УДК 517.958

# Математические модели дифракции электромагнитных волн на системе не идеально проводящих экранов

В. Д. Душкин
*Академия ВВ МВСУ, Украина*

Получены системы сингулярных интегральных уравнений данных краевых задач. Численное решение и построение дискретной математической модели этих задач основывается на применении метода дискретных особенностей.

***Ключевые слова:*** *системы сингулярных интегральных уравнений, краевые задачи, задачи дифракции, численное решение.*

Отримані системи сингулярних інтегральних рівнянь відповідних крайових задач. Чисельний розв’язок та побудова дискретної математичної моделі цих задач грунтується на застосуванні метода дискретних особливостей.

***Ключові слова*** *системи сингулярних інтегральних рівнянь, крайові задачі, задачі дифракції, чисельний розв’язок..*

The singular integral equations systems of this boundary value problem had been obtained. The numerical solution and construction of discrete mathematical model of these problems are based on discrete singularities method.

***Key words:*** *singular integral equations systems, boundary value problem, diffraction problem, numerical solution.*

## 1. Постановка задачи и её актуальность

Необходимость учёта конечной проводимости материалов, из которых изготовлены дифракционные решётки, при построении математических моделей электродинамических процессов приводит к рассмотрению краевых задач с граничными условиями третьего рода $[1]-[2]$. Большинство дифракционных решеток, применяемых в современных электродинамических устройствах, являются многослойными. Благодаря выбору нужного сочетания геометрических размеров элементов дифракционных структур удаётся получать поля с требуемыми физическими характеристиками. Таким образом, построение математических моделей процессов дифракции на многослойных решётках, основанных на рассмотрении краевых задач с граничными условиями третьего рода, является актуальной задачей.

## 2. Истоки исследования

Эффективным методом построения математических моделей электродинамических процессов, стал предложенный Ю.В. Ганделем, метод параметрических интегральных представлений. Предлагаемые в работе способы получения систем граничных интегральных уравнений, задач дифракции электромагнитных волн на системе щелей в двух параллельных экранах основывается на идеях работ $[3]-[6]$.

## 3. Цели работы

Целью работы было рассмотрение задач дифракции электромагнитных волн на системе щелей в двух параллельных экранах, обладающих конечной проводимостью и получение систем граничных интегральных уравнений этих задач.

**4. Получение систем интегральных уравнений задачи**

Рассмотрим дифракционную структуру, которая представляет собой два бесконечных плоских экрана, лежащий в плоскостях $z = l$ и $z = -l$. В верхнем экране существует $M^+$ щелей, в нижнем экране $M^-$ щелей (см. рис.1).

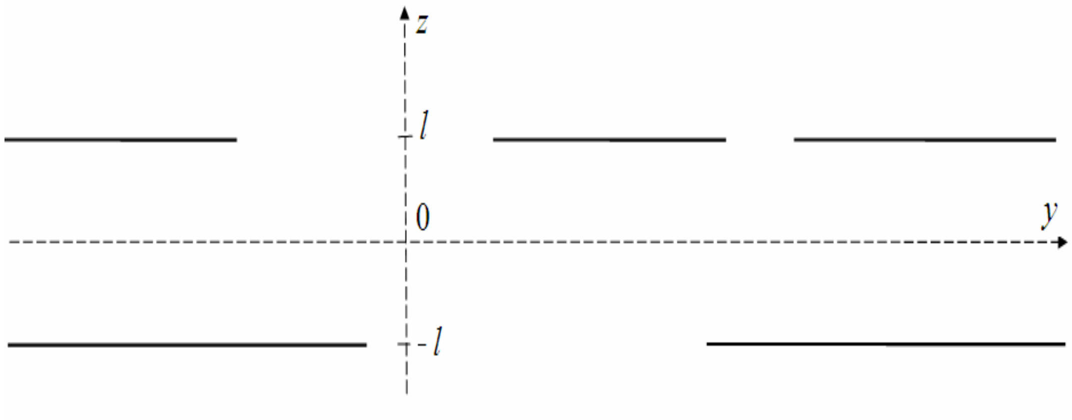


*Рис.1. Сечение дифракционной структуры плоскостью* $YOZ$.

Введём обозначения для областей: $\Omega^+$ и $\Omega^-$, плюс соответствует области над структурой, минус соответствует области под структурой:

$$\Omega^+ = \{(y,z) \in R^2 \ |z > l\}, \qquad (1)$$

$$\Omega^- = \{(y,z) \in R^2 |z < -l\}. \qquad (2)$$

Обозначим как $\Omega^*$ область между экранами:

$$\Omega^* = \{(y,z) \in R^2 \ | -l < z < l\}. \qquad (3)$$

Рассмотрим дифракционную структуру, которая представляет собой два бесконечных плоских экрана, лежащих в плоскостях $z = l$ и $z = -l$. В верхнем экране существует $M^+$ щелей, в нижнем экране $M^-$ щелей.

Пусть

$$\mathrm{L}^+ = \left\{ \mathrm{y} \in \mathrm{R} \middle| \, y \in \bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^+} (\alpha_q^+, \beta_q^+) \right\}, \quad \mathrm{L}^- = \left\{ \mathrm{y} \in \mathrm{R} \middle| \, y \in \bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^-} (\alpha_q^-, \beta_q^-) \right\} \qquad (4)$$

$y$ -ковые координаты точек плоскостей $z = \pm l$ свободные от лент.

Пусть из бесконечности сверху на дифракционную структуру наклонно падает E или H- поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды:

$$U(y,z) = \exp(ik(y \cdot \sin\varphi - (z-l) \cdot \cos\varphi)). \qquad (5)$$

В задаче необходимо найти полное поле, возникшее в результате дифракции волны на решётке. Из условий Щукина-Леонтовича на поверхности дифракционной структуры следуют граничные условия третьего рода на поверхности экранов:

$$\frac{\partial u}{\partial n} - hu = 0. \qquad (6)$$

Пусть $u_0(y,z)$ решение в области $z > l$ вспомогательной краевой задачи дифракции плоской монохроматической волны $U(y,z)$, определённой формулой (5), на сплошном бесконечном экране, обладающем конечной проводимостью, который полностью заполняет плоскость $z = l$.

В силу граничных условий выполняется равенство:

$$\frac{\partial u_0(y,l)}{\partial z} - hu_0(y,l) = 0, \quad y \in R. \qquad (7)$$

Поле $u_0(y,z)$ имеет вид:

$$u_0(y,z) = \exp\{ik(y\cdot\sin\varphi - (z-l)\cdot\cos\varphi)\} + \\ + \frac{i\kappa\cos\varphi + h}{i\kappa\cos\varphi - h}\cdot\exp\{ik(y\cdot\sin\varphi + (z-l)\cdot\cos\varphi)\}, \qquad (8)$$

и обладает свойством:

$$u_0(y,l) = \frac{2i\kappa\cos\varphi}{i\kappa\cos\varphi - h}\cdot\exp\{ik(y\cdot\sin\varphi)\}. \qquad (9)$$

Полное поле $u(y,z)$, возникшее в результате дифракции волны на решётке, ищем в виде:

$$u(y,z) = \begin{cases} u_0(y,z) + u^+(y,z), & (y,z)\in\Omega^+; \\ u^*(y,z), & (y,z)\in\Omega^*; \\ u^-(y,z), & (y,z)\in\Omega^-. \end{cases} \qquad (10)$$

Поле $u^+(y,z)$ в области $\Omega^+$ ищем в виде интеграла Фурье:

$$u^+(y,z) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^+(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}\cdot e^{i\lambda y - \gamma(\lambda)\cdot(z-l)}d\lambda, \qquad (11)$$

где

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \lambda \in R. \qquad (12)$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если

$$\mathrm{Re}(\gamma(\lambda)) \geq 0, \quad \mathrm{Im}(\gamma(\lambda)) \leq 0, \quad \lambda \in R. \qquad (13)$$

Поле $u^-(y,z)$ в области $\Omega^-$ ищем в виде:

$$u^-(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}\cdot e^{i\lambda y + \gamma(\lambda)\cdot(z+l)}d\lambda. \qquad (14)$$

Поле $u^*(y,z)$ в области $\Omega^*$ ищем в виде:

$$u^*(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma(\lambda)}\left(D^+(\lambda)\cdot Z^+(\lambda,z) + D^-(\lambda)\cdot Z^-(\lambda,z)\right)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda, \qquad (15)$$

$$Z^{+}(\lambda,z)=\rho^{-1}(\lambda)\big(ch(\gamma(\lambda)(z+l))+h\cdot\gamma^{-1}(\lambda)\cdot sh(\gamma(\lambda)(z+l))\big), \qquad (16)$$

$$Z^{-}(\lambda,z)=-\rho^{-1}(\lambda)\big(ch(\gamma(\lambda)(z-l))-h\cdot\gamma^{-1}(\lambda)\cdot sh(\gamma(\lambda)(z-l))\big), \qquad (17)$$

где $\rho=sh(2\gamma(\lambda)l)+2h\cdot\gamma^{-1}(\lambda)\cdot ch(2\gamma(\lambda)l)+h^{2}\cdot\gamma^{-2}(\lambda)\cdot sh(2\gamma(\lambda)l)$.

Функции $Z^{+}(\lambda,z)$ и $Z^{-}(\lambda,z)$ обладают свойствами:

$$\frac{d}{dz}Z^{+}(\lambda,l)+h\cdot Z^{+}(\lambda,l)=\gamma(\lambda), \qquad \frac{d}{dz}Z^{-}(\lambda,l)+h\cdot Z^{-}(\lambda,l)=0, \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dz}Z^{+}(\lambda,-l)-h\cdot Z^{+}(\lambda,-l)=0, \qquad \frac{d}{dz}Z^{-}(\lambda,-l)-h\cdot Z^{-}(\lambda,-l)=\gamma(\lambda). \qquad (19)$$

Следствием условий Щукина-Леонтовича и свойства (7) функции $u_0(y,z)$ являются граничные соотношения:

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,l)-h\cdot u^{+}(y,l)=0, \quad y\in CL^{+}=R\setminus L^{+}; \qquad (20)$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial z}(y,-l)+h\cdot u^{-}(y,-l)=0, \quad y\in CL^{-}=R\setminus L^{-}; \qquad (21)$$

$$\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,l)+h\cdot u^{*}(y,l)=0, \quad y\in CL^{+}; \qquad (22)$$

$$\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,-l)-h\cdot u^{*}(y,-l)=0, \quad y\in CL^{-}. \qquad (23)$$

Из представления полей (11),(14), и граничных условий (20)-(21) следуют соотношения:

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,l)-h\cdot u^{+}(y,l)=\int_{-\infty}^{\infty}C^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0, \quad y\in CL; \qquad (24)$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial z}(y,-l)+h\cdot u^{-}(y,-l)=\int_{-\infty}^{\infty}C^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0, \quad y\in CL. \qquad (25)$$

Учитывая свойства (17),(18) функций $Z^{+}(\lambda,z)$ и $Z^{-}(\lambda,z)$, из представления поля $u^{*}(y,z)$ в виде (15) и граничных условий (22), (23) следуют соотношения:

$$\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,l)+h\cdot u^{*}(y,l)=\int_{-\infty}^{\infty}D^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0, \quad y\in CL^{+}; \qquad (26)$$

$$\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,-l)-h\cdot u^{*}(y,-l)=\int_{-\infty}^{\infty}D^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0, \quad y\in CL^{-}. \qquad (27)$$

Из условия непрерывности полей и их производных в щелях экранов следуют равенства:

$$u_0(y,l)+u^{+}(y,l)=u^{*}(y,l), \quad y\in L^{+}; \qquad (28)$$

$$u^{-}(y,l)=u^{*}(y,l), \quad y\in L^{-}; \qquad (29)$$

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,l)-h\cdot u^{+}(y,l)=\frac{\partial u^{\cdot *}}{\partial z}(y,l)-h\cdot u^{\cdot *}(y,l),\quad y\in L^{+}; \qquad (30)$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial z}(y,-l)+h\cdot u^{-}(y,-l)=\frac{\partial u^{\cdot *}}{\partial z}(y,-l)+h\cdot u^{\cdot *}(y,-l),\quad y\in L^{-}. \qquad (31)$$

Из условий непрерывности полей и их производных в щелях экранов (28)-(31) и интегральных представлений полей (11),(14),(15) следуют интегральные соотношения:

$$u_0(y,l)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^{+}(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}e^{i\lambda y}d\lambda=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma(\lambda)}\Big(D^{+}(\lambda)\cdot Z^{+}(\lambda,l)+D^{-}(\lambda)\cdot Z^{-}(\lambda,l)\Big)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L^{+}; \qquad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^{-}(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma(\lambda)}\Big(D^{+}(\lambda)\cdot Z^{+}(\lambda,-l)+D^{-}(\lambda)\cdot Z^{-}(\lambda,-l)\Big)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L^{-}; \qquad (33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{+}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\left(\frac{d}{dz}Z^{+}(\lambda,l)-h\cdot Z^{+}(\lambda,l)\right)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{-}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\left(\frac{d}{dz}Z^{-}(\lambda,l)-h\cdot Z^{-}(\lambda,l)\right)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L^{+}; \qquad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{+}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\left(\frac{d}{dz}Z^{+}(\lambda,-l)+h\cdot Z^{+}(\lambda,-l)\right)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{-}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\left(\frac{d}{dz}Z^{-}(\lambda,-l)+h\cdot Z^{-}(\lambda,-l)\right)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L^{+}. \qquad (35)$$

Учитывая (24)-(25) представим уравнения (34),(35) в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty}C^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda-2h\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^{+}(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}e^{i\lambda y}d\lambda-\int_{-\infty}^{\infty}D^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=-2hu_0(y,l),$$
$$y\in L^{+}; \qquad (36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda-2h\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^{-}(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda-\int_{-\infty}^{\infty}D^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0,\quad y\in L^{-}. \qquad (37)$$

Введём в рассмотрение функции:

$$F_1^{+}(y)=\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,l)-h\cdot u^{+}(y,l)=\int_{-\infty}^{\infty}C^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in R; \qquad (38)$$

$$F_2^{-}(y)=\frac{\partial u^{-}}{\partial z}(y,-l)+h\cdot u^{-}(y,-l)=\int_{-\infty}^{\infty}C^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in R; \qquad (39)$$

$$F_1^{-}(y)=\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,l)+h\cdot u^{*}(y,l)=\int_{-\infty}^{\infty}D^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in R; \qquad (40)$$

$$F_2^{+}(y)=\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,-l)-h\cdot u^{*}(y,-l)=\int_{-\infty}^{\infty}D^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0,\quad y\in R. \qquad (41)$$

В силу соотношений (20)-(23) функции $F_i^{\pm}(y)$, $(i=1,2)$ обладают свойствами:

$$F_1^{+}(y)=0,\quad F_1^{-}(y)=0,\quad y\in CL^{+};\quad F_2^{+}(y)=0,\quad F_2^{-}(y)=0,\quad y\in CL^{-}; \tag{42}$$

и, следовательно, справедливы равенства:

$$C^{+}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{L^{+}}F_1^{+}(t)\cdot e^{-i\lambda t}dt,\quad \lambda\in R; \tag{43}$$

$$D^{+}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{L^{+}}F_1^{-}(t)\cdot e^{-i\lambda t}dt,\quad \lambda\in R; \tag{44}$$

$$D^{-}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{L^{-}}F_2^{+}(t)\cdot e^{-i\lambda t}dt,\quad \lambda\in R; \tag{45}$$

$$C^{-}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{L^{-}}F_2^{-}(t)\cdot e^{-i\lambda t}dt,\quad \lambda\in R. \tag{46}$$

С помощью известных представлений функций Бесселя и Неймана нулевого порядка:

$$J_0(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos(yt)dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad Y_0(|y|)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(yt)dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{47}$$

получаем интегральные соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{+}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{i}{2}\int_{L^{+}}H_0^1(k|y-t|)F_1^{-}(t)\,dt, \tag{48}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{-}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{i}{2}\int_{L^{-}}H_0^1(k|y-t|)F_2^{+}(t)\,dt, \tag{49}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^{+}(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}\frac{i\pi}{2}H_0^1(k|y-t|)F_1^{+}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}Q_1(y,t)F_1^{+}(t)dt, \tag{50}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C^{-}(\lambda)}{\gamma(\lambda)+h}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}\frac{i\pi}{2}H_0^1(k|y-t|)F_2^{-}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_1(y,t)F_2^{-}(t)dt, \tag{51}$$

где

$$Q\ (y,t)=-h\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda)\cdot(\gamma(\lambda)+h)}d\lambda. \tag{52}$$

Справедливы равенства:

$$Z^{+}(\lambda,l)=-Z^{-}(\lambda,-l)=$$

$$=\rho^{-1}(\lambda)\big(ch(2l\cdot\gamma(\lambda))+h\cdot\gamma^{-1}(\lambda)\cdot sh(2l\gamma(\lambda))\big)=1+O\big(\gamma^{-1}{}_{\varepsilon}(\lambda)\big), \tag{53}$$

$$Z^{+}(\lambda,-l)=-Z^{-}(\lambda,l)=\rho^{-1}(\lambda)=O(\exp(-2\gamma(\lambda)l)). \tag{54}$$

Введём обозначения:

$$W^{*}(\lambda)=Z^{+}(\lambda,l)-1=-1-Z^{-}(\lambda,-l), \tag{55}$$

$$w^{*}(\lambda)=Z^{+}(\lambda,-l)=-Z^{-}(\lambda,l). \tag{56}$$

Из определения функций $F_1^{\pm}(y)$ и $F_2^{\pm}(y)$ следуют соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{+}(\lambda)\cdot W^{*}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}Q_{2}(y,t)F_{1}^{-}(t)\,dt, \tag{57}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{-}(\lambda)\cdot W^{*}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}Q_{2}(y,t)F_{2}^{+}(t)\,dt, \tag{58}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{-}(\lambda)\cdot w^{*}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_{3}(y,t)F_{2}^{+}(t)\,dt, \tag{59}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D^{+}(\lambda)\cdot w^{*}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_{3}(y,t)F_{1}^{-}(t)\,dt, \tag{60}$$

где

$$Q_{2}(y,t)=\int_{0}^{\infty}\frac{W^{*}(\lambda)\cdot\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda)}d\lambda\,, \tag{61}$$

$$Q_{3}(y,t)=\int_{0}^{\infty}\frac{w^{*}(\lambda)\cdot\cos(\lambda(y-t))}{\gamma(\lambda)}d\lambda.\ \cdot \tag{62}$$

В результате применения интегральных преобразований (43)-(51), с учётом обозначений (55)-(56), из системы уравнений (32),(33),(36),(37) относительно неизвестных $C^{\pm}(\lambda)$ и $D^{\pm}(\lambda)$ получаем систему граничных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $F_1^{\pm}(t)$ и $F_2^{\pm}(t)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}\frac{i\pi}{2}H_{0}^{1}(k|y-t|)F_{1}^{+}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}Q_{1}(y,t)F_{1}^{+}(t)dt+\frac{i}{2}\int_{L^{+}}H_{0}^{1}(k|y-t|)F_{1}^{-}(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}Q_{2}(y,t)F_{1}^{-}(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_{3}(y,t)F_{2}^{+}(t)dt=u_{0}(y,l),\qquad y\in L^{+}; \tag{63}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}\frac{i\pi}{2}H_{0}^{1}(k|y-t|)F_{2}^{-}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_{1}(y,t)F_{2}^{-}(t)dt+\frac{i}{2}\int_{L^{-}}H_{0}^{1}(k|y-t|)F_{2}^{+}(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_{2}(y,t)F_{2}^{+}(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{L^{+}}Q_{3}(y,t)F_{1}^{-}(t)\,dt=0,\qquad y\in L^{-}; \tag{64}$$

$$-F_{1}^{+}(y)+F_{1}^{-}(y)+\frac{2h}{\pi}\int_{L^{+}}\frac{i\pi}{2}H_{0}^{1}(k|y-t|)F_{1}^{+}(t)dt+$$
$$+\frac{2h}{\pi}\int_{L^{+}}Q_{1}(y,t)F_{1}^{+}(t)dt=2h\cdot u_{0}(y,l),\quad y\in L^{+}; \tag{65}$$

$$2h\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}\frac{i\pi}{2}H_{0}^{1}(k|y-t|)F_{2}^{-}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^{-}}Q_{1}(y,t)F_{2}^{-}(t)dt\right]-$$
$$-F_{2}^{-}(y)+F_{2}^{+}(y)=0,\quad y\in L^{-}. \tag{66}$$

Условия Майкснера будут выполнены, если мы будем искать сужение функций $F_1^{\pm}(y)$ на интервалы $\left(\alpha_q^{+},\beta_q^{+}\right)$ и функций $F_2^{\pm}(y)$ на интервалы $\left(\alpha_p^{-},\beta_p^{-}\right)$ в виде:

$$F_{1}^{\pm}(y)=\frac{v_{q}^{\pm}(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_{q}^{+}\right)\left(\beta_{q}^{+}-y\right)}},\quad y\in\left(\alpha_{q}^{+},\beta_{q}^{+}\right),\quad\left(q=1,\ldots,M^{+}\right); \tag{67}$$

$$F_2^{\pm}(y)=\frac{v_p^{\pm}(y)}{\sqrt{(y-\alpha_p^-)(\beta_p^- - y)}},\quad y\in(\alpha_p^-,\beta_p^-),\quad (p=1,\ldots,M^-); \tag{68}$$

где

$$v_q^{\pm}(y)\in C^{\gamma,\mu}[\alpha_q^+,\beta_q^+],\quad (q=1,\ldots,M^+),\quad v_p^{\pm}(y)\in C^{\gamma,\mu}[\alpha_p^-,\beta_p^-],\quad (p=1,\ldots,M^-), \tag{69}$$

где $C^{\gamma,\mu}[\alpha_q^{\pm},\beta_q^{\pm}]$-непрерывные по Гёльдеру функции $\mu>0$.

Введем отображения:

$$g_q^+:[-1,1]\to[\alpha_q^+,\beta_q^+],\quad g_q^+(t)=\frac{\beta_q^+-\alpha_q^+}{2}\tau+\frac{\beta_q^++\alpha_q^+}{2},\quad (q=1,\ldots,M^+), \tag{70}$$

$$g_p^-:[-1,1]\to[\alpha_p^-,\beta_p^-],\quad g_q^-(t)=\frac{\beta_p^--\alpha_p^-}{2}\tau+\frac{\beta_p^-+\alpha_p^-}{2},\quad (p=1,\ldots,M^-). \tag{71}$$

и обозначения:

$$V_q^{\pm}(\tau)=v_q^{\pm}(g_q^+(\tau)),\quad (q=1,\ldots,M^+); \tag{72}$$

$$V_p^{\pm}(\tau)=v_p^{\pm}(g_p^-(\tau)),\quad (p=1,\ldots,M^-); \tag{73}$$

$$R_{1,q,m}^+(\xi,\tau)=-Q_1(g_q^+(\xi),g_m^+(\tau))-\frac{i\pi}{2}H_0^1\left(k\left|g_m^+(\tau)-g_q^+(\xi)\right|\right)-\delta_{q,m}\cdot\ln\left|g_m^+(\tau)-g_q^+(\xi)\right|,$$
$$(q=1,\ldots,M^+,\quad m=1,\ldots,M^+); \tag{74}$$

$$R_{2,q,m}^+(\xi,\tau)=-Q_2(g_q^+(\xi),g_m^+(\tau))-\frac{i\pi}{2}H_0^1\left(k\left|g_m^+(\tau)-g_q^+(\xi)\right|\right)-\delta_{q,m}\cdot\ln\left|g_m^+(\tau)-g_q^+(\xi)\right|,$$
$$(q=1,\ldots,M^+,\quad m=1,\ldots,M^+); \tag{75}$$

$$R_{3,q,r}^+(\xi,\tau)=Q_3(g_q^+(\xi),g_r^-(\tau)),\quad (q=1,\ldots,M^+,\quad r=1,\ldots,M^-); \tag{76}$$

$$R_{4,q,m}^+(\xi,\tau)=-2h\cdot\left(Q_1(g_q^+(\xi),g_m^+(\tau))+\frac{i\pi}{2}H_0^1\left(k\left|g_m^+(\tau)-g_q^+(\xi)\right|\right)+\delta_{q,m}\cdot\ln\left|g_m^+(\tau)-g_q^+(\xi)\right|\right),$$
$$(q=1,\ldots,M^+,\quad m=1,\ldots,M^+); \tag{77}$$

$$R_{1,p,r}^-(\xi,\tau)=-Q_1(g_p^-(\xi),g_r^-(\tau))-\frac{i\pi}{2}H_0^1\left(k\left|g_r^-(\tau)-g_p^-(\xi)\right|\right)-\delta_{p,l}\cdot\ln\left|g_r^-(\tau)-g_p^-(\xi)\right|,$$
$$(p=1,\ldots,M^-,\quad r=1,\ldots,M^-); \tag{78}$$

$$R_{2,p,r}^-(\xi,\tau)=-Q_2(g_p^-(\xi),g_r^-(\tau))-\frac{i\pi}{2}H_0^1\left(k\left|g_r^-(\tau)-g_p^-(\xi)\right|\right)-\delta_{p,r}\cdot\ln\left|g_r^-(\tau)-g_p^-(\xi)\right|,$$
$$(p=1,\ldots,M^-,\quad r=1,\ldots,M^-); \tag{79}$$

$$R_{3,p,m}^-(\xi,\tau)=Q_3(g_p^-(\xi),g_m^+(\tau)),\quad (p=1,\ldots,M^-,\quad m=1,\ldots,M^+);. \tag{80}$$

$$R^{-}_{4,p,r}(\xi,\tau)=-2h\cdot\left(Q_1\left(g^{-}_{p}(\xi),g^{-}_{r}(\tau)\right)+\frac{i\pi}{2}H^1_0\left(k\left|g^{-}_{r}(\tau)-g^{-}_{p}(\xi)\right|\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_{p,l}\cdot\ln\left|g^{-}_{r}(\tau)-g^{-}_{p}(\xi)\right|\right),\ \left(p=1,\ldots,M^{-},\quad r=1,\ldots,M^{-}\right).\qquad (81)$$

Учитывая обозначения (72)-(86), и производя замену переменных в соответствии с (70)-(71) переходим от системы ИУ (63)-(66) к системе интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1,1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V^{+}_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^{+}}\int_{-1}^{1}R^{+}_{1,q,m}(\xi,\tau)\frac{V^{+}_{1,m}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V^{-}_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^{+}}\int_{-1}^{1}R^{+}_{2,q,m}(\xi,\tau)\frac{V^{-}_{1,m}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+,$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{M^{-}}\int_{-1}^{1}R^{+}_{3,q,r}(\xi,\tau)\frac{V^{+}_{2,r}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=-u_0\left(g^{+}_{q}(\xi),l\right),$$

$$|\xi|\le 1,\quad \left(q=1,\ldots,M^{+}\right);\qquad (82)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V^{-}_{2,p}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{M^{-}}\int_{-1}^{1}R^{-}_{1,p,r}(\xi,\tau)\frac{V^{-}_{2,r}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V^{+}_{2,p}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{M^{-}}\int_{-1}^{1}R^{-}_{2,p,r}(\xi,\tau)\frac{V^{+}_{2,r}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^{+}}\int_{-1}^{1}R^{-}_{3,p,m}(\xi,\tau)\frac{V^{-}_{1,m}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,$$

$$|\xi|\le 1,\quad \left(p=1,\ldots,M^{-}\right);\qquad (83)$$

$$V^{+}_{1,q}(\xi)-V^{-}_{1,q}(\xi)+\frac{2h\sqrt{1-\xi^2}}{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V^{+}_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^{+}}\int_{-1}^{1}R^{+}_{4,q,m}(\xi,\tau)\frac{V^{+}_{1,m}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=-2h\sqrt{1-\xi^2}\cdot u_0\left(g^{+}_{q}(\xi),l\right),$$

$$|\xi|\le 1,\quad \left(q=1,\ldots,M^{+}\right);\qquad (84)$$

$$V^{-}_{2,p}(\xi)-V^{+}_{2,p}(\xi)+\frac{2h\sqrt{1-\xi^2}}{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V^{-}_{1,p}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{M^{+}}\int_{-1}^{1}R^{+}_{4,q,r}(\xi,\tau)\frac{V^{-}_{1,r}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,$$

$$\left|\xi\right| \le 1, \quad \left(p = 1,\ldots,M^-\right). \tag{85}$$

**5. Построение дискретной математической модели задачи.**

Система интегральных уравнений (82)-(85) численно решается с помощью одной из модификаций метода дискретных особенностей [6].

В качестве точек интерполяции выбраны корни многочлена Чебышева первого рода $\mathrm{T}_n(\tau)$:

$$\tau_{n,j} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = 1,\ldots,n. \tag{86}$$

Точки коллокации $\xi_{n,i}$ совпадают с точками интерполяции:

$$\xi_{n,i} = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{87}$$

В результате применения квадратурных формул интерполяционного типа получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_{1,q}^{+}\left(\tau_{n,j}\right)\cdot\left[\ln 2 + 2\sum_{s=1}^{n-1} T_i\left(\xi_{n,i}\right)\cdot\frac{T_i\left(\tau_{n,j}\right)}{s}\right] + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M^+}\sum_{j=1}^{n} R_{1,q,m}^{+}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{1,m}^{+}\left(\tau_{n,j}\right) -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_{1,q}^{-}\left(\tau_{n,j}\right)\cdot\left[\ln 2 + 2\sum_{s=1}^{n-1} T_i\left(\xi_{n,i}\right)\cdot\frac{T_i\left(\tau_{n,j}\right)}{s}\right] + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M^+}\sum_{j=1}^{n} R_{2,q,m}^{+}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{1,m}^{-}\left(\tau_{n,j}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{M^-}\sum_{j=1}^{n} R_{3,q,r}^{+}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{2,r}^{+}\left(\tau_{n,j}\right) = -u_0\left(g_q^{+}\left(\xi_{n,i}\right), l\right),$$

$$\left(i = 1,\ldots,n\right), \quad \left(q = 1,\ldots,M^+\right); \tag{88}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_{2,p}^{-}\left(\tau_{n,j}\right)\cdot\left[\ln 2 + 2\sum_{s=1}^{n-1} T_i\left(\xi_{n,i}\right)\cdot\frac{T_i\left(\tau_{n,j}\right)}{s}\right] + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{M^-}\sum_{j=1}^{n} R_{1,p,r}^{-}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{2,r}^{-}\left(\tau_{n,j}\right) -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_{2,p}^{+}\left(\tau_{n,j}\right)\cdot\left[\ln 2 + 2\sum_{s=1}^{n-1} T_i\left(\xi_{n,i}\right)\cdot\frac{T_i\left(\tau_{n,j}\right)}{s}\right] + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{M^-}\sum_{j=1}^{n} R_{2,p,r}^{+}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{2,r}^{+}\left(\tau_{n,j}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M^+}\sum_{j=1}^{n} R_{3,p,m}^{+}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{1,m}^{-}\left(\tau_{n,j}\right) = -u_0\left(g_q^{+}\left(\xi_{n,i}\right), l\right),$$

$$\left(i = 1,\ldots,n\right), \qquad \left(p = 1,\ldots,M^-\right); \tag{89}$$

$$V_{1,q}^{+}\left(\xi_{n,i}\right)-V_{1,q}^{-}\left(\xi_{n,i}\right)-\frac{2h\sqrt{1-\xi_{n,i}^{\;2}}}{n}\sum_{j=1}^{n}V_{1,q}^{+}\left(\tau_{n,j}\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{s=1}^{n-1}T_i\left(\xi_{n,i}\right)\cdot\frac{T_i\left(\tau_{n,j}\right)}{s}\right]+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M^{+}}\sum_{j=1}^{n}R_{4,q,m}^{+}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{1,m}^{+}\left(\tau_{n,j}\right)=-2h\sqrt{1-\xi_{n,i}^{\;2}}\,u_0\left(g_q^{+}\left(\xi_{n,i}\right),l\right),$$

$$\left(i=1,\ldots,n\right),\quad \left(q=1,\ldots,M^{+}\right); \qquad (90)$$

$$V_{2,p}^{-}\left(\xi_{n,i}\right)-V_{2,p}^{+}\left(\xi_{n,i}\right)+\frac{2h\sqrt{1-\xi_{i,n}^{\;2}}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}V_{2,p}^{-}\left(\tau_{n,j}\right)\cdot\left[\ln 2+2\sum_{s=1}^{n-1}T_i\left(\xi_{n,i}\right)\cdot\frac{T_i\left(\tau_{n,j}\right)}{s}\right]+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{M^{-}}\sum_{j=1}^{n}R_{4,p,r}^{-}(\xi_{n,i},\tau_{n,j})\cdot V_{2,p}^{-}\left(\tau_{n,j}\right)=0,$$

$$\left(i=1,\ldots,n\right),\quad \left(p=1,\ldots,M^{-}\right). \qquad (91)$$

**6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований**

Полученная система интегральных уравнений (63)-(66) отличается от систем интегральных уравнений задач дифракции на других не идеально проводящих структурах:

1. все интегральные уравнения зависят от двух неизвестных функций, и решение каждого из уравнений нельзя проводить отдельно от других.
2. в системе присутствуют как уравнения первого, так и второго рода.

В дальнейшем предполагается рассмотреть дифракцию на системе, состоящей из произвольного конечного числа экранов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский А. С, Слепян Г. Я.- Колебания и волны в электродинамических системах с потерями.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— 231 с.
2. Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений.- М.: - ФИЗМАТЛИТ, 2006. -280 с.
3. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: Институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65 – 66.
4. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных операторов и математическое моделирование в задачах электродинамики // Труды VП Международного симпозиума МДОЗМФ'97. - Феодосия, 1997. – С.176 – 178.
5. Гандель Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. Рассеяние электромагнитных волн тонкой сверхпроводящей лентой // Доклады Академии Наук 1996. Т. 351, № 4. - С.462 -4 64.
6. Гандель Ю.В. Кравченко В.Ф., Морозова Н.Н. Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент // Электромагнитные

волны и электронные системы. - М.: Радиотехника, 1997.-Т.2, №2, – С.14 – 26.

7. Gandel' Yu.V., Lifanov I.K., Polyanskaya. T.S. On the Justification of the Method of Discrete Singularities for Two-Dimensional Diffraction Problems // Differential Equations, Vol. 31, № 9, 1995. – pp. 1491 – 1497.

Надійшла – 21.03.2011.