УДК 004.932.2:004.93’14

Условия существования тернарной мультисистемы с единым носителем

А. Г. Каграманян, В. П. Машталир, В. В. Шляхов
Харьковский национальный университет им. В.Н Каразина, Украина
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

В рамках грануляционного исчисления для обработки факторизованной информации произвольной физической природы с учетом неявных внутренних связей, присущих данным, и задаваемых отношений эквивалентности, определяющих, требуемые свойства в предметно-ориентированной области рассмотрены вопросы существования единого носителя тернарных мультисистем.

Ключевые слова: *грануляционное исчисление, мультиалгебраическая система, тернарная мультисистема, дифункциональность.*

В рамках грануляційного числення для обробки факторизованої інформації довільної фізичної природи з урахуванням неявних внутрішніх зв’язків, властивих даним, та відношень еквівалентності, що задається, визначають необхідні властивості в предметно-орієнтованій області розглянуті питання існування єдиного носія тернарних мультисистем.

Ключові слова: *грануляційне числення, мультиалгебраїчна система, тернарна мультисистема, дифункціональність.*

In Granular Computing frameworks problems of uniform carrier existence for ternary multisystems are proposed for factorized information of the arbitrary physical nature data processing considering implicit embedded relations inherent in the data and the external equivalence relations defining demanded properties in subject-oriented area.

Key words: *Granular Computing, multialgebraic system, ternary multisystem, difunctionality.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Неразличимость и сходство объектов, процессов или явлений, математической экспликацией которых являются, вообще говоря, отношения эквивалентности и толерантности, являются одним из основных инструментов активно развивающегося в последние годы грануляционного исчисления (Granular Computing) [1-3]. Грануляция информации позволяет представлять нечто «целое» стратифицированными семействами классов, каждый из которых, в свою очередь, является множеством элементов, неразличимых с точки зрения внутренних (сущностных), внешних (структурных) или контекстных (предметно-ориентированных) свойств [3-6].

Грануляция – суть междисциплинарных исследований, активно развивавшиеся прежде всего в рамках интервального анализа, «грубых» (аппроксимационных) множеств (rough sets), вычислительного интеллекта, математического аппарата баз данных с контекстным поиском, универсального шкалирования, кластерных методов и т.п. [2-9]. В самом общем виде в основу математического инструментария могут быть положены n-арные отношения [9,10], обобщение свойств которых обеспечит методологию и методику информационного анализа неочевидно структурированных динамических систем с изменяющейся в процессе функционирования структурой, в частности, в виде мультиалгебраических систем, носителями в которых являются фактормножества [11-15]. Актуальность такого подхода следует из того, что вместо совокупности разнородных подходов, нередко ориентированных на решение конкретных практических задач, можно получить достаточно универсальный инструментарий, обеспечивающий единую методологию грануляционного исчисления при использовании различных математических структур в качестве моделей обобщения данных разной физической природы.

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на использовании при решении задач грануляционного исчисления математического аппарата мультиалгебраических систем [11,12], в качестве носителей в которых используются семейства классов эквивалентностей. Одной из главных особенностей применения этого инструмента заключается в необходимости решения задачи согласования исходных данных с целью получения нетривиальных (вырожденных) мультисистем [13-15]. Полученные к настоящему моменту результаты в основном связаны с анализом общих случаев, тогда как конкретизация условий существования носителей в виде фактормножеств применительно к конкретным моделям должна увеличить практическую направленность применения мультиалгебраических систем.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Свойство дифункциональности, вообще говоря, соответствий играет существенную роль при изучении мультиалгебраических систем. Более точно, если некоторое соответствие T дифункционально, т.е. $T = TT^{-1}T$, то оно индуцирует и на области определения, и на области значений отношения эквивалентности, фактормножества по которым равномощны. Тем самым, создаются предпосылки для формализации многих задач грануляции, а именно – появляются возможности изучения мультисистем различной арности.

Цель настоящей работы – поиск условий существования тернарных мультисистем с единым носителем, что предопределяет изучение конкретных математических структур для формализации задач грануляционного исчисления, например, в виде мультигрупп.

4. О матрице отношения дифункциональности

Пусть $T(x, y)$ – произвольное дифункциональное отношение на $A \times B$, A, B – произвольные конечные множества. Тогда, если представить отношение $T(x, y)$ в матричной форме, из дифункциональности следует

$$\left.\begin{matrix} T(a_i, b_j) = 1 \\ T(a_k, b_j) = 1 \\ T(a_i, b_l) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(a_i, b_l) = 1 .$$

Иначе говоря, если в матрице A_T отношения $T(x, y)$ на местах $(i, j), (k, j)$, (k,l) стоят 1, то и на месте (i,l) тоже будет 1. В дальнейшем будем говорить, если три элемента матрицы (трактуя условно их как «вершины четырехугольника»), имеющие 1, индуцируют 1 и в четвертой «вершине», то эта матрица удовлетворяет правилу «четырехугольника».

Нетрудно заметить, что путем перенумерации элементов множеств A и B этот четырехугольник можно трансформировать в квадрат 2×2, состоящий только из 1, и переместить его на любое место исходной матрицы A_T Очевидно и то, что подобные матрицы могут быть приведены к блочному виду

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccccc}
\overbrace{\hphantom{1\ \ \cdots\ \ 1}}^{m_1} & & & \overbrace{\hphantom{1\ \ \cdots\ \ 1}}^{m_2} & & & \cdots & \overbrace{\hphantom{1\ \ \cdots\ \ 1}}^{m_r} & & & & &
\end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_1 \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_2 \\
\vdots \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_r \\
\\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

где блоки состоят только из 1, имеют размеры (n_i, m_i), $i=\overline{1,r}$ и $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$, $n = |A|$, $m = |B|$ – мощности множеств.

Подчеркнем, что любая перенумерация – это действие некоторой подстановки S_n, где n – число элементов. Ясно, что любую $n\times m$ матрицу можно трансформировать применением двух подстановок S_n и S_m. Результат этой трансформации произвольной матрицы A будем обозначать $S_{n,m}(A)$. В итоге справедливо следующее

Утверждение 1. Для любого дифункционального отношения $T(x, y)$ всегда найдутся две подстановки, для которых $S_{n,m}(A_T)$ имеет блочный вид.

Утверждение 1 имеет ряд следствий.

В соответствии с терминологией алгебраических (и мультиалгебраических) систем отношение дифункциональности является моделью $\langle\{A\times B\}, T(x, y)\rangle$, которую будем называть дифункциональной. Но из ранее сказанного, ясно, что на классах эквивалентности порождается мультимодель, в которой второй элемент единственен и представляет собой простейшую эквивалентность (эквивалентности равенства), т.е.

$$I(x,y)=\begin{cases}1, & x=y,\\ 0, & x\neq y.\end{cases}$$

Таким образом, справедливо

Следствие 1. Любая дифункциональная модель всегда индуцирует мультимодель в виде эквивалентности равенства.

При этом, если у двух дифункциональных моделей число блоков в матрицах $S_{n_1,m_1}(A_{T_1})$ и $S_{n_2,m_2}(A_{T_2})$ совпадает, а природа множеств, образующих их носитель, несущественна, то индуцируется одна и та же мультимодель в виде эквивалентности равенства, что фактически означает их алгебраическую неразличимость. Введем определения.

Определение 1. Порядком отношения дифункциональности T и соответствующей ей модели дифункциональности назовем число блоков в матрице $S_{n,m}(A_T)$ и будем его обозначать $\pi(T)$.

Определение 2. Два отношения дифункциональности T_1 и T_2 и соответствующие им модели изоморфны, если они порождают одну и ту же мультимодель в виде эквивалентности равенства.

Отсюда вытекает

Следствие 2. (Критерий изоморфизма дифункциональностей)

Две дифункциональности (дифункциональные модели) T_1 и T_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их порядки равны, т.е. $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \pi(T_1)=\pi(T_2)$.

5. Тернарные отношения и дифункциональность

Рассмотрим произвольное тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A\times B\times C$. Нас будет интересовать вопрос, при каких условиях это отношение индуцирует мультисистему с единым носителем на всех местах своих аргументов. Поскольку произвольное тернарное отношение представляет собой семейства бинарных, среди которых на уровне мультисистем только дифункциональные отношения формируют единый носитель с точностью до природы элементов, то естественно предполагать, что именно это свойство должно быть определяющим при решении поставленной задачи.

Определение 3. Тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A\times B\times C$ является усеченно-дифункциональным по аргументу x, если при любом фиксированном $x\in A$, отношение $F(x,y,z)$ как бинарное отношение, заданное на $B\times C$, является отношением дифункциональности.

Определение 4. Тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A\times B\times C$ является вполне-дифункциональным, если оно является усеченно-дифункциональным по каждому из своих аргументов.

Лемма 1. Пусть $T_1(x,y)$ и $T_2(x,y)$ – дифункциональные отношения на $A\times B$. Тогда если $\forall x_1,x_2\in A$, $\forall y\in B$ $T_1(x_1,y)=T_1(x_2,y)\Leftrightarrow T_2(x_1,y)=T_2(x_2,y)$, то $T_1\sim T_2$.

Доказательство. Рассмотрим условие леммы. Если при $\forall y\in B$ для каких-то $\forall x_1,x_2\in A$ имеет место равенство $T_1(x_1,y)=T_1(x_2,y)$, то элементы x_1 и x_2

принадлежат одному классу эквивалентности, которые индуцируются отношением T_1 на множестве A, т.е. $x_1 \overset{T_1}{\sim} x_2$ ($\overset{T_1}{\sim}$ –эквивалентность относительно T_1), из этого условия следует: $T_2(x_1, y) = T_2(x_2, y)$, т.е. $x_1 \overset{T_2}{\sim} x_2$. Значит, класс эквивалентности A_1 / T_1 содержащий элементы x_1 и x_2, принадлежит классу A_1 / T_2, содержащему эти же элементы. Но условие леммы справедливо и в обратную сторону, следовательно, $A_1 / T_1 \subset A_1 / T_2$, $A_1 / T_2 \subset A_1 / T_1$ или $A_1 / T_1 = A_1 / T_2$, где A_i / T_j классы эквивалентности, индуцируемые отношением T_j на множестве A. Таким образом, разбиения, которые индуцируются на множестве A дифункциональностями T_1 и T_2, совпадают, откуда следует совпадение мощностей разбиений $|\{A_1 / T_1\}| = |\{A_1 / T_2\}|$. Следовательно $T_1 \sim T_2$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Следует сказать, что в случае конечных множеств A и B равенство $|\{A_1 / T_1\}| = |\{A_1 / T_2\}|$ означает равенство количества единичных блоков в матрицах A_{T_1} и A_{T_2}, т.е. $\pi(T_1) = \pi(T_2)$. Эта ситуация наиболее часто встречается на практике. Однако, если множества A и B произвольны, то при наличии одной области определения двух отношений дифункциональности конечностью можно пренебречь, и лемма 1 справедлива в общем случае.

Следствие 3. Условие леммы 1 является не только необходимым, но и достаточным.

Доказательство. Выше показано, что условие леммы 1 означает совпадение разбиений $\{A / T_1\}$ и $\{A / T_2\}$, но дифункциональности T_1 и T_2, в случае их изоморфизма имеют одинаковые разбиения, что влечет за собой выполнение условие леммы 1.

Следствие 4. Для двух отношений дифункциональности T_1 и T_2, имеющих одну область определения, критерием изоморфизма является условие леммы 1.

Вернемся к тернарному отношению $F(x, y, z)$, заданному на $A \times B \times C$.

Определение 5. Сечением тернарного отношения будем называть бинарное отношение, которое индуцируется исходным путем фиксации одного из аргументов.

Утверждение 2. Произвольное тернарное отношение $F(x, y, z)$ на $A \times B \times C$ имеет все изоморфные друг другу сечения тогда и только тогда, когда оно вполне-дифункционально, и для любых $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ и $z \in C$ имеют место условия:

а) $F(x_1, y_1, z) = F(x_1, y_2, z) \Leftrightarrow F(x_2, y_1, z) = F(x_2, y_2, z)$;

б) $F(x_1, y_1, z) = F(x_2, y_1, z) \Leftrightarrow F(x_1, y_2, z) = F(x_2, y_2, z)$.

Доказательство. Рассмотрим достаточность. Нетрудно заметить, что если тернарное отношение $F(x, y, z)$ является вполне-дифункциональным, то все сечения являются отношениями дифункциональности, заданными на одной области определения.

Доказательство. Рассмотрим достаточность. Нетрудно заметить, что если тернарное отношение $F(x,y,z)$ является вполне-дифункциональным, то все сечения являются отношениями дифункциональности, заданными на одной области определения.

Рассмотрим теперь условие а). Ясно, что в нем присутствуют два сечения $F(x_1,y,z)$ и $F(x_2,y,z)$, полностью удовлетворяющие условиям леммы 1, т.к. условие а) – это фактически условие леммы 1 для этих сечений. Но поскольку это критерий изоморфизма, то для любых $x_1,x_2 \in A$ имеем изоморфизм $F(x_1,y,z) \sim F(x_2,y,z)$. Рассуждая абсолютно аналогично, из условия б) имеем $F(x,y_1,z) \sim F(x,y_2,z)$.

Если обозначить разбиения, индуцируемые некоторым отношением F на множествах A,B и C соответственно через $\{A/F\},\{B/F\},\{C/F\}$, то из $F(x_1,y,z) \sim F(x_2,y,z)$ следует, что мощности разбиений $\{B/F\}$ и $\{C/F\}$ совпадают и не зависят от выбора элемента x, т.е. $|\{B/F\}|=|\{C/F\}|$. Совершенно аналогично из условия $F(x,y_1,z) \sim F(x,y_2,z)$ имеем $|\{A/F\}|=|\{C/F\}|$, но тогда получаем $|\{A/F\}|=|\{B/F\}|=|\{C/F\}|$, что и означает вместе с вполне-дифункциональностью отношения $F(x,y,z)$ изоморфизм всех его сечений. Достаточность доказана.

Перейдем к доказательству необходимости. Если все сечения изоморфны, то вполне-дифункциональность выполняется, поскольку будут иметь место равенства (12), из которых следует существование взаимнооднозначного соответствия между множествами классов эквивалентностей, что порождает дифункциональности в каждом из сечений. Условия а) и б) будут выполняться, как критерии изоморфизма. На этом завершается доказательство теоремы.

Следствие 5. Таким образом, получены условия, при которых произвольное тернарное отношение, заданное на декартовом произведении произвольных множеств A,B и C индуцирует мультиалгебраическую систему с единым носителем, т.е. мультиотношение заданное на декартовом кубе некоторого множества.

Необходимо подчеркнуть, что именно этот результат представляет собой основу для формирования мультигрупп.

6. Мультиалгебраические системы, индуцируемые произвольными n-арными отношениями, с единым носителем в виде декартового куба

Пусть дано произвольное n-арное отношение S, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$. Разобьем набор множеств $\{A_i\}_{i=1}^n$ на k непустых частей следующим образом: в первую часть входит A_1 и какие-то элементы из оставшихся, во вторую часть входит минимальный из номеров A_i, который не вошел в первую часть и какие-то элементы из остатка, не вошедшие в первую часть, в третью часть – минимальный из номеров A_i, не вошедший в первые две части и какие-то элементы остатка и т.д. Тогда нетрудно понять, что на декартовом произведении множеств $B_1 \times \ldots \times B_k$, где B_j

представляет собой декартово произведение множеств A_i, входящих в j-ую часть и расположенных в порядке возрастания номеров, заданным n-арным отношением S индуцируется некоторое k-арное отношение, зависящее от способа разбиения по вышеописанной процедуре на k частей. Все такие разбиения образуют некоторое множество, элемент которого будем обозначать p_k.

Определение 6. Фактор-отношением k-го порядка данного произвольного n-арного отношения S будем называть k-арное отношение, индуцируемое исходным при помощи некоторого разбиения p_k области определения $A_1 \times \ldots \times A_n$ на k частей и будем его обозначать $\Phi(p_k)/S$.

Теперь может быть сформулировано и доказано следующее

Утверждение 3. Пусть дано произвольное n-арное отношение S, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$. Тогда им индуцируется тернарное мультиотношение с единым носителем (фактически заданное на декартовом кубе некоторого множества) в том и только в том случае, когда существует разбиение p_3 набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ такое, что соответствующие ему фактор отношение третьего порядка $\Phi(p_3)/S$ удовлетворяет как тернарное отношение условиям утверждения 2.

Доказательство. Сначала рассмотрим достаточность. Ясно, что если существует некоторое разбиение p_3 набора $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то соответствующее ему фактор-отношение третьего порядка, $\Phi(p_3)/S$, индуцируемое отношением S, фактически задано на декартовом произведении множеств $B_1 \times B_2 \times B_3$, где $B_i = A_{i(1)} \times \ldots \times A_{i(r_i)}$, где $i \in \{1,2,3\}$, а набор $A_{i(1)}, A_{i(2)}, \ldots, A_{i(r_i)}$ входит в набор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в порядке возрастания номеров, т.е. $i_1, i_2 < \ldots < i_{r_i}$, r_i – мощность i-ой части разбиения p_3, при этом $r_1, r_2, r_3 > 0$, $r_1 + r_2 + r_3 = n$.

Поскольку тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ удовлетворяет условиям утверждения 2, оно имеет все изоморфные друг другу сечения. Из следствия 5 вытекает, что тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ индуцирует на каждом из множеств B_1, B_2, B_3 равномощные разбиения или фактически одно разбиение, с точностью до природы элементов и состава элементов. В рамках наших обозначений будут иметь место равенства $|\{B_1/[\Phi(p_3)/S]\}| = |\{B_2/[\Phi(p_3)/S]\}| = |\{B_3/[\Phi(p_3)/S]\}|$, из которых вытекает, что множества $\{B_i/[\Phi(p_3)/S]\}$ можно взаимно-однозначно отобразить на некоторое множество C, на декартовом кубе C^3 которого задано тернарное мультиотношение, индуцируемое $\Phi(p_3)/S$ и фактически порожденное произвольным отношением S. Достаточность доказана.

Перейдем к доказательству необходимости: она вытекает из следующих соображений. Если S порождает некоторое тернарное мультиотношение на декартовом кубе какого-то множества классов эквивалентности C, то ясно, что существует некоторое разбиение типа p_3 набора элементов $A_1, A_2, ..., A_n$. Более того, это означает выполнение равенств

$$|\{B_1 / [\Phi(p_3) / S]\}| = |\{B_2 / [\Phi(p_3) / S]\}| = |\{B_3 / [\Phi(p_3) / S]\}|,$$

для соответствующих p_3 множеств B_1, B_2, B_3. Но из утверждения 2 следует, что эти равенства влекут изоморфизм всех сечений тернарного мультиотношения, индуцируемого S, т.е. выполнения условий: вполне-дифункциональности и условий а), б) утверждения 2, что завершает доказательство утверждения.

Таким образом, тернарное мультиотношение с единым носителем может порождаться исходным не только тернарным отношением, но и произвольным n-арным. При этом важно подчеркнуть следующее

Следствие 6. Любое n-арное отношение индуцирует на классах эквивалентности все отношения по арности от 1 до n.

7. Координатные формулировки условий существования единого носителя в виде декартового куба

Верификация любой мультиалгебраической системы требует экспериментальной проверки условий ее существования. В полной мере сказанное относится и к тернарным отношениям с единым носителем, а именно необходимо уметь оперировать данными непосредственно на уровне исходного n-арного отношения. В связи с этим полученные выше результаты представим в явном или, будем говорить, координатном виде.

Введем некоторые обозначения. Рассмотрим кортеж элементов $x_1, ..., x_n$. Его можно различными способами разбить на m частей с сохранением номера элемента x_i. На рис. 1 схематично показана такая выборка.

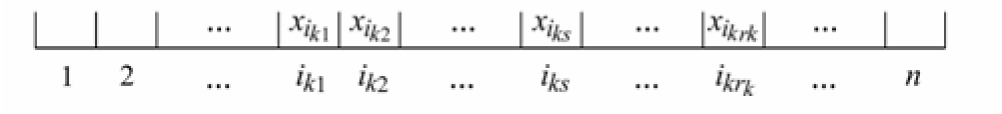

Рис. 1. Элемент разбиения кортежа

На рис. 1 выделены позиции, которые занимают элементы $x_{i_{k1}}, x_{i_{k2}}, ..., x_{i_{krk}}$, причем такая индексация подчеркивает, что важны не сами элементы кортежа, а номера аргументов, входящих в k-ю часть: это номера – $i_{k1}, i_{k2}, ..., i_{krk}$. Введем преобразование $f_k(\overline{x}) = \{x_{i_{k1}}, x_{i_{k2}}, ..., x_{i_{krk}}\}$, где $\overline{x}$ есть кортеж $x_1, ..., x_n$. Это преобразование $f_k(\overline{x})$ осуществляет выборку элементов с фиксацией их номеров. Например, рассмотрим разбиение кортежа $\overline{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ на две части $\{x_1, x_3, x_5\}$ и $\{x_2, x_4\}$, т.е. $f_1(\overline{x}) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $f_2(\overline{x}) = \{x_2, x_4\}$, $\overline{x} = \{f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x})\}$. Кроме того, если $\overline{x}, \overline{y} \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$, то $\{f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x})\} = \{x_1, y_2, x_3, y_4, x_5\}$. В общем случае в соответствии с проведенными рассуждениями имеем

$$\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m \in A_1 \times ... \times A_n \Rightarrow \{f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{x}_2), ..., f_m(\overline{x}_m)\} \in A_1 \times ... \times A_n.$$

Теперь можно вернуться к координатной формулировке искомых условий.

Лемма 2. Если для n-арного отношения S, заданного на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ существует разбиение p_3 такое, что

$$B_1 = A_{i11} \times A_{i12} \times ... \times A_{i1r1},$$
$$B_2 = A_{i21} \times A_{i22} \times ... \times A_{i2r2},$$
$$B_3 = A_{i13} \times A_{i13} \times ... \times A_{i3r3}$$

где $\overline{n} = \{f_1(\overline{n}), f_2(\overline{n}), f_3(\overline{n})\}$, $\overline{n} = \{1, 2, ..., n\}$, $r_1 + r_2 + r_3 = n$, и для любых $\overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2$, $\overline{z}_1, \overline{z}_2 \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ выполняется импликация

$$\left.\begin{array}{r} S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z}_2)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z}_2)) = 1,$$

тогда индуцированное тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ на $B_1 \times B_2 \times B_3$ является усеченно-дифункциональным по первому аргументу $\overline{x} \in B_1$.

Справедливость леммы очевидна. Из определения преобразований f_1, f_2, f_3 с учетом импликации в условии леммы имеем: $\Phi(p_3)/S$ – **дифункциональность.**

Нетрудно заметить, что если будут справедливы импликации по другим аргумента, то из леммы 2 будет следовать усеченная дифункциональность $\Phi(p_3)/S$ по остальным аргументам, т.е. индуцированное тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ является вполне-дифункциональным.

В итоге можно привести координатную формулировку утверждения 3.

Утверждение 4. Произвольное n-арное отношение S индуцирует тернарную мультисистему с единым носителем, если существует разбиение p_3, удовлетворяющее условиям

а) для любых $\overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{z}_1, \overline{z}_2 \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ справедлива импликация

$$\left.\begin{array}{r} S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z}_2)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z}_2)) = 1;$$

б) для любых $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y}, \overline{z}_1, \overline{z}_2 \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ справедлива импликация

$$\left.\begin{array}{r} S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}), f_3(\overline{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}), f_3(\overline{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}), f_3(\overline{z}_2)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}), f_3(\overline{z}_2)) = 1;$$

в) для любых $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{z} \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ справедлива импликация

$$\left.\begin{array}{r} S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z})) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z})) = 1; \\ S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z})) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z})) = 1;$$

г) для любых $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{z} \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ имеют место

$$S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z})) = S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z})) \Leftrightarrow S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z})) = S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z})),$$
$$S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z})) = S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}_1), f_3(\overline{z})) \Leftrightarrow S(f_1(\overline{x}_1), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z})) = S(f_1(\overline{x}_2), f_2(\overline{y}_2), f_3(\overline{z})).$$

Справедливость утверждения достаточно очевидна. Импликации а) – в) рассмотрены выше, а условия г) есть ни что иное, как условия утверждения 2 об изоморфизме сечений тернарного отношения.

8. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Установлены условия существовании тернарных мультисистем с носителем в виде декартового куба фактор множеств. С одной стороны, полученные условия конструктивны в том плане, что обеспечивают верификацию мультиалгебраических систем на уровне исходных отношений. С другой, в силу того, что используемые разбиения p_3 могут быть различными, могут индуцироваться различные тернарные мультисистемы, которые, по всей видимости, каким-то образом взаимосвязаны, и эта связь требует дальнейшего изучения. Наконец, тернарные мультисистемы – основа для исследования различных математических структур. В частности, наибольшую перспективу представляет изучение мультигрупп. Вместе с тем, уже на данном этапе исследований найденные условия формирования единых носителей могут использоваться при решении целого ряда задач грануляционного исчисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L.A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic / L.A. Zadeh // Fuzzy Sets Systems. – 1997. – Vol. 19. – P. 111-127.
2. Yao Y. The art of granular computing // Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms / M. Kryszkiewicz, J.F. Peters, H. Rybinski, A. Skowron (eds.). – Lecture Notes in Artificial Intelligence. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. – 2007. – Vol. 4585. – P. 101-112.
3. Pedrycz W. Knowledge-based clustering: from data to information granules. – N.Y.: John Wiley & Sons, Inc. – 2005. – 316 p.
4. Lin T.Y. Granular computing I: the concept of granulation and its formal model // Int. J. of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems. – 2009. – Vol. 1, No. 1. – P. 21-42.
5. Bargiela A., Pedrycz W. Toward a theory of granular computing for human-centered information processing // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 16, No. 2. – P. 320-330.
6. Yao Y.Y. The rise of granular computing // J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition). – 2008. – Vol. 20, No. 3. – P. 299-308.
7. Granular computing: at the junction of rough sets and fuzzy sets / R. Bello, R. Falcón, W. Pedrycz, J. Kacprzyk (eds.) // Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing. – Berlin, Heidelberg: Spinger-Verlag. – 2008. – 335 p.

8. Stepaniuk J. Rough-granular computing in knowledge discovery and data mining // Studies in Computational Intelligence. – Berlin, Heidelberg: Spinger-Verlag. – 2008. – Vol. 152. – 158 p.
9. Cheng J.X. Generalizing quotient space theory from structural viewpoint // Proceedings of 2005 IEEE International Conference on Granular Computing /X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B. Zhang (eds.): Piscataway, NY: IEEE. – 2005. – Vol. 1. – P. 121-124.
10. Zhang L., Zhang B. Quotient spaces and granular computing // Handbook of granular computing / W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich (eds.) Chichester: John Wiley and Sons Ltd. – 2008. – P. 411-424.
11. Машталир В.П., Шляхов В.В. Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – №6. – С. 11-21.
12. Машталир В.П., Шляхов В.В. Индуцированная согласованность отношений в задачах грануляции информации // Бионика интеллекта. – 2006. – №1 (64). – С. 19-26.
13. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Multialgebraic systems in information granulation // Int. J. “Information Theories and Applications”. – 2008. – Vol. 15, No 1. – P. 55-63.
14. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Problems of multirelations existence // Symulacja w badaniach i rozwoju / L. Bobrowski, A. Grzyb (Eds.). – Krakow: PTSK. – 2007. – P. 269-274.
15. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Multialgebraic structures existence for granular computing // Proc. of. XIII-th International Conference Knowledge-Dialogue-Solutions. – Sofia: FOI-COMMERCE. – Vol. I. – 2007. – P. 322–330.

Надійшла – 15.02.2011.