УДК 519.6

Трикубическая интерполяция по Кунсу как задача на геометрическую вероятность

И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко
Херсонский национальный технический университет, Украина

В статье показано как редукция интерполяции по Кунсу к лагранжевой интерполяции позволяет конструировать базис Кунса с помощью вероятностно-геометрического метода.

Ключевые слова: *интерполяция по Кунсу, лагранжева интерполяция, вероятностно-геометрический метод.*

В статті показано як редукція інтерполяції за Кунсом до лагранжевої інтерполяції дозволяє конструювати базис Кунса за допомогою ймовірнісно-геометричного метода.

Ключові слова: *інтерполяція за Кунсом, лагранжева інтерполяція, ймовірнісно-геометричний метод.*

It is shown in the article how the reduction of Coons interpolation to Lagrange interpolation makes it possible to construct Coons basis with the help of probabilistically-geometrical method.

Key words: *Coons interpolation, Lagrange interpolation, probabilistically-geometrical method.*

1. Постановка проблемы

Как показывает опыт математического моделирования, практически все прикладные задачи изначально являются задачами теории приближения функций (ТПФ) или сводятся к задачам ТПФ [1]. Важнейшее значение в ТПФ имеет проблема построения способов приближения функций. В работе рассмотрен частный случай эрмитовой интерполяции – интерполяция по Кунсу для функции трех аргументов. В отличие от традиционного матричного подхода здесь применяется вероятностно-геометрический метод (ВГМ) конструирования базиса Кунса.

2. Анализ предшествующих публикаций, цель работы.

Интерполяционные полиномы Кунса [2,3] впервые появились в 1966 г. при разработке математического обеспечения САПР в автомобилестроении. Эти функции входят в класс полиномов Эрмита и построены в рамках традиционной техники приближения функций полиномами. Лагранж, а еще раньше Ньютон, исходили из предположения, что интерполирующей функцией является полином. Эта гипотеза обусловлена возможностями матричной алгебры и привлекательными свойствами полиномов. Можно избежать громоздких процедур матричной алгебры, если использовать геометрический или вероятностно-геометрический методы конструирования интерполяционных базисов. Неудивительно, что полиномиальный базис Кунса имеет тригонометрический аналог [4]. Со времен Вандермонда (70-е годы 18 века) и вплоть до начала 70-х годов 20 века задачи интерполяции, как правило, сводили к составлению и решению СЛАУ. С появлением метода конечных элементов (МКЭ) стало понятно, что роль матричной алгебры в задачах интерполяции функций двух и трех аргументов сильно преувеличена. Удивляться следует не тому, что матричные методы оказались недостаточными, а скорее тому, что они вообще эффективны для широкого класса задач. Беда в том, что границы этого класса представляются недостаточно ясными. В начале 70-х годов 20 века благодаря работам Уачспресса, Митчелла, Маклеода, Барнхилла, Грегори и других в практике конструирования базисов КЭ стали применяться геометрические методы. Еще через 10 лет появился ВГМ. Первые публикации относятся к 1982 г., соответствующие ссылки есть в [4].

3. Цель статьи

Цель статьи – показать возможность конструирования интерполяционных полиномов Кунса в трех измерениях (трикубическая интерполяция) с помощью ВГМ. Построение полиномов Эрмита указанным методом для функций одного и двух аргументов выполнено в [5]. В работе [4] этим методом построен базис Кунса в двух измерениях (бикубическая интерполяция).

4. Основная часть

Рассматривается стандартный КЭ в форме куба ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$) с узлами интерполяции в вершинах (рис. 1).

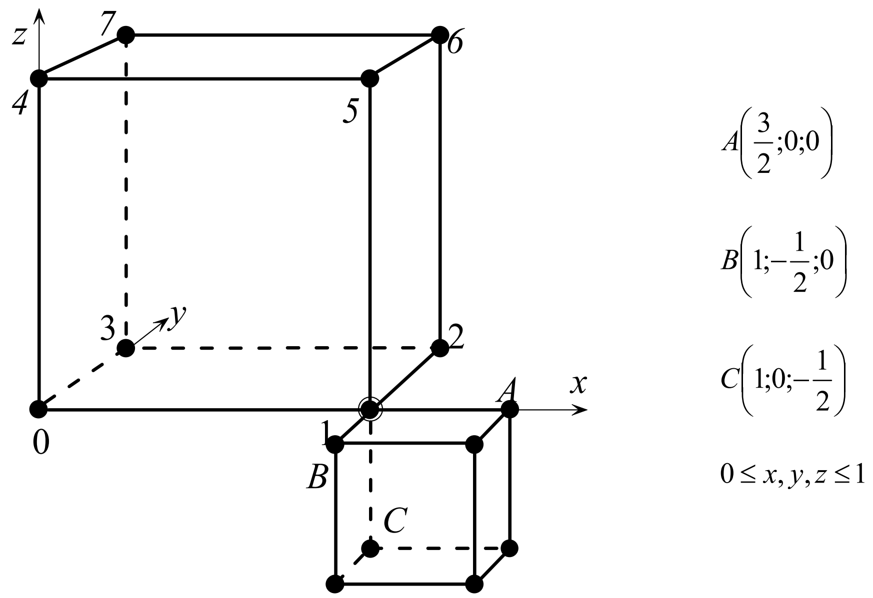

Рис. 1. К построению функции $F_1(x, y, z)$

В каждой вершине i ($i = \overline{0,7}$) заданы четыре степени свободы: значение функции $\varphi(x, y, z)$ и ее три частные производные 1-го порядка. Задача состоит в построении интерполянта

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{i=0}^{7}F_i(x,y,z)\cdot\varphi_i\,,\tag{1}$$

удовлетворяющего интерполяционной гипотезе Кунса. Для решения задачи интерполяции достаточно построить базис $\{F_i(x,y,z)\}$, поскольку узловые значения φ_i интерполируемой функции известны.

Базис Кунса должен удовлетворять следующим условиям (интерполяционная гипотеза Кунса):

$$F_i(x_k,y_k,z_k)=\delta_{ik}\,,\qquad i,k=\overline{0,7}.\tag{2}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, i – номер функции, k – номер узла;

$$\frac{\partial F_i(x_k,y_k,z_k)}{\partial x}=\frac{\partial F_i(x_k,y_k,z_k)}{\partial y}=\frac{\partial F_i(x_k,y_k,z_k)}{\partial z}=0;\quad i,k=\overline{0,7}.\tag{3}$$

Исходная информация содержит 32 числа, а задачу интерполяции можно свести к составлению и решению СЛАУ. В классической интерполяции обычно так и делают. Для функции одного аргумента полиномиальный базис Кунса приведен в [2, 3] .

ВГМ использует концепцию присоединенных подэлементов [4]. К основному кубу в каждой вершине консольно присоединяется подэлемент – куб с ребром, вдвое меньшим ребра основного куба. На рис. 1 такой подэлемент присоединен к узлу 1. Это означает, что мы собираемся строить функцию $F_1(x,y,z)$. Логично предположить, что в базисных функциях переменные разделяются

$$F_i(x,y,z)=X_i(x)\cdot Y_i(y)\cdot Z_i(z).\tag{4}$$

Разделение переменных (4) в трикубической интерполяции является естественным обобщением разделения переменных в бикубической интерполяции [4]. Концепция присоединенного подэлемента позволяет свести интерполяцию по Кунсу к более простой интерполяции по Лагранжу, где легко и естественного работает ВГМ [4,5]. На примере функции $F_1(x,y,z)$ опишем вкратце, как выбирается консольный подэлемент. В данном случае (рис. 1) консольный подэлемент (куб) присоединяется к узлу 1. Консольный подэлемент всегда присоединяется к тому узлу, с которым ассоциируется искомая функция. Легко установить, что точки A, B и C расположены на расстоянии $\frac{1}{2}$ от узла 1. Анализ свойств одномерных полиномов Кунса [2] показывает, что $X_1(x)$ имеет в узле O (при $x=0$) двукратный нуль (см. условия (2), (3)), а в точке A (при $x=\frac{3}{2}$) – простой нуль. Аналогично ведут себя $Y_1(y)$ и $Z_1(z)$.

Чтобы сформулировать задачу на геометрическую вероятность, возьмем внутри основного куба текущую точку $M(x,y,z)$. То же самое сделаем в присоединенном кубе. Теперь через выбранные точки проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Понятно, что в каждом кубе при этом образуется восемь прямоугольных параллелепипедов. Наугад взятая точка в любом кубе с вероятностью единица попадёт в какой-нибудь параллелепипед. Параллелепипед, противолежащий узлу 1, назовём областью “успешных” исходов испытания. Наш выбор продиктован свойствами $F_1(x,y,z)$. Базисная функция должна быть равна 1 в “своем” узле и 0 в остальных узлах. Это означает, что $F_1(x,y,z)$ обращается в 0 на трех гранях, не содержащих узел 1. Следует учесть, что в основном кубе на противоположных гранях нуль должен быть двукратным, а в присоединенном кубе – простым. Это означает, что в основной куб нужно вбросить две случайные точки, а в присоединенный – одну. Теперь, чтобы найти $F_1(x,y,z)$, достаточно вычислить вероятность попадания случайных точек в области “успешных” исходов основного и присоединенного куба.

Рассмотрим случайные события:

A={две точки, вброшенные в основной куб, попали в область “успешных” исходов},

B={точка, вброшенная в присоединенный куб, попала в область “успешных” исходов}.

Напомним, что геометрическая вероятность в $3D$ - это относительный объем области “успешных” исходов испытания (при вбрасывании одной точки).

Пользуясь геометрической вероятностью, найдем:

$$P(A)=(x(1-y)(1-z))^2,$$
$$P(B)=8\left(\frac{3}{2}-x\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

По теореме умножения вероятностей независимых совместных событий:

$$F_1(x,y,z)=P(A)\cdot P(B)=\left(-2x^3+3x^2\right)\left(2y^3-3y^2+1\right)\left(2z^3-3z^2+1\right).$$

Полный набор базисных полиномов Кунса имеет вид:

$$\begin{aligned}
F_0(x,y,z)&=\left(2x^3-3x^2+1\right)\left(2y^3-3y^2+1\right)\left(2z^3-3z^2+1\right),\\
F_1(x,y,z)&=\left(-2x^3+3x^2\right)\left(2y^3-3y^2+1\right)\left(2z^3-3z^2+1\right),\\
F_2(x,y,z)&=\left(-2x^3+3x^2\right)\left(-2y^3+3y^2\right)\left(2z^3-3z^2+1\right),\\
F_3(x,y,z)&=\left(2x^3-3x^2+1\right)\left(-2y^3+3y^2\right)\left(2z^3-3z^2+1\right),\\
F_4(x,y,z)&=\left(2x^3-3x^2+1\right)\left(2y^3-3y^2+1\right)\left(-2z^3+3z^2\right),\\
F_5(x,y,z)&=\left(-2x^3+3x^2\right)\left(2y^3-3y^2+1\right)\left(-2z^3+3z^2\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$F_6(x,y,z)=\left(-2x^3+3x^2\right)\left(-2y^3+3y^2\right)\left(-2z^3+3z^2\right),$$
$$F_7(x,y,z)=\left(2x^3-3x^2+1\right)\left(-2y^3+3y^2\right)\left(-2z^3+3z^2\right).$$

Заметим, что полученный базис обеспечивает для интерполянта (1) повышенную гладкость на межэлементных границах.

Отметим, что в кубе (рис. 1) существует неполиномиальный интерполяционный базис с такими же свойствами (2), (3) базисных функций. Каждая функция этого базиса представима в виде произведения трех функций одного аргумента (4). Это тригонометрические функции, которые весьма точно копируют поведение полиномов Кунса на [0;1]. Для квадратного КЭ этот субститут-базис приведен в [4]. В $3D$ субститут-базис Кунса имеет вид:

$$\begin{aligned}
F_0(x,y,z)&=\cos^2\frac{\pi x}{2}\,\cos^2\frac{\pi y}{2}\,\cos^2\frac{\pi z}{2};\\
F_1(x,y,z)&=\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\cos^2\frac{\pi y}{2}\,\cos^2\frac{\pi z}{2};\\
F_2(x,y,z)&=\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\sin^2\frac{\pi y}{2}\,\cos^2\frac{\pi z}{2};\\
F_3(x,y,z)&=\cos^2\frac{\pi x}{2}\,\sin^2\frac{\pi y}{2}\,\cos^2\frac{\pi z}{2};\\
F_4(x,y,z)&=\cos^2\frac{\pi x}{2}\,\cos^2\frac{\pi y}{2}\,\sin^2\frac{\pi z}{2};\\
F_5(x,y,z)&=\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\cos^2\frac{\pi y}{2}\,\sin^2\frac{\pi z}{2};\\
F_6(x,y,z)&=\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\sin^2\frac{\pi y}{2}\,\sin^2\frac{\pi z}{2};\\
F_7(x,y,z)&=\cos^2\frac{\pi x}{2}\,\sin^2\frac{\pi y}{2}\,\sin^2\frac{\pi z}{2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Легко проверить, что функции (5), (6) имеют вероятностные свойства:

$$0\le F_i(x,y,z)\le 1, \quad \sum_{i=0}^{7}F_i(x,y,z)=1.$$

Это означает, что их можно использовать в качестве априорных переходных вероятностей в одношаговых (несеточных) схемах случайных блужданий в кубе со случайным стартом и поглощающими узлами в вершинах (восемь маршрутов).

5. Выводы

Редукция интерполяции по Кунсу к лагранжевой интерполяции позволяет использовать геометрическую вероятность для конструирования базиса Кунса.

Появление трикубических и тригонометрических переходных вероятностей позволит на компьютерных экспериментах сопоставить новые базисы с базисом трилинейной интерполяции [6]. Определенный интерес представляет обобщение барицентрической задачи Мёбиуса на систему из восьми материальных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин Ю.Н. Численные методы приближения функций и математический эксперимент /Ю.Н. Субботин //Сб. Число и мысль. – Вып. 10. – М.: Знание, 1987. – С. 101-126.
2. Жермен-Лакур П. Математика и САПР. /П. Жермен-Лакур, П.Л. Жорж, Ф. Пистр, П. Безье. – Кн. 2. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
3. Coons S.A. Surfaces for computer aided design of space forms. Report MAC-TR-41, Project MAC., M.1.T, 1967. – 105 p.
4. Хомченко А.Н Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность /А.Н. Хомченко, Н.А. Козуб // Проблеми інформац. технологій. — Херсон: ХНТУ, 2009, — № 5. — С. 145-148.
5. Хомченко А.Н. Вероятностно-геометрические аспекты полиномиальной интерполяции функций /А.Н. Хомченко, Т.П. Левая, Б.А. Хомченко //Математическое моделирование. Сб. науч. тр. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 236-241.
6. Козуб Н.А. От равномерного распределения случайных точек к базису трилинейной интерполяции /Н.А. Козуб, А.Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. – № 1(24), 2006. – С. 99-102.

Надійшла - 14.05.2010.