

УДК 51-73

Сходящиеся бесконечные определители в исследованиях периодических плазменных волноводов и анализ их влияния на дисперсию электромагнитных волн

Н. А. Азаренков, В. И. Ткаченко, И. В. Ткаченко
*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт", Украина*

Рассмотрены собственные аксиально-симметричные электромагнитные волны, распространяющиеся в гофрированном цилиндрическом волноводе, заполненном холодной магнитоактивной плазмой. В математической модели дисперсию этих волн описывает бесконечный определитель, который исследован. Показано, что максимальная, или резонансная, ширина полос непрозрачности может быть пропорциональна глубине гофра в степени, равной половинной величине количества пересечений дисперсионных кривых на заданной линии дисперсионной плоскости. Определены также условия существования полос непрозрачности, ширина которых пропорциональна квадрату резонансной ширины непрозрачности.

Ключевые слова: бесконечный определитель, гофрированный волновод, зоны непрозрачности.

Досліджено власні аксіально-симетричні електромагнітні хвилі, що поширюються в гофрованому циліндричному хвилеводі, заповненому холодною магнітоактивною плазмою. В математичній моделі дисперсію цих хвиль описує досліджений безкінечний визначник. Показано, що максимальна, або резонансна, ширина смуг непрозорості може бути пропорційна глибині гофра у степені, що дорівнює половинній кількості перетинань дисперсійних кривих на заданій лінії дисперсійної плоскості. Визначені також умови існування смуг непрозорості, ширина яких пропорційна квадрату резонансної ширини непрозорості.

Ключові слова: безкінечний визначник, гофрований хвилевод, смуги непрозорості.

Eigen axially symmetric electromagnetic waves propagating in the rippled cylindrical waveguide, filled by the cold magnetoactive plasma are investigated. The infinite determinant defining the dispersion of considered electromagnetic waves is obtained. It is shown that the width of maximum or resonant forbidden band is proportional to the ripple depth in the power of half of the crossings numbers of the dispersion curves on the determined dispersion plane. Also the condition of existence of forbidden bands which width is proportional to the square of a resonant forbidden band width is determined.

Key words: infinite determinant, rippled waveguide, forbidden bands.

1. Введение

Исследование распространения электромагнитных волн в плазме, которая ограничена проводящим волноводом с периодически изменяющимся вдоль его длины радиусом [1], либо находящейся под воздействием внешних периодически изменяющихся электрических полей [2] всегда связано с поиском дисперсионных зависимостей, которые устанавливают связь между волновыми числами и частотами рассматриваемых волн. В периодических средах

дисперсионная зависимость может быть получена в результате решения бесконечной системы уравнений, что, в свою очередь, приводит к необходимости вычисления бесконечных определителей (БО) и приравнения их нулю.

С вычислением БО связано также решение задач о дифракции электромагнитных волн на периодических металлических решетках [3, 4].

В некоторых случаях удается аналитически вычислить БО. К ним следует отнести определитель типа Хилла [5,6] и определитель типа Коха [1, 5-7].

Однако, в общем виде вычислить БО не удается.

Один из методов вычисления БО, основан на предположении о справедливости гипотезы Релея, которая приводит к ограничению величины параметра периодической неоднородности, и замене хорошо обусловленной бесконечной матрицы ее конечным аналогом [1]. Этот аналог получается из исходного БО методом учета только тех элементов определителя, которые расположены на счетном количестве линий $n = N < \infty$, симметричных и параллельных главной диагонали. Остальные элементы БО ($n \geq N + 1$), в силу малого значения параметра периодической неоднородности, должны быть заменены нулями. Аналитическое или численное (при $N > 1$) вычисление таких определителей дает искомую дисперсионную зависимость, задающую собственные волны системы. Однако, указанное отбрасывание бесконечного числа элементов БО, несмотря на сохранение его сходимости, может сужать диапазон существования собственных волн и, в конечном итоге, давать неполную физическую картину рассматриваемых волновых процессов в периодических плазменных волноводах. Отмеченный факт подтверждается в ряде работ [см., например, 8, 9], где учет бесконечного числа элементов определителя позволяет обосновать наличие плотного спектра в периодических плазменных волноводах [10], и описать существование бесконечного числа полос непрозрачности в них [11].

В настоящей работе исследовано влияние свойств БО на дисперсию аксиально-симметричных электромагнитных волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме, полностью заполняющей идеально проводящий металлический гофрированный волновод с произвольной глубиной гофра. Основное внимание уделено анализу сходящихся функционалов, образованных из бесконечного произведения элементов БО.

2. Постановка задачи

Рассмотрим аксиально-симметричный гофрированный волновод, радиус стенки которого изменяется по закону:

$$R(z) = R_0(1 + \alpha \sin(k_0 z)), \quad \alpha \leq 1 \quad (1)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{d}$, $\alpha = \frac{\Delta R}{R_0} < 1$, ΔR - глубина гофра, R_0 и d - средний радиус и продольный период волновода соответственно (см. Рис. 1.).

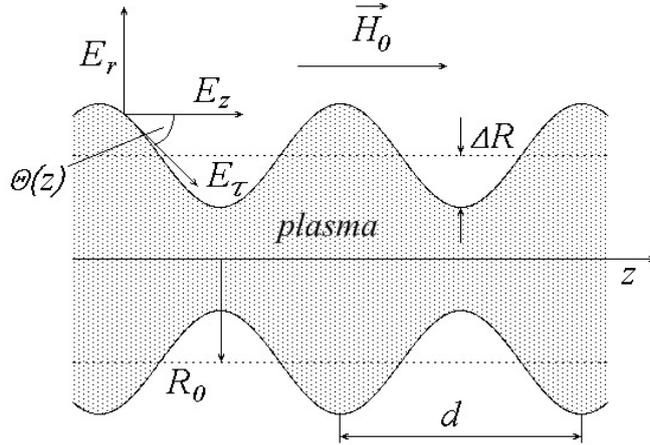


Рис. 1. Аксиально-симметричний волновод з синусоїдально гофрованою стінкою, заповнений плазмою і помещений во зовнішнє постійне магнітне поле напруженністю \vec{H}_0

Считаем, что гофрированный волновод полностью заполнен однородной плазмой, безграничен в осевом направлении, и помещен во внешнее, направленное вдоль оси волновода, постоянное магнитное поле напряженностью \vec{H}_0 конечной величины.

В гладком идеально проводящем волноводе ($\alpha \rightarrow 0$), заполненном плазмой и помещенном во внешнее постоянное магнитное поле напряженностью \vec{H}_0 возможно существование аксиально-симметричных электромагнитных волн, топология распределения напряженностей электрического и магнитного поля приведена в [12].

Будем считать, что пространственная периодичность стенки волновода вдоль оси z навязывает решениям гладкого волновода такую же пространственную периодичность. Решения уравнения Максвелла для электронных возмущений компонент электрического и магнитного полей в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
 E_r &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{3n}} \sum_{s=1}^2 \frac{\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n}z} \\
 E_\varphi &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{3n}} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n}z} \\
 E_z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 A_n^s J_0(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n}z} \\
 H_r &= \frac{\varepsilon_1}{k\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n}z}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$H_r = -ik\varepsilon_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n}z}$$

$$H_z = \frac{i\varepsilon_1}{k\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{3n}} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_0(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n}z}.$$

где $k_{3n} = k_3 + \frac{2\pi \cdot n}{a} = k_3 + nk_0$; $p_{1n} = ((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2) - \varepsilon_2^2 k^2) / 2\varepsilon_1$;

$$p_{2n} = \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2)^2 - \varepsilon_2^2 k^4) / \varepsilon_1;$$

$$(k_n^s)^2 = p_{1n} \pm \sqrt{p_{1n}^2 - p_{2n}}; k = \omega/c; \quad F_n^s = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2) - (k_n^s)^2;$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_e}{\omega} \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2}$$

в выражении для k_n^s – верхний знак соответствует $s=1$, нижний – $s=2$;

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}; \quad \Omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} - \text{электронная Ленгмюровская частота плазмы, } \omega_e = \frac{eH_0}{m_e c}$$

– электронная циклотронная частота, n_0, m_e, H_0 – равновесная плотность плазмы, масса электрона и напряженность постоянного внешнего магнитного поля соответственно; $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Решения (2) должны быть дополнены граничными условиями, которые в нашем случае заключаются в равенстве нулю тангенциальных компонент электрического поля:

$$E_\varphi|_{r=R(z)}=0 \quad (3)$$

и

$$E_z|_{r=R(z)} + \frac{dR}{dz} E_r|_{r=R(z)}=0 \quad (4)$$

После применения граничных условий к решениям (1) можно получить бесконечную систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 A_n^s P_{pn}^s = 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 A_n^s R_{pn}^s = 0, \end{cases} \quad (5)$$

которую в матричном виде можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} P^1 & P^2 \\ p_n & p_n \\ R^1 & R^2 \\ p_n & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1 \\ n \\ A^2 \\ n \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где: $p, n = -\infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$, $X_n^s = k_n^s R_0$; $P_{pn}^s = \frac{F_n^s}{k_{3n} k_n^s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{1-l}(X_n^s) a_{n-p,l}^s(X_n^s)$,

$$R_{pn}^s = \left[1 + \frac{k_0(n-p)(\varepsilon_1 k^2 - k_n^2)}{k_n (k_n^s)^2} \right] \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{-l}(X_n^s) a_{n-p,l}^s(X_n^s),$$

$$a_{p,l}^s(X_n^s) = (-1)^{l'} J_{p'-l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^s\right) \begin{cases} J_{p'+l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^s\right); p=2p', l=2l', \\ i \cdot J_{p'+l'+1}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^s\right); p=2p'+1, l=2l'+1. \end{cases}$$

Существование нетривиальных решений для амплитуд пространственных гармоник этой системы уравнений требует равенства нулю определителя квадратной матрицы, состоящей из четырех квадратных блоков [13]

$$\det \begin{bmatrix} P_{pn}^1 & P_{pn}^2 \\ R_{pn}^1 & R_{pn}^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

Таким образом, исследование дисперсионных характеристик симметричных электромагнитных волн идеально проводящего гофрированного по синусоидальному закону волновода, заполненного плазмой, и помещенного во внешнее постоянное магнитное поле напряженностью \vec{H}_0 сводится к вычислению бесконечного определителя (7).

3. Анализ дисперсионного уравнения гладкого волновода.

Вычисление определителя (7) начнем со случая, когда глубина гофра равна нулю. В этом случае он преобразуется в квадратный:

$$\det \begin{bmatrix} P_{00}^1 & P_{00}^2 \\ R_{00}^1 & R_{00}^2 \end{bmatrix} = 0,$$

Раскрытие этого определителя приводит к дисперсионному уравнению:

$$D_{00} = \frac{F_0^1}{X_0^1} \frac{J_1(X_0^1)}{J_0(X_0^1)} - \frac{F_0^2}{X_0^2} \frac{J_1(X_0^2)}{J_0(X_0^2)} = 0 \tag{8}$$

Полученное дисперсионное уравнение соответствует граничным условиям

$$\left. \begin{matrix} E \\ \varphi \end{matrix} \right|_{r=R_0} = \left. \begin{matrix} E \\ z \end{matrix} \right|_{r=R_0} = 0$$

Можно показать, что одним из решений уравнения (8) являются следующие соотношения, определяющие дискретные значения продольного волнового числа k_3 через параметры волновода:

$$k_3^{(1)} = \left(\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} k^2 - \frac{\varepsilon_1(\gamma_{0,k}^2 + \gamma_{0,m}^2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$k_3^{(2)}{}_{1,2} = \left(\varepsilon_1 k^2 \pm (\varepsilon_2^2 k^4 + \frac{\varepsilon_1 \gamma_{0,k}^2 \gamma_{0,m}^2}{\varepsilon_3 R_0})^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

где: $\gamma_{0,1} < \gamma_{0,2} < \gamma_{0,3} < \gamma_{0,4} \dots < \gamma_{0,n} \dots$ – последовательность положительных нулей функции $J_0(z)$, расположенных в порядке возрастания по индексу n [14].

К решениям (9)-(10) необходимо добавить решения, соответствующие равенству $x_0^1 = x_0^2$.

В отсутствие внешнего магнитного поля симметричная электромагнитная волна (9)-(10) разделяется на E - и H -волны с компонентами полей: E_r, H_φ, E_z и H_r, E_φ, H_z соответственно [12]. При этом дисперсии разделившихся волн описываются уравнениями:

$$\omega_{ik} = \left(k_3^2 c^2 + \Omega_e^2 + \frac{\gamma_{i,k}^2}{R_0} \cdot c^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где: $i=0$ соответствуют быстрой E - волне ($\beta_\delta = \omega/k_3c > 1$), а $i=1$ – быстрой H - волне ($\beta_\delta = \omega/k_3c > 1$).

В конечном магнитном поле ($\varepsilon_2^2 > 0$) волны не разделяются.

На Рис.2, 3 приведены два вида типичных дисперсионных зависимостей $y = k_3 R_0$ от безразмерной переменной $x = \omega/\Omega_e$ и параметров волновода: $R = \Omega_e R_0/c, H = \omega_e/\Omega_e$.

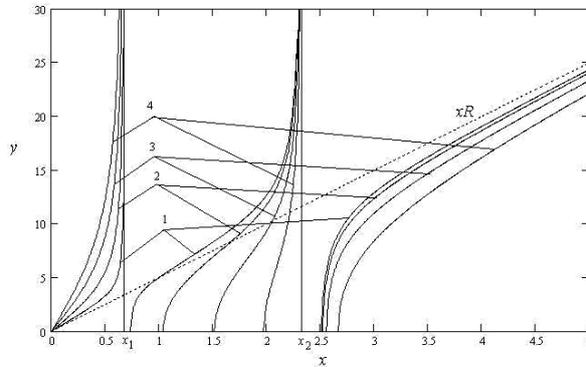


Рис.2. Дисперсионные кривые, полученные из уравнения (9)

На Рис.2 приведены дисперсионные кривые, определяемые уравнением (9).

Здесь асимптотами являются прямые $x_1 = \sqrt{\frac{1+H^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+H^4}}$ и

$x_2 = \sqrt{\frac{1+H^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+H^4}}$. При общих значениях параметров $R = 5, H = 2,2$ пронумерованные кривые соответствуют набору корней: 1 – $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = 0$; 2 – $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = \gamma_{1,1}$; 3 – $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = \gamma_{1,2}$; 4 – $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = \gamma_{1,3}$.

В промежутках между кривыми 1-2; 2-3; 3-4 проходят дисперсионные кривые, определяемые корнями $\gamma_{0,k}, \gamma_{0,m}$, но на рисунке они не показаны.

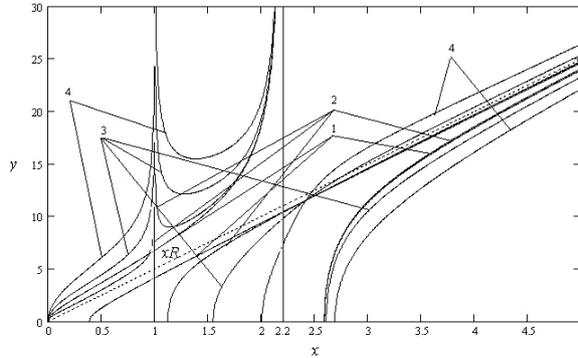


Рис.3. Дисперсионные кривые, полученные из уравнения (10)

На Рис.3. приведены дисперсионные кривые, соответствующие уравнению (10). При тех же параметрах, что и на Рис.2.

В дальнейшем нас будут интересовать «кроссинги», т.е. пересечения дисперсионных кривых, которые появляются из-за наличия гофрировки идеально проводящей стенки плазменного волновода. Поэтому рассмотрим дисперсионное уравнение гофрированного волновода (7).

4. Анализ дисперсионного уравнения гофрированного волновода

Определим сначала вид диагональных элементов блоков матрицы (7). Эти элементы определяются следующими выражениями:

$$P_{nn}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n}^S k_n^S} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{1-l}(X_n^S) a_{0,l}^S(X_n^S), \quad R_{nn}^S = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{-l}(X_n^S) a_{0,l}^S(X_n^S), \quad (12)$$

где

$$a_{0,l}^S(X_n^S) = (-1)^{l'} J_{l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^S\right) \cdot \begin{cases} J_{l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^S\right); & l = 2l', \\ i \cdot J_{l'+1}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^S\right); & l = 2l'+1, \end{cases}$$

Для вычисления диагональных матричных элементов (12) введем производящую сумму:

$$S(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(x) J_l^2(y), \quad (13)$$

где $x = X_n^S, y = \frac{\alpha}{2} X_n^S$.

Сумма (13) может быть просто выражена через функции Бесселя (см. Приложение):

$$S(x, y) = J_0\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + (2y)^2}}{2}\right) \cdot J_0\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + (2y)^2}}{2}\right) \quad (14)$$

При малых значениях α диагональные матричные элементы могут быть представлены простыми выражениями, которые соответствуют гладкому волноводу:

$$P_{nn}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n} k_n^S} J_1(X_n^S) \text{ и } R_{nn}^S = J_0(X_n^S), \quad (15)$$

с той лишь разницей, что в спектре (15), в отличие от гладкого волновода, присутствуют Флоке моды – набор пространственных гармоник по продольному волновому числу.

Диагональные матричные элементы (12) могут быть вычислены из производящей суммы. При конечных значениях глубины гофра диагональные матричные элементы можно представить в виде:

$$P_{nn}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n} k_n^S} (S_1(x, y) + iS_2(x, y)), \quad R_{nn}^S = S(x, y) + iS_3(x, y), \quad (16)$$

где

$$S_1(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(x) J_l^2(y), \quad S_2(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(x) J_l(y) J_{l+1}(y), \\ S_3(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+1} J_{2l+1}(x) J_l(y) J_{l+1}(y).$$

Нетрудно показать, что бесконечные суммы в (16) просто выражаются через производящую функцию:

$$S_1(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} S(x, y), \quad S_2(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} S(x, y), \text{ а сумма } S_3(x, y) \text{ тождественно равна}$$

нулю: $S_3(x, y) = 0$.

Для получения дисперсионного уравнения симметричных электромагнитных волн идеально проводящего гофрированного по синусоидальному закону плазменного волновода рассмотрим бесконечный определитель (7). Поступая аналогично [11, 14 - 16], преобразуем бесконечный определитель $2n$ -го порядка (7) в определитель n -го порядка [13]:

$$\det \left[\begin{array}{c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{pk}^1 R_{kn}^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{pk}^2 R_{kn}^1 \\ \end{array} \right] = 0 \quad (17)$$

В приведенной выше записи диагональные элементы определителя (17) равны

$$P_{kk} = P_{kk}^1 R_{kk}^2 - P_{kk}^2 R_{kk}^1 \quad (18)$$

В отсутствие гофра ($\alpha \rightarrow 0$) диагональный матричный элемент определяется дисперсионным уравнением гладкого волновода (8): $P_{00} = J_0(x_0^1) J_0(x_0^2) P_{00}$.

Вынесем из детерминанта (17) диагональные элементы в виде множителей. Тогда (17) преобразуется к виду:

$$\det [d_{n,m}] \prod_{n=-\infty}^{\infty} P_{nn} = 0, \tag{19}$$

где диагональными элементами нового определителя являются единицы,

$$d_{n,m} \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1}{P_{nn}}.$$

Потребуем, чтобы вновь полученный определитель в (19) равнялся нулю: $\det [d_{i,k}] \equiv D = 0$, где $d_{i,k}$ - элементы определителя; $-\infty < i < \infty, -\infty < k < \infty$.

Исходя из этого требования, законно утверждать, что этот определитель - сходящийся [6, 7].

Поскольку в явном виде значение определителя D вычислить невозможно, необходимо найти такое свойство этого определителя, которое содержит полную информацию о всем спектре собственных волн волновода, и которое, к тому же, не противоречит частному случаю распространения волн в гладком волноводе. Для этого сформулируем и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если бесконечный определитель сходится, то сходится и бесконечное произведение модулей сумм строк или столбцов этого определителя.*

Доказательство. Из сходимости определителя D следует [6, 7]:

$$\prod_{i=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_{i,k}| \right) = D.$$

$$D = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_{i,k}| \right) \geq \prod_{i=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{i,k} \right) > \prod_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{i,k} \right) = D', \quad \text{то можно}$$

утверждать, что бесконечное произведение модулей сумм строк или столбцов исходного определителя ограничено, т.е. сходится. Таким образом теорема доказана.

Следствие. Из теоремы следует, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1}{P_{nn}} \right) = D' \tag{20}$$

сходится. Тогда сходящимся будет бесконечное произведение

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1}{P_{nn}} \right) = D'' \tag{21}$$

т.к. $D' \geq D''$.

Изменим порядок суммирования в (21): просуммируем сначала по m , а затем получившийся результат – по l . В этом случае имеем:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{lm}^s = J_0(X_n^s) - i\alpha X_n^s \frac{k(\varepsilon k^2 - k_n^2)}{k_n(k_n^s)^2} J_1(X_n^s) \tag{22}$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} P_{nl}^s = \frac{F^s}{k_n k_n^s} J_1(X_n^s) \tag{23}$$

В итоге, после подстановки (22)-(23) в (21) и требования малости соотношений (18), числитель в бесконечном произведении (21) будет иметь вид:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1) = \alpha \frac{k_0 R_0 (\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2)}{k_{3n}^2 k_n^1 k_n^2} ((k_n^1)^2 - (k_n^2)^2) J_0(X_n^1) J_0(X_n^2) \equiv \Delta_n \quad (23)$$

Таким образом, бесконечное произведение (20) сходится:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_n}{P_{nn}} = D'' < \infty, \quad (24)$$

$$\text{где: } P_{nn} = \frac{G_n}{k_{3n}} \left\{ \frac{b_-}{b_+ + b_-} \left[\frac{F_n^2 J_1(a_{n,-}^2)}{k_n^2 J_0(a_{n,-}^2)} \frac{F_n^1 J_1(a_{n,-}^1)}{k_n^1 J_0(a_{n,-}^1)} \right] + \frac{b_+}{b_+ + b_-} \left[\frac{F_n^1 J_1(a_{n,+}^1)}{k_n^1 J_0(a_{n,+}^1)} \frac{F_n^2 J_1(a_{n,+}^2)}{k_n^2 J_0(a_{n,+}^2)} \right] + \right. \\ \left. + i \frac{\sqrt{b_+ b_-}}{b_+ + b_-} \left[\frac{F_n^1}{k_n^1} \left(\frac{J_1(a_{n,-}^1)}{J_0(a_{n,-}^1)} + \frac{J_1(a_{n,+}^1)}{J_0(a_{n,+}^1)} \right) + \frac{F_n^2}{k_n^2} \left(\frac{J_1(a_{n,-}^2)}{J_0(a_{n,-}^2)} + \frac{J_1(a_{n,+}^2)}{J_0(a_{n,+}^2)} \right) \right] \right\}; \quad a_{n,\pm}^s = \frac{1}{2} b_{\pm} X_n^s;$$

$$b_{\pm} = \sqrt{1 + \alpha^2} \pm 1;$$

$$G_n = \prod_{s=1}^2 J_0(a_{n,+}^s) J_0(a_{n,-}^s).$$

Наличие в знаменателе выражения (24) произведения $\prod_{n=-\infty}^{\infty} P_{nn}$ указывает на возможность существования резонансов, когда все сомножители или определенное их количество одновременно обращаются в ноль. В этом случае обозначенное количество волн, распространяющихся в волноводе, будут связаны между собой благодаря тому, что бесконечное произведение все-таки ограничено.

Таким образом, из бесконечного определителя (7) получен функционал, который содержит в себе основные свойства волнового спектра гофрированного плазменного волновода: описывает связанные гофрировкой собственные волны волновода.

Ниже рассмотрим влияние сходимости бесконечного произведения сумм строк или столбцов бесконечных определителей на дисперсию электромагнитных волн в периодических плазменных волноводах.

5. Анализ свойств бесконечного произведения, полученного из бесконечного определителя.

Прежде всего необходимо отметить, что при малых значениях глубины гофра P_{nn} переходит в дисперсионные уравнения для Флоке мод, которые связаны между собой через малый параметр α и образуют полосы непрозрачности [11, 14-16] на дисперсионной плоскости (ω, k_3) , ориентированные вдоль линий $1/K$ -кратного пересечения дисперсионных кривых и определяемых выражением $\omega = \Omega_K$, где $K = 1; 2; 3 \dots$ - положительные целые числа.

Для анализа влияния на дисперсию электромагнитных волн свойств бесконечного произведения, полученного из бесконечного определителя, введем следующее правило определения числа кратности линии пересечения дисперсионных кривых. Число кратности пересечения $1/K$ задается следующим

образом: целая кратность ($n \rightarrow \infty$, $K = 1$) – линия, на которой пересекаются все дисперсионные кривые; половинная кратность ($n/2 \rightarrow \infty$, $K = 2$) – линия, на которой пересекаются дисперсионные кривые через одну; $1/3$ -кратность ($n/3 \rightarrow \infty$, $K = 3$) – линия, на которой пересекаются дисперсионные кривые через две; $1/P$ -кратность ($n/P \rightarrow \infty$, $K = P$) – линия, на которой пересекаются дисперсионные кривые через $P-1$ и т.д. Ширина $1/P$ -кратной полосы непрозрачности определяется из (24) и по величине пропорциональна α^P .

Определим ширину полос непрозрачности для дисперсионных кривых кратности пересечения $K = 1$.

Особенностями знаменателя P_{nn} в выражении (24) являются нули G_n . Для дисперсионных кривых кратности $K = 1$ следует, что, например, один из сомножителей G_n для всех n равен нулю, т.е. $\dots \cong J_0(a_{-n,+}^1) \cong \dots \cong J_0(a_{-1,+}^1) \cong J_0(a_{0,+}^1) \cong J_0(a_{1,+}^1) \cong \dots \cong J_0(a_{n,+}^1) \cong \dots \cong 0$. Таким

образом, все сомножители $J_0(a_{n,+}^1)$, $n \neq N$ в выражении (24) могут быть заменены на $J_0(a_{N,+}^1)$. Остальные сомножители в G_n вида $J_0(a_{n,+}^2)J_0(a_{n,-}^1)J_0(a_{n,-}^2)$ не равны нулю и не дают особенностей в (24).

В числителе выражения (24) также выполним замену всех индексов n на N . В силу инвариантности выражения (24) относительно замены n на $n+M$ (M – любое целое число) искомая ширина полосы непрозрачности может быть распространена на весь диапазон изменения n .

Указанные замены преобразуют выражение (24) к виду:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{J_0(a_{N,+}^1)} = G^{-1} \cdot D^{n \cong P < \infty} \quad (25)$$

где G – сходящееся остаточное произведение выражения (24).

Таким образом, ширина полосы непрозрачности для дисперсионных кривых кратности пересечения $K = 1$ может быть определена из уравнений:

$$J_0(a_{N,+}^{1,2}) = \pm i\alpha, \quad (26)$$

где в правой части уравнения следует выбирать знак, соответствующий затухающим во времени решениям. Оставшиеся два уравнения $J_0(a_{N,-}^{1,2}) = \pm i\alpha$ не подлежат рассмотрению, т.к. при устремлении глубины гофрировки к нулю ($\alpha \rightarrow 0$) отсутствует особенность в выражении (24), что соответствует невозможности получить дисперсионное соотношение для рассматриваемых волн.

Выражение (26) получено в результате извлечения корня n -ой степени ($n \rightarrow \infty$) из конечного числа P . Из бесконечного перечня корней $\sqrt[n]{P}$, равных по модулю единице, выбрана мнимая единица, т.к. это решение соответствует максимальной ширине полосы непрозрачности.

Рассмотрим случай, когда одно из уравнений (26) имеет решение, т.е. $J_0(a_{N,+}^1) \cong 0$, а второе – нет: $J_0(a_{N,+}^2) \neq 0$. Тогда ширина полос непрозрачности

$$(\Delta\omega)_{\pm} \text{ определяется выражением: } (\Delta\omega)_{\pm} = -i\alpha \left(\left| \frac{d}{d\omega} J_0(a_{N,+}^1) \right| \right)^{-1} \Big|_{\omega=\Omega_1^{\pm}}, \quad (27)$$

где срединные линии полос расположены вдоль линий $\omega = \Omega_1^{\pm}$,

$$\Omega_1^{\pm} = \frac{\Omega_e}{\sqrt{2}} \left(H^2 + \frac{g-1}{g+1} \pm \sqrt{\left(H^2 + \frac{g-1}{g+1} \right)^2 - \frac{4g}{1+g} H^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \text{ решение уравнения } a_{N,+}^1 = \gamma_{0,m} \text{ при}$$

$m, n \rightarrow \infty$ (n - номер Флоке моды), а $g = b_+^2 \frac{k_0^2 R_0^2}{4\pi}$. Необходимо отметить, что при

$g \ll 1$ выражение Ω_1^{\pm} переходит в полученное ранее в работе [11].

Выражение (27) справедливо и для обратного случая, когда $J_0(a_{N,+}^2) \cong 0$ и $J_0(a_{N,+}^1) \neq 0$

Ширина полос непрозрачности высших порядков ($K > 1$) определяется выражением (27), в котором необходимо заменить α на α^K , а параметр g на g/K^2 .

Из выражения (27) следует, что ширина полос непрозрачности высших порядков уменьшается с ростом порядка K , а их положение на дисперсионной плоскости ω, k_3 смещается вверх и вниз по отношению к полосам низших порядков.

Если одновременно выполняются условия $J_0(a_{N,+}^1) \cong J_0(a_{N,+}^2) \cong 0$, т.е. реализуются резонансные условия, ширина полос непрозрачности $(\Delta\omega)_{\pm}^{\delta\dot{a}\zeta}$ становится больше величин, определяемых выражением (27), без изменения их места расположения на дисперсионной плоскости. Их ширина может быть представлена в виде:

$$(\Delta\omega)_{\pm}^{\delta\dot{a}\zeta} = -i\sqrt{\alpha} \left(\left| \frac{d}{d\omega} J_0(a_{N,+}^1) \right| \left| \frac{d}{d\omega} J_0(a_{N,+}^2) \right| \right)^{-1} \Big|_{\omega=\Omega_1^{\pm}} \quad (28)$$

Для определения ширин полос непрозрачности высших порядков ($K > 1$) в резонансном случае необходимо в выражении (28) заменить $\sqrt{\alpha}$ на $(\sqrt{\alpha})^K$, а параметр g на g/K^2 .

Очевидно, что при конечной величине глубины гофра ширина полос непрозрачности низших порядков будет сравнима с частотами Ω_1^{\pm} , и, таким образом, количество этих полос будет определяться степенью заполнения ими области существования на дисперсионной плоскости собственных волн гофрированного плазмонаполненного волновода. Полное покрытие области существования собственных волн гофрированного плазмонаполненного

волновода полосами непрозрачности соответствует отсутствию собственных волн в таком волноводе.

6. Приложение

Заменим в выражении $s(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(x) J_l^2(y)$ квадрат функции Бесселя на

его представление через интеграл [17]: $J_l^2(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2y \sin \vartheta) \cos(2l\vartheta) d\vartheta$.

Выполнив в $s(x, y)$ сначала суммирование по l получим:

$$s(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2y \sin \vartheta) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(x) \cos(2l\vartheta) \right) d\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2y \sin \vartheta) \cos(x \cos \vartheta) d\vartheta = J_0(z) J_0(\xi)$$

где $y = \sqrt{z\xi}$, $x = z - \xi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев В.А., Карбушев Н.И., Островский А.О., Ткач Ю.В. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. -К: Наук. Думка, 1993.- 207 с.
2. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973.- 288 с.
3. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберга в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд. Харьковского университета.– Харьков, 1971, 500 с.
4. Shestopalov V.P., Shestopalov Yu.V. Spectral theory and excitation of open structures. - London, UK: The Institution of Electrical Engineers. - 1996. - 399 p.
5. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965, 272 с.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. I. Основные операции анализа. Государственное изд.-во физ.-мат. литературы / Под ред. Ф.В. Широкова. М., 1963, 342 с.
7. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции. Государственное изд.-во физ.-мат. литературы / Под ред. Ф.В. Широкова. М., 1963, 516 с.
8. Ignatov A.M. Oscillations of a magnetized plasma in a waveguide of complicated shape, Plasma Physics Reports, 2002, 28 (7), p. 572-579.
9. Zaginaylov G.I., Lapshyn V.I., Tkachenko V.I., Tkachenko I.V. Fractal properties of periodic plasma-filled waveguides, Problems of Atomic Science and Technology, #3, 2001, (38), p. 137.
10. Lou W. R., Carmel Y., Antonsen T. M. et. al., New modes in a Plasma with Periodic Boundaries: The Origin of the Dense Spectrum, Phys. Rev. Lett., 1991, v. 67, # 18, p. 2481-2484.
11. Азаренков Н.А., Ткаченко И.В., Ткаченко В.И. Особенности дисперсионных характеристик аксиально-симметричных электромагнитных волн магнитоактивной плазмы, находящейся в идеально проводящем волноводе с

- конечной глубиной гофра. ВАНТ, 2008. № 4, Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (6), с. 54-59.
12. Кондратенко А.Н. Плазменные волноводы. М., Атомиздат, 1976, 232 с.
 13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Изд.-во «Наука», М. 1967, 576 с.
 14. Lapshin V.I., Tkachenko I.V., Tkachenko V.I. Peculiarities of E-waves Propagation in Rippled Plasma Waveguides, Problems of Atomic Science and Technology. Ser. "Plasma Physics" (9). 2003, №1, p.89-91.
 15. Lapshyn V.I., Stoyanov A.F., Tkachenko V.I., Tkachenko I.V. Fractal properties of dispersion characteristics of sinusoidally rippled plasma waveguides // Problems of Atomic science and technology. Series: "Plasma Physics" (10). 2005, №1, p.137-139.
 16. Лапшин В.І., Стоянов О.Ф., Ткаченко І.В., Ткаченко В.І. Обчислення дисперсійних характеристик плоско паралельного гофрованого плазмового хвилеводу. Вісник Львівського Університету. Серія фізична. 2006. Вип. 39, с. 160-162.
 17. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть первая. М.: Изд.-во Иностранная литература, 1949, 175 с.