УДК 51795

О дифференциальном уравнении параболического типа

Т. З. Чочиев
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-Алания, Россия

Трудности исследования дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с переменными коэффициентами связаны с наличием двух нелинейных уравнений класса Риккати. В работе методом приведения к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка дается решение, удовлетворяющее начальному и краевому условиям. Выявлены нелинейные уравнения, сопровождающие параболическое уравнение.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения параболического типа, класс Риккати, нелинейность, начальные и краевые условия, эквивалентность.*

Труднощі дослідження диференціального рівняння в частинних похідних параболічного типу зі змінними коефіцієнтами пов'язані з наявністю двох нелінійних рівнянь класу Ріккаті. У роботі методом приведення до системи з двох диференціальних рівнянь першого порядку дається рішення, що задовольняє початковому й крайовій умовам. Виявлено нелінійні рівняння, що супроводжують параболічне рівняння.

Ключевые слова: *диференціальні рівняння параболічного типу, клас Ріккаті, нелінійність, початкові та крайові умови, еквівалентність.*

Difficulties of observing the partial differential equation of parabolic type with variable coefficients associated with the presence of two nonlinear equations of Riccati class. In the method of reduction to a system of two first order differential equations, a solution is satisfying the initial and boundary conditions. Identified non-linear equations that accompany the parabolic equation.

Key words: *differential equations of parabolic type, class of Riccati, nonlinearity, initial and boundary conditions, the equivalence*

1. Общее уравнение параболического типа.

Из трех типов линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами сравнительно сложным считается параболический класс ибо, как убедимся ниже, его решение связано с решениями двух нелинейных дифференциальных уравнений класса Риккати. Общий вид упомянутого уравнения есть:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial u}{\partial t}+D\frac{\partial u}{\partial x}+Eu=f(x,t), \qquad (A^2-4B=0)\,,(1.1)$$

где $A(x,t),B(x,t),C(x,t),D(x,t),E(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции в области $\left(0\le t<\infty;\ 0<x<\infty\right)$. Причем A и B допускают непрерывные частные производные второго порядка, C и D имеют производные первого порядка, а E и f – непрерывные функции.

Для (1.1) задача ставится следующим образом: требуется определить функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и следующим условиям [1,2,3,4]:

$$u(x,0)=\varphi(x)\,, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\alpha(t)}{k}(u-\theta)=0 \text{ при } x=0\,, \tag{1.3}$$

где $\alpha(t)$ – коэффициент теплоотдачи, k – коэффициент теплопроводности, θ – значение температуры на поверхности тела $x=0$ при конвективном теплообмене, $\varphi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, ограниченная при $x\to\infty$.

Приведем (1.1) к системе из двух уравнений первого порядка [5,6,7,8]. Если коэффициенты соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+C_1u\right)+B_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda^*u\right)+D_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+C_1\,u\right)=f(x,t) \tag{1.4}$$

определить следующим образом $(A^2-4B=0)$:

$$A_1=B_1=\frac{A}{2},\, D_1=C-C_1;\;\; \lambda^*=\frac{A_1}{B_1}C_1+\frac{1}{B_1}\left[D_1-A_1C-\frac{\partial A_1}{\partial t}-B_1\frac{\partial A_1}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}+A_1\frac{\partial C_1}{\partial x}-C_1^2+\left(C+B_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_1}{B_1}\right)\right)C_1=$$

$$=E-B_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{B_1}\left(D-A_1C-\frac{\partial A_1}{\partial t}-B_1\frac{\partial A_1}{\partial x}\right)\right], \tag{1.5}$$

то (1.4) можно представить как систему равенств:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+A_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+C_1u=v,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+B_1\dfrac{\partial v}{\partial x}+D_1v=B_1(C_1-\lambda^*)\dfrac{\partial u}{\partial x}+B_1\dfrac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}u+f.\end{cases} \tag{1.6}$$

Но она сложная, поэтому введем другую систему,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+[A_1-lB_1(C_1-\lambda^*)]\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left[C_1-lB_1\dfrac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]u=\rho,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+B_1\dfrac{\partial t}{\partial x}+\left(D_1-\dfrac{1}{l}\right)v=f-\dfrac{\rho}{l},\\[2mm] lB_1(C_1-\lambda^*)\dfrac{\partial u}{\partial x}+lB_1\dfrac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}u+\rho=v,\end{cases} \tag{1.7}$$

эквивалентную (1.6), если ρ удовлетворяет третьему уравнению, а l есть некоторое решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial l}{\partial t}-B_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}l^2+(C_1-D_1)l+1=0 \qquad (l\,|_{t=0}=1)\,. \tag{1.8}$$

Тут же отметим, что если C_1 удовлетворяет нелинейному уравнению (1.5), то (1.4), после раскрытия скобок, есть (1.1); и переход из (1.4) к системе (1.6) вполне законно. Если l удовлетворяет уравнению (1.8), то третье равенство всегда выполняется и эквивалентность систем (1.6) и (1.7) очевидно. Так как оба уравнения (1.8) и (1.5) относятся к классу Риккати, то трудности, связанные с решением (1.1) вполне реальные. Решение уравнений, подобных (1.5) и (1.8), исследовано в [5,8]. Поэтому C_1 и l будем считать заданными.

Из первых двух уравнений системы (1.7) для u и v следует:

$$\begin{cases} u(\tau,t)=e^{-\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt}\left[u_0(\tau)+\int_0^t\rho e^{\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt}dt\right], \\ v(\sigma,t)=e^{-\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}\left[v_0(\sigma)+\int_0^t\left(f-\frac{\rho}{l}\right)e^{\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}dt\right], \end{cases} \tag{1.9}$$

где $u_0(\tau)$ и $v_0(\sigma)$ – неизвестные функции,

$$\begin{cases} d\tau=\mu[dx-(A_1-lB_1(C_1-\lambda^*))dt], \\ d\sigma=\widetilde{\mu}(dx-B_1dt), \end{cases} \tag{1.9$_1$}$$

μ и $\widetilde{\mu}$ – интегрирующие множители.

Поскольку l – решение (1.8), то имеет место тождество

$$e^{\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dx}=\frac{1}{l}e^{\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}. \tag{1.10}$$

С целью удовлетворения третьего уравнения системы (1.7) примем обозначение

$$\Phi=\int_0^t\rho e^{\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt}dt \tag{1.10$_1$}$$

и с учетом тождества (1.10) формула (1.9) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} u(\tau,t)=e^{-\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt}(u_0(\tau)+\Phi), \\ v(\sigma,t)=\frac{1}{l}e^{-\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt}\left(v_0(\sigma)-\Phi+\int_0^t fe^{\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}dt\right). \end{cases} \tag{1.11}$$

Если заметить, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\mu\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt\cdot u+\mu e^{-\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt}\frac{\partial(u_0(\tau)+\Phi)}{\partial\tau},$$

то, с учетом формул (1.11) третье уравнение системы (1.7) после упрощения перейдет в дифференциальное уравнение относительно Φ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\mu lB_1(C_1-\lambda^*)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+M\Phi=L_0, \qquad (1.12)$$

где

$$M=-\mu lB_1(C_1-\lambda^*)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\left[C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]dt+lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}+\frac{1}{l},$$

$$L_0=\frac{v_0(\sigma)}{l}+\left[\mu lB_1(C_1-\lambda^*)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]u_0(\tau)-$$

$$-\mu_1 lB_1(C_1-\lambda^*)\frac{\partial u_0}{\partial t}+\int_0^t fe^{\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}dt. \qquad (1.12)_1$$

Из (1.12) для Φ будем иметь:

$$\Phi(\tau_1,t)=e^{-\int_0^t Mdt}\left[\Phi_0(\tau_1)+\int_0^t L_0e^{\int_0^t Mdt}dt\right], \qquad (1.13)$$

где $\Phi_0(\tau_1)$ – произвольная функция, причем $\Phi_0(\tau_1)\big|_{t=0}=0$, а L_0 в себе содержит неизвестную $v_0(\sigma)$.

$$d\tau_1=(d\tau-lB_1(C_1-\lambda^*)dt)\mu_1. \qquad (1.13)_1$$

Если теперь приравнять правые части $(1.10)_1$ и (1.13), то для ρ получим:

$$\rho=e^{-\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad (1.14)$$

причем в правой части под частной производной подразумевается значение $\Phi(\tau_1,t)$ из (1.13). Формулы (1.13) и (1.14) обеспечивают эквивалентность систем (1.6) и (1.7).

2. Начальное и краевое условия.

Вернемся к формулам (1.11). Начальное условие (1.2) всегда выполняется, если

$$u(\tau,0)=u_0(\tau)=\varphi(x). \qquad (2.1)$$

В связи с переходом к условию (1.3) замечаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \tau}\mu; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}=\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1}\mu_1,$$

а согласно первой формуле (1.11) и (1.13),

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=-\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt\cdot u+e^{-\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt}\left(u_o{}'(\tau)+\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1}=-\frac{\partial}{\partial \tau_1}\int_0^t Mdt\cdot\Phi+e^{-\int_0^t Mdt}\cdot\left(\Phi_0{}'(\tau_1)+\frac{\partial}{\partial \tau_1}\int_0^t L_0 e^{\int_0^t Mdt}dt\right).$$

С учетом этих замечаний, условие (1.3) после группировки перейдет к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1}-\left[\mu_1\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt+\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1 k}\right]\Phi=\frac{1}{\mu_1}u_0{}'(\tau)+$$

$$+\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt+\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1 k}\right]u_0(\tau)-\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1 k}\theta e^{\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt},$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1}-M_1\Phi=L_1, \qquad (x=0), \tag{2.2}$$

где

$$M_1=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt+\frac{1}{\mu\mu_1}\frac{\alpha(t)}{k},$$

$$L_1=\frac{1}{\mu_1}u_0{}'(\tau)+\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt+\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1 k}\right]u_0(\tau)-$$

$$-\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1}\theta e^{\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt}. \tag*{(2.2)$_1$}$$

Из (2.2) для Φ строим:

$$\Phi(\tau_1,t)=e^{\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1}\int_0^{\tau_1}L_1 e^{-\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1}d\tau_1 \qquad (x=0). \tag{2.3}$$

Эта формула и обозначение (1.13) позволяют составить равенство

$$e^{-\int_0^t Mdt}\left[\Phi_0(\tau_1)+\int_0^t L_0 e^{\int_0^t Mdt}dt\right]=e^{\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1}\int_0^{\tau_1}L_1 e^{-\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1}d\tau_1, \tag*{(2.3)$_1$}$$

которое делает возможным подобрать функцию $\Phi_0(\tau_1)$ так, чтобы имело место

$$\Phi_0(\tau_1)=e^{\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1+\int_0^t Mdt}\int_0^{\tau_1}\frac{u_0(\tau)}{\mu_1}e^{-\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt\right)d\tau_1\,.$$

Из оставшейся части равенства выразим L_0,

$$L_0=e^{-\int_0^t Mdt}\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1+\int_0^t Mdt}\int_0^{\tau_1}\left[\frac{u_0'(\tau)}{\mu_1}+\frac{u_0(\tau)}{\mu\mu_1k}-\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1k}\theta e^{\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt}\right]d\tau_1\right\},$$

$$(x=0)\,,$$

содержащую в себе (см. (1.12)$_1$) неизвестную функцию $v_0(\sigma)$. Следовательно, второе условие (1.3) всегда выполняется, если вышеупомянутую неизвестную функцию $v_0(\sigma)$ определить:

$$\frac{v_0(\sigma)}{l}=K_1+K_2,\qquad (x=0)\,, \tag{2.4}$$

где

$$K_1=-\left[\mu lB_1(C_1-\lambda^*)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right]u_0(\tau)+$$

$$+\mu lB_1(C_1-\lambda^*)u_0'(\tau)-\int_0^t fe^{\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}dt\,,\quad K_2=-e^{-\int_0^t Mdt}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{\int_0^{\tau_1}M_1d\tau_1+\int_0^t Mdt}\int_0^{\tau_1}\left[\frac{u_0'(\tau)}{\mu_1}+\frac{u_0(\tau)}{\mu\mu_1k}-\frac{\alpha(t)}{\mu\mu_1k}\theta e^{\int_0^t\left(C_1-lB_1\frac{\partial(C_1-\lambda^*)}{\partial x}\right)dt}\right]e^{-\int_0^t M_1d\tau}d\tau_1\right\},$$

причем, для того чтобы правая часть была функцией от σ, следует заметить (см. (1.13)$_1$, (1.9)$_1$), что

$$d\tau_1=-\frac{\mu_1}{\tilde{\mu}}\left(\frac{\mu[A_1-lB_1(C_1-\lambda_1^*)]}{B_1}d\sigma\right);d\tau=-\frac{\mu}{\tilde{\mu}}\frac{A_1-lB_1(C_1-\lambda_1^*)}{B_1}d\sigma;\,dt=-\frac{1}{\tilde{\mu}B_1}d\sigma$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 518 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наука думка, 1970. – 302 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

5. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч.II. – Владикавказ: Изд. СОГУ, 2004. – С. 115.
6. Чочиев Т.З. О фундаментальной функции нелинейного температурного поля// Влад. мат. журнал. – Т. 2. – Вып. I, 2000. – С. 30-43.
7. Чочиев Т.З. О построении нелинейного температурного поля, вызванного коэффициентом теплопроводности. Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Сборник Всесоюзной конференции Дальневосточного отделения АН СССР. – Ч. 2. – Владивосток, 1992. – С. 152-164.
8. Чочиев Т.З. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию // Владикавказский научный центр. Южный математический институт, 2009. – С. 144-155.

Надійшла – 05.02.2011.