УДК 532.595

Собственные колебания пластин в сжимаемой жидкости

Т. В. Емельянов, А. В. Науменко, Е. А. Стрельникова, Г. А. Шелудько
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

Предложен метод расчета частот и форм свободных колебаний пластин в сжимаемой жидкости, основанный на применении граничных интегральных уравнений. Построен алгоритм численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для определения давления на пластинку со стороны жидкости, основанный на применении проекционного метода. Разработана гибридная адаптивная процедура для вычисления элементов матрицы проекционного метода. Для нахождения собственных частот и форм колебаний пластины применен гибридный адаптивный метод поиска корней трансцендентного уравнения.

Ключевые слова: *свободные колебания, гидроупругое взаимодействие, сжимаемая жидкость, гибридный адаптивный метод поиска корней трансцендентного уравнения.*

Запропоновано метод розрахунку частот та форм коливань пластин в стисливій рідині, що заснований на застосуванні граничних інтегральних рівнянь. Побудовано алгоритм чисельного розв'язку гіперсингулярного інтегрального рівняння для визначення тиску на пластинку з боку рідини, заснований на застосуваннії проекційного методу. Розроблено гібридну адаптивну процедуру для обчислення елементів матриці проекційного методу. Для знаходження власних частот та форм коливань пластини застосовано гібридний адаптивний метод пошуку коренів трансцендентного рівняння.

Ключові слова: *вільні коливання, гідропружня взаємодія, стисла рідина, гібридний адаптивний метод пошуку коренів трансцендентного рівняння.*

The method to evaluate natural modes and frequencies of the plate interacting with the compressible fluid is developed. The approach is based on the boundary equation method. The numerical algorithm is elaborated for defining the liquid pressure using the hypersingular integral equation. The algorithm is based on usage of the proective method. The hybrid and adaptive procedures for defining the elements of matrix for projective method and for roots of transcendental equation were elaborated. Furthermore the natural frequencies were evaluated.

Key words: *free vibrations, hydro-elastic interaction, compressible fluid, hybrid and adaptive procedure for defining the roots of transcendental equation.*

1. Введение.

Исследование динамического взаимодействия упругих конструкций с жидкостью представляет достаточно сложную проблему, решению которой посвящена обширная литература [1-6]. В [5], [6] предложен подход, основанный на методе граничных интегральных уравнений, для решения задачи о свободных колебаниях оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. В данной работе метод граничных интегральных уравнений применен к задаче о свободных колебаниях пластин в сжимаемой жидкости.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим тонкую упругую шарнирно-опертую пластинку, совершающую колебания в жидкости. Предположим, что жидкость идеальная, сжимаемая, а ее течение, индуцированное колебаниями пластинки, является безвихревым. При этих условиях существует потенциал скоростей $\phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_f^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0\,, \tag{1}$$

где c_f – скорость звука в жидкости.

Уравнение колебаний пластинки в жидкости запишем в виде

$$\boldsymbol{LU} + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{P}\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ – операторы упругих и массовых сил; $\boldsymbol{U} = (U, V, W)$ – вектор-функция перемещений срединной поверхности пластинки, $\boldsymbol{P} = \left(0, 0, p\right)$ – давление жидкости на пластинку.

Вычислив перепад давления с помощью линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа, приходим к следующей краевой задаче относительно неизвестных перемещений пластинки и потенциала скоростей:

$$\boldsymbol{LU} + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} = \left(0, 0, -\rho_f\left(\dot{\phi}^+ - \dot{\phi}^-\right)\right), \tag{3}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi^+}{\partial n} = \frac{\partial\phi^-}{\partial n} = \dot{W}\,,\ \ P_0 \in S\,, \tag{5}$$

$$\operatorname{grad}\phi\,\big|_{\infty} = 0. \tag{6}$$

Здесь W – нормальная составляющая перемещений пластинки, S – поверхность пластинки, ρ_f – плотность жидкости, ϕ^+, ϕ^- – предельные значения потенциала скоростей ϕ при стремлении точки наблюдения к поверхности пластинки вдоль нормалей $\boldsymbol{n}^+$ и $\boldsymbol{n}^-$, соответственно.

3. Определение собственных частот и форм колебаний пластинки в вакууме.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях шарнирно-опертой пластинки размерами (a, b) в вакууме в случае отсутствия демпфирования. Уравнение свободных колебаний пластинки имеет вид

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 W + \rho_p\frac{1-\mu^2}{E}\ddot{W} = 0\,. \tag{7}$$

Здесь $W = W(t, x, y)$, E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона, ρ_p –

плотность материала пластинки, h – толщина пластинки, билапласиан $\nabla^4 W$ вычисляется по формуле

$$\nabla^4 W = \Delta(\Delta W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^2}.$$

Будем искать периодические решения уравнения (7) в форме

$$W = e^{i\omega t} w(x, y).$$

Получим

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 w - \rho_p \frac{1-\mu^2}{E}\omega^2 w = 0. \tag{8}$$

Собственными формами для задачи (7) будут следующие функции:

$$w_{lm}(x, y) = \sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}. \tag{9}$$

Определим собственные частоты. Поскольку

$$\Delta^2 w_{lm} = \pi^4\left[\frac{l^4}{a^4} + \frac{m^4}{b^4} + 2\frac{l^2}{a^2}\frac{m^2}{b^2}\right] w_{lm} = \pi^4\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2 w_{lm},$$

то собственные частоты колебаний прямоугольной пластинки в вакууме можно вычислить по формуле

$$\omega_{lm}^2 = \frac{h^2}{12\rho_p}\cdot\pi^4\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2.$$

Заметим, что формы, определяемые соотношением (9), взаимно ортогональные и обращаются в нуль на границах области (в нашем случае – прямоугольной пластинки).

4. Интегральное представление для потенциала скоростей.

Приведем дифференциальное уравнение связанной задачи о колебаниях пластинки в жидкости

$$\frac{h^2}{12}\Delta^2 W + \frac{\left(1-\mu^2\right)}{E}\rho_p \ddot{W} + \frac{\left(1-\mu^2\right)}{Eh}\rho_f\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^+ - \phi^-\right) = 0.$$

Представим потенциал скоростей жидкости в виде

$$\varphi\left(P_0, t\right) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \mu(P, t)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\cos\Omega_1^2\left(\left|P - P_0\right|\right)}{\left|P - P_0\right|}\right] dS, \quad \Omega_1^2 = \omega^2 / c_f^2.$$

В силу свойств потенциала двойного слоя имеем

$$\phi^{+}-\phi^{-}=\mu(P,t)\,.$$

Для определения функции $\mu(P)$ служит следующее уравнение, являющееся следствием условия непротекания

$$\frac{\partial\phi}{\partial n_0}=\frac{\partial W}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial n_0}\iint\limits_S\mu(P,t)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\cos\Omega_1^2(|P-P_0|)}{|P-P_0|}\right]dS=\frac{\partial w}{\partial t}=i\omega we^{i\omega t}\,. \tag{10}$$

Уравнение (10) является гиперсингулярным, интеграл в нем следует понимать в смысле главного значения по Адамару [7, 8].

5. Метод разложения по собственным формам.

Будем искать собственные формы колебаний пластинки в жидкости в следующем виде:

$$w(P)=\sum_{k=1}^{n}c_k w_k(P)\,,$$

где $w_k(P)$ – собственные формы колебаний шарнирно-опертой пластинки в вакууме. В силу линейности соотношения (5) получим

$$\mu(P,t)=i\omega e^{i\omega t}\mu(P);\quad \mu(P)=\sum_{k=1}^{n}c_k\mu_k(P)\,, \tag{11}$$

где функции $\mu_k(P)$ удовлетворяют гиперсингулярным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial n_0}\iint\limits_S\mu_k(P)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\cos\Omega_1^2(|P-P_0|)}{|P-P_0|}\right]dS=w_k(P),\quad k=\overline{1,n},$$

в которых неизвестная частота является параметром.

6. Проекционный метод решения гиперсингулярного интегрального уравнения.

Поскольку собственные формы колебаний пластинки в вакууме образуют базис, то можно искать функции $\mu_k(P)$ в следующем виде:

$$\mu_k(P)=\sum_{j=1}^{m}d_k^j w_j(P)\,, \tag{12}$$

где $\{D\}=\{d_k^j\},\left(j=\overline{1,n},\,k=\overline{1,m}\right)$ – неизвестные коэффициенты. После определения этих коэффициентов согласно формуле (11) имеем

$$\mu(P)=\sum_{k=1}^{n}c_k\mu_k(P)=\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{m}d_k^j w_j(P).$$

Заметим, что $d_k^j = d_k^j(\omega)$, $\omega^2 = \Omega_1^2 c_f^2$, т.е. элементы матрицы D зависят от неизвестной частоты колебаний пластинки в жидкости.

7. Сведение задачи о колебаниях пластинки к решению проблемы собственных значений для симметричной матрицы.

Введем следующие обозначения для частот колебаний пластинки в вакууме:

$$\omega_k^2 = \frac{E\pi^4}{\rho_p(1-\mu^2)}\frac{h^2}{12}\left[\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right]^2,$$

где индекс k определяется по индексам l и m

$$k(1,1)=1;\quad k(2,1)=2;\quad k(1,2)=3\,...$$

Запишем исходное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{h^2}{12}\Delta^2\sum_{k=1}^{n}c_k w_k - \frac{\left(1-\mu^2\right)}{E}\rho_p\omega^2\sum_{k=1}^{n}c_k w_k - \frac{\left(1-\mu^2\right)}{Eh}\rho_f\omega^2\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{m}d_k^j w_j(P)=0 \qquad (13)$$

Равенство (13) скалярно умножим на $w_i(P)$. Поскольку

$$\left((w_i(P),w_i(P)\right)=\int_0^a\int_0^b \sin^2\frac{l\pi x}{a}\sin^2\frac{m\pi y}{b}dxdy=\frac{ab}{4},\quad \left(w_i(P),w_j(P)\right)=0,\, i\neq j,$$

получим из (13), сокращая на $\left(1-\mu^2\right)/E$ и учитывая соотношение (8)

$$c_i\omega_i^2 - c_i\omega^2 - \omega^2\cdot\frac{1}{h}\frac{\rho_f}{\rho_p}\sum_{k=1}^{n}c_k d_k^i = 0;\qquad i=1,2,..,n,$$

или, в матричной форме

$$\{\Omega\}\{c\}-\omega^2\{E\}\{c\}-\omega^2\cdot\frac{1}{h}\frac{\rho_f}{\rho_p}\{D\}\{c\}=0,$$

где $\{\Omega\}$ – диагональная матрица с элементами $\Omega_{ij}=\delta_{ij}\omega_i^2,\quad i,j=\overline{1,n}$, $\{E\}$ – единичная матрица.

Приходим к проблеме собственных значений. Запишем характеристическое уравнение

$$f=f(\omega)=\det\left\{\{\Omega\}-\omega^2\left[\{E\}+\frac{1}{h}\frac{\rho_f}{\rho_p}\{D(\omega)\}\right]\right\}=0. \qquad (14)$$

Собственные частоты колебаний пластинки в жидкости определяются как корни трансцендентного уравнения (14) с помощью гибридного адаптивного метода, описанного в [9]. Рассмотрена последовательная схема «отделение – уточнение», основанная на адаптации поискового шага

$$h_{k_{j+1}} = h_{k_j} \Phi_j \left[Q_{k_j}, f(\omega) \right] \tag{15}$$

в зависимости от поведения функции $f(\omega)$. В (15) индекс k_j представляет собой номер шага, j – признак, указывающий вид операции (отделение j = 1, уточнение j = 0). Выражения для функций Φ_j, Q_{k_j} приведены в [9]. Для организации вычислительного процесса по формуле (15) необходимо определять функцию $f(\omega)$, т.е. строить матрицу $\{D\}$ при каждом фиксированном значении ω.

8. Построение матрицы $\{D\}$ при заданном значении ω.

Элементы матрицы $\{D\}$ – это коэффициенты в разложении функций $\mu_k(P)$ в ряд по собственным формам колебаний пластинки в вакууме. Применим проекционный метод для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении (12). Вычисление скалярных произведений приводит к необходимости определения четырехкратных интегралов. Преобразовав полученные четырехкратные интегралы так, как это описано в [8], построим такую совокупность систем линейных алгебраических уравнений:

$$\iint_S \iint_{S_0} \frac{\left(\mathrm{grad} \sum_{j=1}^{m} d_k^j w_j(P), \mathrm{grad} w_i(P_0) \right) \cos \frac{\omega^2}{c_f^2} \left(|P - P_0| \right)}{|P - P_0|} ds ds_0 -$$

$$- \frac{\omega^2}{c_f^2} \iint_S \iint_{S_0} \frac{\sum_{j=1}^{m} d_k^j w_j(P) \cdot w_i(P_0) \cos \frac{\omega^2}{c_f^2} \left(|P - P_0| \right)}{|P - P_0|} ds ds_0 = \left(w_k(P), w_i(P) \right),$$

$$i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, m}.$$

Запишем полученные соотношения в матричной форме

$$\{A\}\{D\} = \frac{ab}{4}\{E\},$$

где матрица $\{A\}$ может быть представлена в виде суммы двух составляющих

$$\{A\} = \{A_1\} - \frac{\omega^2}{c_f^2}\{A_2\}.$$

Отсюда следует, что при каждом фиксированном ω матрица $\{D\}$ представляет собой матрицу, обратную к $\frac{4}{ab}\{A\}$.

Элементы матриц $\{A_1\}$ и $\{A_2\}$ вычисляются по следующим формулам:

$$a_{ij}^1 = \frac{1}{4\pi}\iint_S \iint_{S_0} \frac{\left(\mathrm{grad} w_j(P), \mathrm{grad} w_i(P_0)\right)\cos\frac{\omega^2}{c_f^2}\left(|P-P_0|\right)}{|P-P_0|} ds ds_0\ ; \qquad (16)$$

$$a_{ij}^2 = \frac{1}{4\pi}\iint_S \iint_{S_0} \frac{\left(w_j(P), w_i(P_0)\right)\cos\frac{\omega^2}{c_f^2}\left(|P-P_0|\right)}{|P-P_0|} ds ds_0\ . \qquad (17)$$

Матрицы $\{A_1\}$ и $\{A_2\}$ симметричны. Поэтому приходим к проблеме собственных значений для симметричных матриц.

Для вычисления четырёхкратных интегралов (16), (17) применим гибридный адаптивный метод, предложенный в [10]. Метод позволяет учитывать характер поведения подинегральной функции и строить адаптивную сетку.

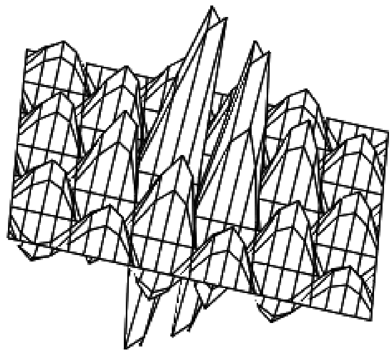

Рис.1. Сетка для вычисления элементов матриц $\{A_1\}$ *и* $\{A_2\}$.

На рис.1 показана сетка для вычисления внутреннего двукратного интеграла в соотношениях для элементов матриц $\{A_1\}$ и $\{A_2\}$ для $k(6,6)$. Интегралы по особым областям вычислялись аналитически, в предположении, что плотности заменялись в этих областях постоянными величинами.

При $\omega = 0$ ($c_f = \infty$) приходим к задаче о колебаниях пластинки в несжимаемой жидкости.

9. Численный анализ свободных колебаний прямоугольной шарнирно-опертой пластинки.

Рассматривались колебания прямоугольной шарнирно-опертой пластинки размерами $a = 1$ м; $b = 1$ м, толщиной $h = 0.1$ м в идеальной сжимаемой жидкости. Модуль упругости и коэффициент Пуассона равны $E = 2.1\times10^6$ н/м^2; ν

= 0.3. Плотности материала пластинки и жидкости равны соответственно, ρ_p = 7900 *кг*/м^3; ρ_f = 1000 *кг*/м^3, скорость звука в жидкости c_f =1500 м/сек.

На рис. 2 показаны четыре собственные формы колебаний пластинки.

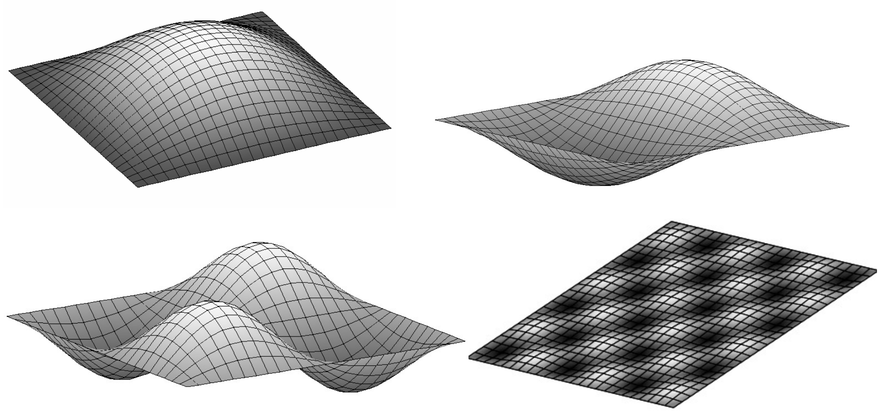

Рис. 2. Собственные формы колебаний пластинки.

В табл. 1 приведены квадраты частот колебаний пластинки в вакууме и жидкости, отвечающие данным формам.

Табл. 1.

Частоты колебаний шарнирно-опертой пластинки			
Номер частоты	В вакууме	В жидкости	
		Без учета сжимаемости	С учетом сжимаемости
k(1,1)	94.848	78.319	78.398
k(1.2)= k(2,1)	213.408	189.719	189.798
k(2,2)	379.392	346.005	346.129
k(6,6)	122923.25	96148.1	96161.0

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что влияние сжимаемости несущественно на частотах, для которых мало отношение ω / c_f. Для рассмотренных форм частоты колебаний в жидкости приблизительно на 20% меньше соответствующих частот колебаний в вакууме.

10. Выводы.

Разработан метод определения собственных частот и форм колебаний пластин в сжимаемой жидкости. Метод основан на применении теории потенциала для определения давления жидкости на пластину. Получено гиперсингулярное уравнение, неизвестная плотность в котором является перепадом давлений. Для решения гиперсингулярного уравнения применен проекционный метод. Получены аналитические выражения для элементов матрицы проекционного метода в виде четырехкратных интегралов, которые вычисляются с помощью специально разработанной гибридной адаптивной процедуры. Собственные частоты определяются как корни трансцендентного уравнения. Решение этого уравнения получено с помощью гибридного адаптивного метода. Изучено влияние сжимаемости на частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Локтев Б.Е., Ништ М.И. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов. – М.: Машиностроение, 1992. – 220 с.
2. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // Intern. Appl. Mech. – 2000. – **36,** N 4. – P. 421 – 448.
3. Kumar, V. & Ganesan, N. Dynamic analysis of conical shells conveying fluid. Journal of Sound and Vibration, 2008. – **310(1-2)**, pp. 38–57.
4. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью // Пробл. машиностроения – 2006. – № 1. – С.105 – 118.
5. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек.– Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с.
6. Луковский И.А., Троценко В.А., Усюкин В.И. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1989. – 240 с.
7. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н.Каразина, 2000. – 92 с.
8. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. – Харьков, Новое слово, 2005. – 252с.
9. Шелудько Г.А., Стрельникова Е.А. Гибридизация вычислительных процессов. - Харьков, Новое слово, 2006. т.1. – 212с.
10. Шелудько Г.А., Стрельникова Е.А. Гибридизация вычислительных процессов. - Харьков, Новое слово, 2007. т.2. – 182с.

Надійшла – 05.04.2011.