной области)

Проверка выполнена для трёх уровней (размерностей) сетки. При увеличении номера уровня сетки число ячеек увеличивается в 4 раза, а диаметр – уменьшается в 2 раза. Параметры сеток для первого уровня приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры сеток первого уровня

Тип сетки	Число ячеек	Диаметр сетки
Ω_1	1024	3,125e-02
Ω_2	1024	6,250e-02
Ω_3	768	6,386e-02

Для рассматриваемых функций построены реконструкции 3-го и 4-го порядков аппроксимации по пространству, использующие осреднённые значения по ячейке. На границе расчётной области задано точное значение функции.

Порядок аппроксимации реконструкции при переходе с уровня на уровень (уменьшении диаметра сетки) оценивался по трём стандартным сеточным нормам L_1 , L_2 и C_{\max}

$$k_i^{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right)}{\ln(2)},$$

где N_i – значение сеточной нормы на i -м уровне сетки. В таблицах 2 – 5 представлены результаты численного исследования.

Таблица 2. Оценка порядка аппроксимации для f_1 . Реконструкция 4-го порядка

Тип сетки	Тип нормы	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	3,56e-015	–	6,94e-015	–	1,43e-014	–
	L_2	5,82e-015	–	1,14e-014	–	2,36e-014	–
	C_{\max}	3,73e-014	–	1,05e-013	–	2,31e-013	–
Ω_2	L_1	4,62e-014	–	6,72e-014	–	7,16e-014	–
	L_2	1,57e-013	–	1,72e-013	–	1,45e-013	–
	C_{\max}	5,35e-012	–	1,12e-011	–	1,14e-011	–
Ω_3	L_1	2,90e-014	–	6,02e-014	–	1,19e-013	–
	L_2	5,03e-014	–	1,03e-013	–	1,96e-013	–
	C_{\max}	6,18e-013	–	1,10e-012	–	3,84e-012	–

Таблиця 3. Оцінка порядку апроксимації для f_1 . Реконструкція 3-го порядку

Тип сетки	Тип норми	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	1,37e-004	–	1,73e-005	2,98	2,18e-006	2,99
	L_2	1,56e-004	–	1,97e-005	2,99	2,47e-006	2,99
	C_{\max}	2,94e-004	–	3,68e-005	3,00	4,60e-006	3,00
Ω_2	L_1	1,30e-004	–	1,63e-005	2,99	2,05e-006	2,99
	L_2	1,61e-004	–	2,02e-005	3,00	2,53e-006	2,99
	C_{\max}	4,79e-004	–	5,99e-005	3,00	7,49e-006	3,00
Ω_3	L_1	1,62e-004	–	2,07e-005	2,97	2,61e-006	2,99
	L_2	1,99e-004	–	2,54e-005	2,98	3,20e-006	2,99
	C_{\max}	6,56e-004	–	8,25e-005	2,99	1,03e-005	3,00

Таблиця 4. Оцінка порядку апроксимації для f_2 . Реконструкція 4-го порядку

Тип сетки	Тип норми	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	1,35e-003	–	5,63e-005	4,58	2,18e-006	4,42
	L_2	1,73e-003	–	8,18e-005	4,40	2,47e-006	4,38
	C_{\max}	5,46e-003	–	3,61e-004	3,92	4,60e-006	3,98
Ω_2	L_1	9,21e-004	–	4,81e-005	4,26	2,64e-006	4,15
	L_2	1,39e-003	–	7,44e-005	4,22	3,94e-006	4,20
	C_{\max}	4,89e-003	–	3,24e-004	3,92	2,29e-005	3,98
Ω_3	L_1	1,10e-003	–	5,48e-005	4,33	2,71e-006	4,29
	L_2	1,52e-003	–	8,17e-005	4,22	4,06e-006	4,32
	C_{\max}	7,19e-003	–	5,55e-004	3,70	2,05e-005	3,86

Таблица 5. Оценка порядка аппроксимации для f_2 . Реконструкция 3-го порядка

Тип сетки	Тип нормы	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	4,07e-003	–	4,86e-004	3,07	6,02e-005	3,01
	L_2	4,84e-003	–	5,80e-004	3,06	7,23e-005	3,01
	C_{\max}	1,03e-002	–	1,34e-003	2,94	1,73e-004	2,96
Ω_2	L_1	3,82e-003	–	4,98e-004	2,94	6,32e-005	2,98
	L_2	4,83e-003	–	6,32e-004	2,94	8,03e-005	2,98
	C_{\max}	1,20e-002	–	1,65e-003	2,86	2,11e-004	2,96
Ω_3	L_1	4,32e-003	–	5,41e-004	3,00	6,77e-005	3,00
	L_2	5,47e-003	–	6,93e-004	2,98	8,74e-005	2,99
	C_{\max}	1,73e-002	–	2,44e-003	2,82	3,12e-004	2,97

Из табл. 2 видно, что реконструкция 4-го порядка является точной для функции f_1 . В целом, порядок аппроксимации, полученный численно, хорошо согласуется с теоретическим и является однородным (существенно не зависит от типа сетки), а значение норм увеличивается с ростом степени нерегулярности сетки.

При проверке численного порядка аппроксимации для других граничных условий и порядков реконструкции численные результаты так же хорошо согласуются с теоретическими.

Оценка порядка сходимости схемы. Тестирование схемы выполнялось на модельной двухмерной (по пространству) задаче для линейного уравнения переноса $u_t + u_x + u_y = H$, $(x, y) \in \Omega$, где $u = u(t, x, y)$ – искомое решение задачи.

Начальные условия определяются выражением $u(0, x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. На участках границы АВ и ВС расчётной области заданы граничные условия в виде значений точного решения задачи (см. рис. 2, а).

Рассмотрены два варианта задачи с H , для которых существует стационарное решение:

- Test1. $H(x, y) = 2\pi \sin(2\pi(x + y))$, $u(t, x, y) = \sin(2\pi \cdot x) \cdot \sin(2\pi \cdot y)$;
- Test2. $H(x, y) = 0$, $u(t, x, y) = \sin(2\pi(x - y))$.

Расчеты выполнены для пяти уровней сетки. Порядок сходимости численного решения к точному при переходе с уровня на уровень оценивался по сеточным нормам L_1 , L_2 и C_{\max}

$$k_i^{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right)}{\ln(2)}.$$

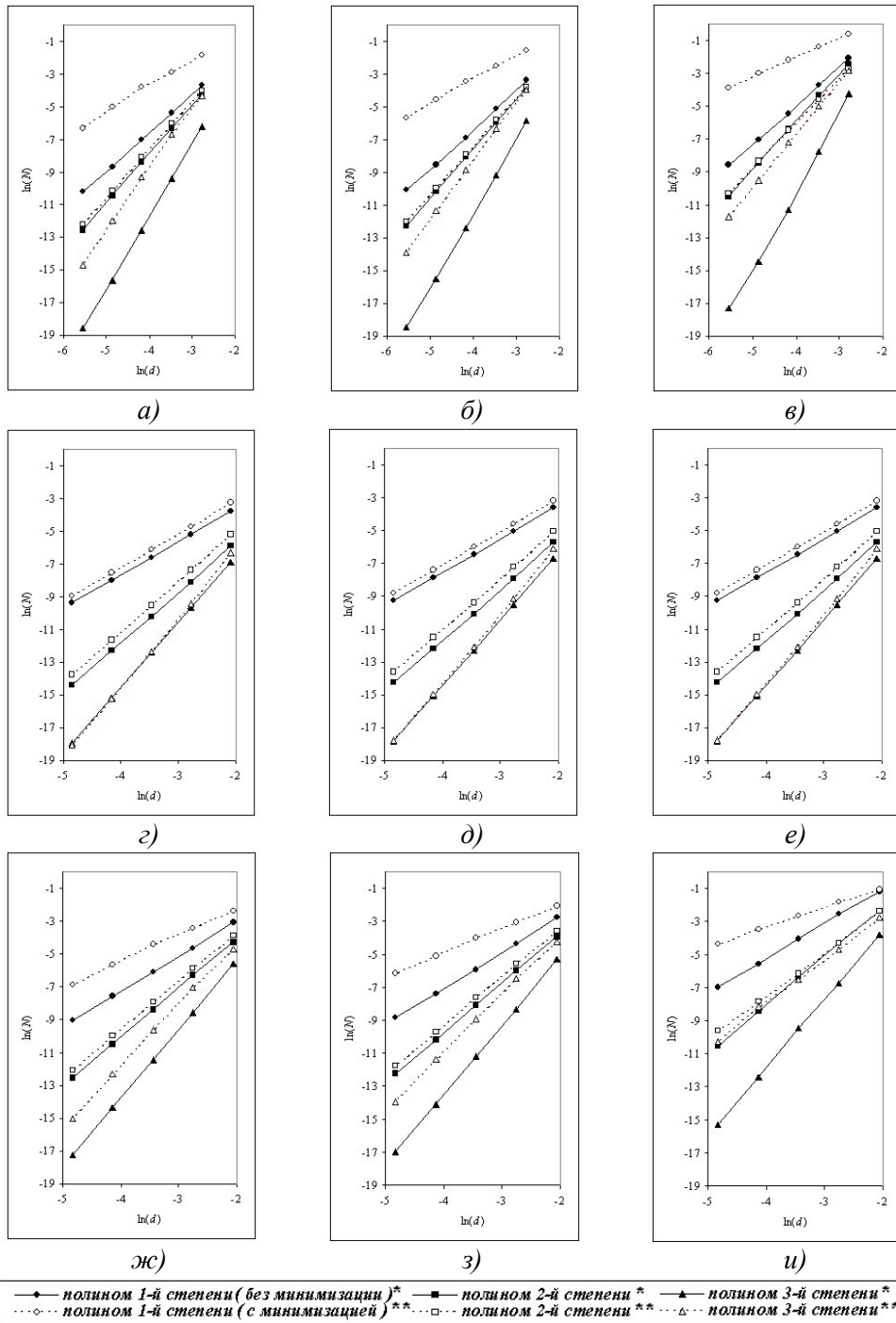


Рис. 3. Графики сходимости для Test 1
 а, г, ж) – в норме L_1 ; б, д, з) – в норме L_2 ; в, е, и) – в норме C_{\max}
 а, б, в) – Ω_1 ; г, д, е) – Ω_2 ; ж, з, и) – Ω_3

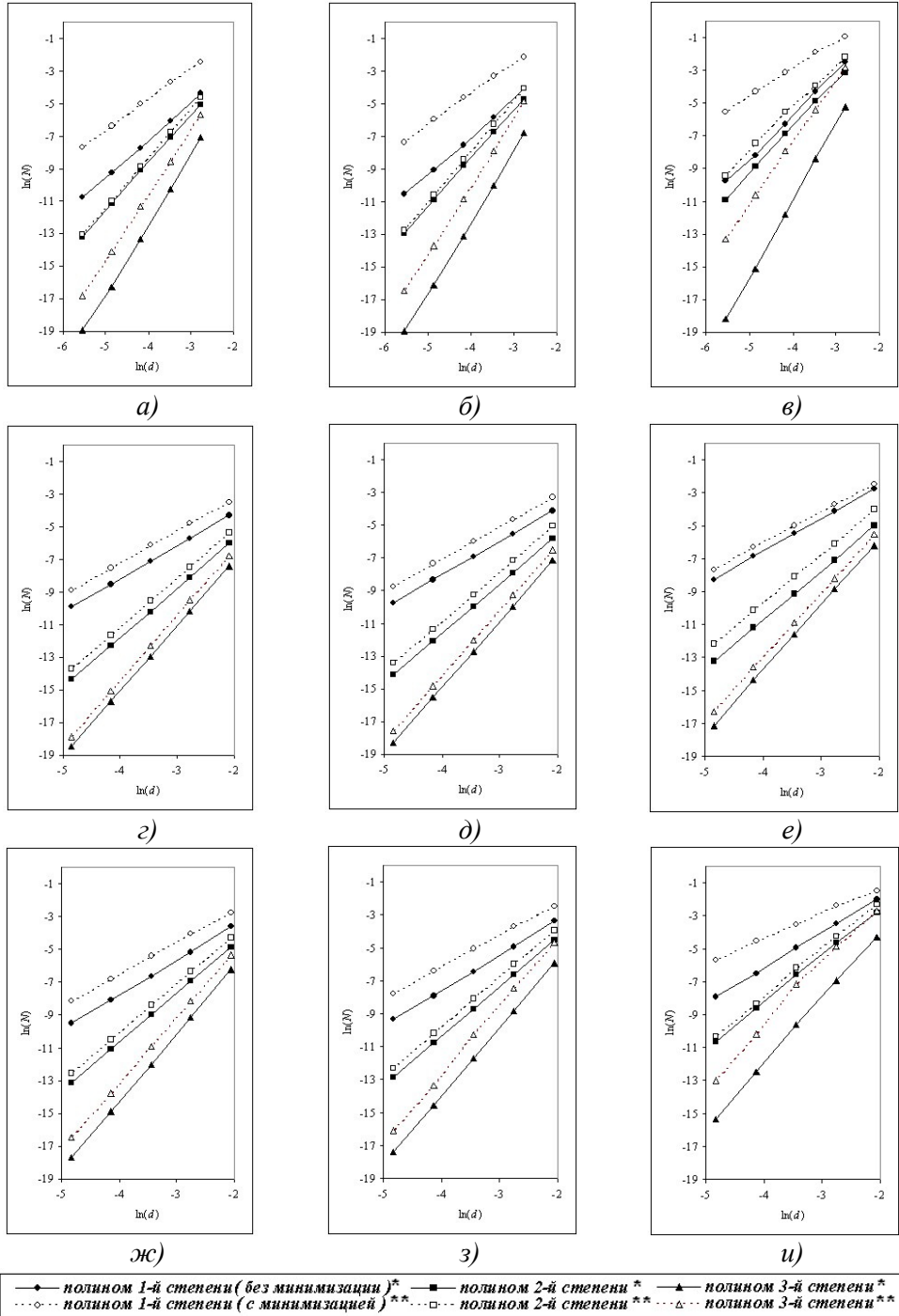


Рис. 4. Графики сходимости для Test 2
 а, г, ж) – в норме L_1 ; б, д, з) – в норме L_2 ; в, е, и) – в норме C_{\max}
 а, б, в) – Ω_1 ; г, д, е) – Ω_2 ; ж, з, и) – Ω_3

Расчёты выполнены по явным схемам с числом Куранта $\nu = 0,25$. Итерации по времени проводились до получения стационарного решения. На рис. 3 и 4 приведены графики сходимости в логарифмической шкале для первого и второго тестовых расчётов соответственно. Расчёты с применением процедуры минимизации производных изображены пунктирной линией, а без неё – сплошной.

Из представленных результатов видно, что значения порядков сходимости (наклон графика кривой) существенно не зависит от типа сетки, а значение численных норм увеличивается с увеличением степени нерегулярности сетки. Порядок сходимости схем, использующих минимизацию пространственных производных, в целом на единицу меньше порядка сходимости схем без минимизации и близок к значению степени полинома реконструкции.

5. Выводы

В статье предложен подход к построению реконструкции произвольного порядка точности на неструктурированной сетке. Расчёт значений производных выполняется пошагово, благодаря чему размерности матриц, обращаемых при их определении, уменьшаются. Численная оценка порядка аппроксимации реконструкции для гладких функций хорошо согласуется с теоретическим порядком и является однородной (существенно не зависит от типа сетки), а значение сеточных норм увеличивается с ростом степени нерегулярности сетки. На основе реконструкции и с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема высокого порядка аппроксимации по пространству. Использование минимизации производных для предотвращения появления существенных осцилляций решений приводит к понижению порядка сходимости до степени полинома реконструкции. В дальнейшей работе предполагается проверка численной схемы при моделировании разрывных решений, для чего планируется повышение её порядка аппроксимации по времени и применение весовых коэффициентов как анализаторов гладкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Venkatakrishnan V. A perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 33. – 1996. – v. 34. – P.533-547.
2. Болдарев А.С., Гасилов В.А., Ольховская О.Г. К решению гиперболических уравнений на неструктурированных сетках // Математическое моделирование. – 1996. – № 3 (8). – С.51-78.
3. Barth T.J., Fredrickson P.O. High-Order Solution of the Euler Equations on Unstructured grids Using Quadratic Reconstruction // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 31. – 1993. – 15 p.
4. Aboiyar T., Georgoulis E.H., Iske A. High-order WENO finite scheme using polyharmonic spline reconstruction // Proc. of the intern. conf. NAAT. – 2006. – P.1-14.
5. Shu C.-W., Hu C. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular meshes // J. of Comp. Phys. – 1999. – v. 150. – P.97-127.

6. Shu C.-W. High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD // Intern. J. of Comp. Fluid Dynam. – 2003. – v. 17. – P.107-118.
7. Harten A., Chakravarthy S.R. Multi-dimensional ENO schemes for general geometries // ICASE Report № 91-76. – 1991. – 68 p.
8. Ollivier-Gooch C. Quasi-ENO Schemes for Unstructured meshes based on unlimited data-depend least squares reconstruction // J. of Comp. Phys. – 1997. – v. 133. – P.6-17.
9. Wang Z.J., Liu Y. A high-order spectral (Finite) volume method for conservation laws on unstructured grids // AIAA Paper – 2002. – P. 1-13.
10. Wang Z.J., Liu Y., Vinokur M. Multi-dimensional Spectral Difference method for unstructured grids // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 43. – 2005. – P.1-12.
11. Русанов А.В., Косьянов Д.Ю. Неявная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках // Пробл. машиностроения. – 2010. – № 3. – С.30-37.
12. Елизарова Т.Г., Серёгин В.В. Аппроксимация уравнений квазигазодинамики на треугольных сетках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2005. – №4. – С.15-18.