

УДК 532.5

## Идентификация областей интенсивной адвекции выделенной жидкости внутри прямоугольной полости с подвижными границами

Э. Н. Безымянная, А. А. Гуржий, Я. В. Яременко

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина*

*Институт гидромеханики НАНУ, Украина*

*Национальный технический университет "КПИ", Украина*

Рассматривается задача о перемешивании пассивной жидкости в приближении Стокса внутри прямоугольной полости с периодически двигающимися границами. Показано, что течение в полости обладает одновременно областями регулярного и хаотического движения. В статье анализируются различные методы и критерии идентификации областей хаотического движения отдельных жидких частиц и выделенных объемов жидкости. Результаты численного моделирования процессов адвекции жидкости в прямоугольной полости находятся в полном соответствии с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** Хаотическая адвекция, вязкая несжимаемая жидкость, приближение Стокса, численный эксперимент.

Розглядається задача про перемішування пасивної рідини в наближенні Стокса усередині прямокутної порожнини з границями, що періодично рухаються. Показано, що течія в порожнині має одночасно області регулярного і хаотичного руху. У статті аналізуються різні методи і критерії ідентифікації областей хаотичного руху окремих рідких частинок і виділених об'ємів рідини. Результати чисельного моделювання процесів адвекції рідини в прямокутній порожнині знаходяться в повній відповідності з експериментальними даними.

**Ключові слова:** Хаотична адвекція, в'язка нестислива рідина, наближення Стокса, чисельний експеримент.

Mixing problem of passive fluid in Stokes approximation in a rectangular cavity with periodically moving boundaries is considered. It is shown that the flow in a cavity has both the regions of regular and chaotic motion. Different methods and criteria to identify the regions of chaotic motion of separate fluid particles and selected fluid volumes are analysed in the article. The results of numeral modeling of advection processes of fluid in a rectangular cavity are in complete accordance with experimental data.

**Key words:** Chaotic advection, viscid incompressible fluid, Stokes approximation, numeral experiment.

### 1. Введение

Перемешивание пассивных жидкостей (с одинаковыми физическими свойствами) в гидродинамических течениях является сложным природным явлением, которое включает два важнейших процесса: деформация выделенной жидкости в заданном поле скорости, и размыв ее границ молекулярной диффузией [1]. Анализ геометрических и временных масштабов течений позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема перемешивания сводится к анализу деформации выделенных областей жидкости в рассматриваемом поле скорости. Такая задача в научной литературе [1,2] получила название *задача об адвекции*. Она тесно связана с проблемами

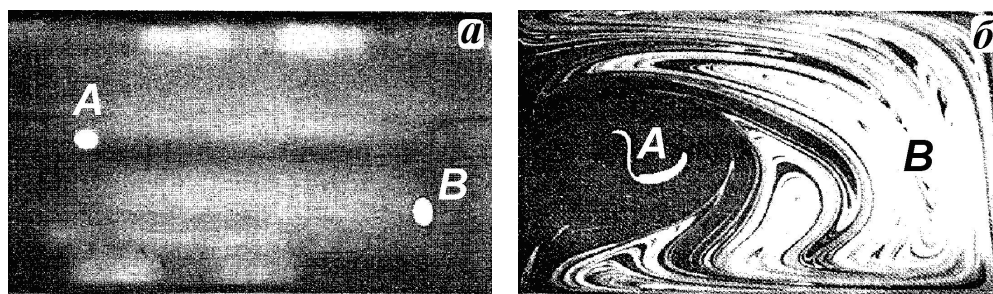


Рис.1. Эксперимент по адвекции подкрашенной жидкости ламинарным периодическим течением внутри прямоугольной полости [6]

лагранжевого описания движения в гидромеханике и заключается в изучении траекторий системы лагранжевых жидких частиц в эйлеровом поле скорости.

Актуальность теми исследований определяется широким проявлением процессов адвекции в природе и ее применением в технике [3]. Открытие явления детерминированного хаоса позволило многим исследователям посмотреть на проблему адвекции жидкости с новых концептуальных позиций. Сегодня при изучении явления адвекции применяются разные методы и критерии динамического хаоса [4,5]. Большинство критериев связано с анализом хаотических траекторий отдельных жидких частиц. Однако адвекция жидкости связанная с движением выделенных объемов жидкости. Допустимо ли использование этих критериев при идентификации областей интенсивной адвекции – вопрос, который в современной литературе уделено мало внимания.

Известно, что при определенных условиях некоторые ламинарные течения проявляют интенсивные режимы адвекции [1]. При этом две рядом расположенные жидкие частицы (*маркеры*) экспоненциально удаляются со временем друг от друга. По аналогичному закону растягивается материальная линия, составленная из таких частиц. Эта особенность траекторий отдельных частиц является характерной для хаотических детерминированных динамических систем. Для гидродинамических течений, проявляющих такие свойства, в научной литературе предложен термин “*хаотическая адвекция*” [2].

Часто при анализе режимов адвекции жидкостей исследователи пользуются основным критерием [1]: *хаотическая (интенсивная) адвекция* – процесс, при котором длина в двумерном случае (или площадь в трехмерном случае) границ выделенной жидкости растягивается во времени по экспоненциальному закону; *регулярная (слабая) адвекция* – процесс, при котором длина в двумерном случае (или площадь в трехмерном случае) границ выделенной жидкости растягивается в первом приближении по линейному или другому закону.

При адвекции разные области течения могут одновременно проявлять разные режимы. Наиболее показательными в этом отношении являются лабораторные исследования [6] по двумерному перемешиванию вязких жидкостей внутри прямоугольной полости с границами,двигающимися периодически. Две капли подкрашенной жидкости *A* и *B* были введены в рассматриваемое течение (рис.1,а). Жидкость *A* после десяти периодов движения границ остается в компактной области, а жидкость *B* занимает правую часть полости (рис.1,б) и имеет структуру, которая соответствует интенсивному режиму адвекции.

## 2. Критерии интенсивного режима адвекции

Пассивная жидкая частица всегда перемещается со скоростью внешнего окружающего потока. Поэтому утверждение равенства скорости частицы и скорости внешнего течения приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, называемыми *уравнениями адвекции* [1,2]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

и адвекция жидкости фактически сводится к анализу траекторий системы лагранжевых частиц в эйлеровом поле скорости. Главная сложность этой задачи связана с переходом от движения дискретной системы жидких частиц к деформациям непрерывных линий и поверхностей, ограничивающих выделенную жидкость.

Сегодня в хаотической динамике существует несколько критериев хаотического движения отдельных жидких частиц [1,4,5]. Одним из самых простых критериев является анализ *фазовой траектории* жидкой частицы: если ее траектория имеет определенную упорядоченность и предсказуемость, то движение частицы считается регулярным; если ее траектория не содержит признака упорядоченности, то движение частицы является хаотическим.

Важным качественным критерием является *сечение Пуанкаре* – система точек, полученная при пересечении фазовой траекторией выбранной плоскости в заданном направлении. Фазовая траектория считается регулярной, если точки сечения Пуанкаре формирует упорядоченную структуру или ложится на регулярную кривую. Если траектория маркера формирует нерегулярную последовательность точек, то его движение является хаотическим.

Во многих случаях сечение Пуанкаре имеет сложную структуру, которая может включать области “хаотического моря”, “регулярные острова”, “динамические ловушки” (частицы находятся в них непредсказуемое время) и “систему канторов” (частицы двигаются квазипериодично и нерегулярно), которые окружают регулярные острова [7].

При хаотическом движении две близлежащие траектории в среднем расходятся. Мерой расхождения служат *показатели Ляпунова*. Методика их определения сводится к совместному интегрированию уравнений движения (1) с линеаризованными уравнениями

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = [A] \bar{\eta}, \quad \bar{\eta}(0) = \bar{\eta}_0, \quad \text{где} \quad [A] = \left. \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}(t)}. \quad (2)$$

В расчетах принимают  $|\bar{\eta}(0)| = 1.0$ .

Наибольший показатель Ляпунова определяется следующим образом:

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\bar{\eta}(t)|}{|\bar{\eta}_0|}. \quad (3)$$

При хаотическом движении  $\Lambda > 0$ , две соседние траектории, в среднем, расходятся. При регулярном движении  $\Lambda < 0$ , траектории, в среднем, сходятся.

Наибольший показатель Ляпунова является важным при определении горизонта предсказуемости  $t_G$  – максимального временного интервала, на котором может быть достоверно решена задача Коши (1). Если современные

вычислительные комплексы имеют погрешность округления  $\eta_0 = 10^{-24} \dots 10^{-16}$ , а необходимая точность решения задачи  $\eta = 10^{-4} \dots 10^{-2}$ , то горизонт предсказуемости составляет [смотри (3)] величину  $t_G = \ln(\eta/\eta_0)/\Lambda \approx 40/\Lambda$ . В настоящей работе временной диапазон интегрирования уравнений (1) не превышал значения  $t_G$ .

В современной литературе [11] описано несколько методов анализа деформации и растяжения контуров при адвекции жидкостей, которые по конфигурации маркеров определяют пространственное положение дополнительных маркеров на рассматриваемом контуре. При хаотических режимах адвекции возникают изломы контуров, и интерполяция таких участков непрерывными функциями приводит к появлению больших вычислительных погрешностей, которые возрастают во времени чрезвычайно быстро.

Наиболее эффективным для хаотических режимов адвекции является метод кусочной сплайн-интерполяции [12], который сначала выделяет гладкие фрагменты контуров. Применение кубической сплайн-интерполяции сглаживающего типа на гладких сегментах контура позволяет с достаточно высокой точностью определить координаты дополнительных маркеров на границе выделенной жидкости. Сравнение точности интерполяции разными методами показало, что наилучшая интерполяция достигается при использовании метода кусочной сплайн-интерполяции, который используется при численном моделировании процессов адвекции.

### 3. Адвекция жидкости внутри прямоугольной полости

Рассмотрим особенности процесса адвекции вязкой несжимаемой жидкости в поле скорости, наведенной движением отдельно верхней и нижней границ внутри прямоугольной полости  $2a \times 2b$  в приближении Стокса (рис.2). Распределение функции тока внутри прямоугольной полости определяется решением бигармонического уравнения [8]

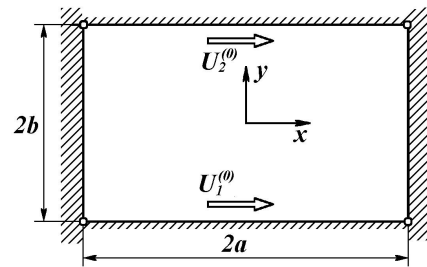


Рис.2. Геометрия задачи

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$\Psi(\pm a, y) = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0,$$

$$\Psi(x, \pm b) = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=b} = U_2^{(0)}, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=-b} = U_1^{(0)}. \quad (5)$$

Решение задачи можно представить в виде суперпозиции аналитических решений, каждое из которых является решением бигармонического уравнения с четным распределением функции тока по координате  $x$ , и четным (Задача А) и нечетным (Задача В) распределением функции тока по координате  $y$ . Детали вывода этих выражений приведены в работах [9,10].

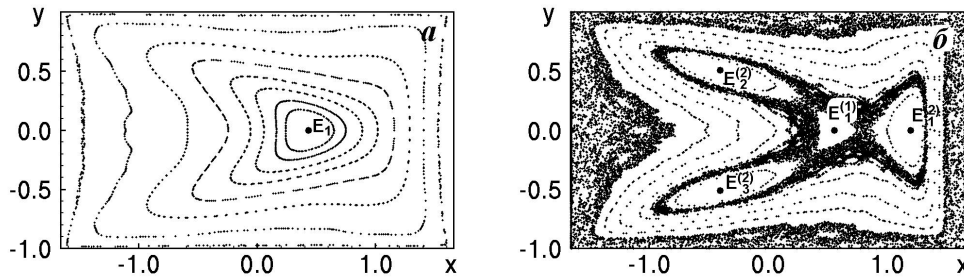


Рис.3. Сечение Пуанкаре в прямоугольной полости при: а)  $D=2.0$ , б)  $D=2.5$

Используя связь между распределением поля функции тока и компонентами поля скорости течения, получаем аналитическое выражение для распределения компонент скорости течения с весовыми коэффициентами, значения которых позволяют удовлетворить (5) для произвольных значений  $U_1^{(0)}$  и  $U_2^{(0)}$ .

В дальнейшем удобно пронормировать задачу на высоту полости  $2b$  и на период  $T$  движения границ полости. При этом компоненты скорости будут нормированы на величину  $2b/T$ . Далее можно ввести безразмерный параметр задачи  $D = U_0 T / 2a$ , где  $U_0$  – модуль максимальной скорости движения границ.

Пусть первую половину периода ( $kT < t < kT + T/2$ , где  $k$  – номер периода) верхняя поверхность движется слева направо со скоростью  $U_0$ , нижняя граница покоится, а вторую половину периода ( $kT + T/2 < t < kT + T$ ) нижняя граница движется справа налево со скоростью  $-U_0$ , верхняя граница покоится. Рассмотрим случай  $a=1.66$ .

На рис.3 показано сечение Пуанкаре, выполненное для маркеров, при различных значениях параметра течения  $D$ . При  $D = 1.0$  (рис.3,а) сечение Пуанкаре в центральной части полости имеет эллиптическую периодическую точку  $E_1$  первого порядка. При увеличении  $D$  она смещается в правую часть полости. Во всей области течения наблюдается регулярное движение отдельных жидких частиц.

Дальнейшее увеличение параметра  $D$  приводит к появлению зон хаотического движения частиц, которые располагаются около твердых поверхностей и в центральной части полости. При этом появляются три эллиптические периодические точки ( $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}$  и  $E_3^{(2)}$ ) третьего порядка (рис.3,б). При  $D=3.0$  в течении появляются еще три эллиптические периодические точки третьего порядка, которые образуют систему шести регулярных островов, расположенных в центральной части полости.

Бифуркационная диаграмма периодических точек первого порядка в рассматриваемом течении внутри прямоугольной полости при изменении параметра  $D$  показана на рис.4. При малых значениях  $D$  течение обладает только одной эллиптической периодической точкой, которая расположена в центральной части полости. С увеличением  $D$  эта точка смещается в правую часть полости и при  $D = 4.46$  ее тип меняется на гиперболический, при этом появляются две новые эллиптические периодические точки. Дальнейшее увели-

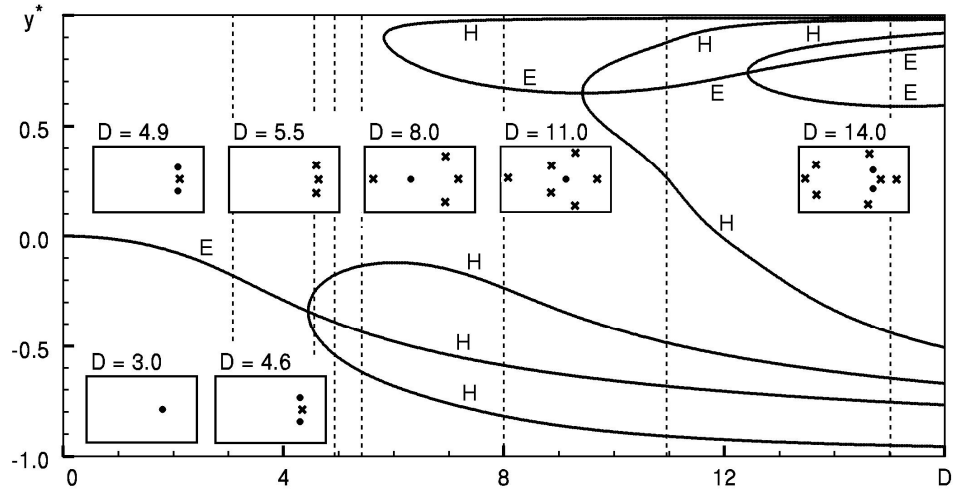


Рис.4. Бифуркационная диаграмма периодических точек первого порядка

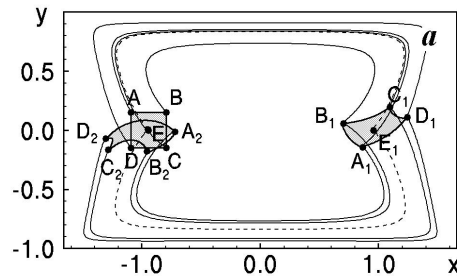


Рис.5. Адвекция квадратной области, охватывающей периодическую эллиптическую точку первого порядка

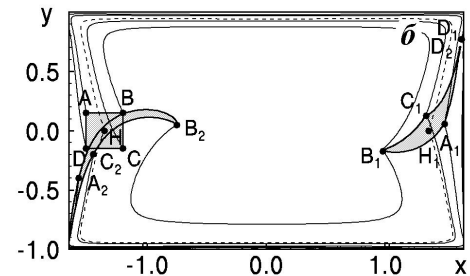


Рис.6. Адвекция квадратной области, охватывающей периодическую гиперболическую точку первого порядка

личение  $D$  приводит к тому, что эллиптические точки становятся гиперболическими, однако при  $D = 5.83$  в левой части полости появляются новые эллиптическая и гиперболическая периодические точки. При  $D = 9.43$  рядом с эллиптической периодической точкой появляются две гиперболические точки, которые постепенно смещаются в левую часть полости. Течение жидкости в полости существенно усложняется.

Причину существования разных режимов адвекции в рассматриваемом течении можно пояснить на рис.5 и рис.6, на котором показан процесс адвекции выделенной жидкости (в виде квадрата  $ABCD$ ), охватывающей периодические эллиптическую точку  $E$  с координатами  $(-0.966, 0.000)$  и гиперболическую точку  $H$  с координатами  $(-1.315, 0.000)$  первого порядка при  $D = 6.0$ . Сплошными линиями на рисунке показаны траектории точек  $A, B, C$  и  $D$ , формирующие в начальный момент квадрат. Их положение в момент  $t=T/2$ , показано на рисунках соответствующими буквами с индексом  $1$ . В левой части рисунка индексом  $2$  отмечено положение этих же точек в момент  $t = T$ . Видно, что выделенная жидкость, охватывающая эллиптическую периодическую точку (рис.5), за один период движения границ не возвращается в свое исходное положение, однако

вершины квадрата находятся в непосредственной близости к точке  $E$ . С другой стороны, выделенная жидкость, охватывающая гиперболическую точку  $H$  (рис.6), с течением времени вытянулась вдоль границ полости в длинную узкую полосу, что свидетельствует об интенсивном режиме адвекции выделенной жидкости.

Рассмотрим движение отдельных жидких частиц внутри прямоугольной полости при  $D = 6.0$ . Поместим маркер 1 в точку с координатами  $X_1^0 = 0.0, Y_1^0 = 1.0$ , которая расположена в зоне хаотического сечения Пуанкаре. Другой маркер, находящийся в области регулярного сечения Пуанкаре ( $X_2^0 = 0.0, Y_2^0 = -1.0$ ), движется в центральной части полости.

Изменение наибольшего показателя Ляпунова  $\lambda(t)$  для маркера 1 (сплошная линия) и маркера 2 (штриховая линия) с течением времени показано на рис.7. Маркер 1 движется по более сложной траектории, зависимость  $\lambda(t)$  выходит на  $\Lambda_1 \approx 0.94$ . С другой стороны, наибольший показатель Ляпунова для маркера 2 стремится к значению  $\Lambda_2 \approx 0.05$ . Следовательно, маркер 1 движется по хаотической траектории, а маркер 2 участвует в регулярном движении.

Рассмотрим процесс адвекции жидкости внутри прямоугольной полости в поле скорости, наведенной периодическим движением границ при  $D = 6.0$ . Выделим в начальный момент объем  $A$  жидкости, сформированный регулярным сечением Пуанкаре около эллиптической периодической точки  $E$  на рис.5. Одновременно выделим малую круговую область  $B$  радиуса  $R = 0.1$  с центром в точке  $(0.947, -0.530)$ , которая соответствует гиперболической периодической точке первого порядка, как показано на рис.8,а. Результаты численного моделирования показывают, что жидкость  $A$  в течение каждого периода возвращается в свое начальное положение. С другой стороны, выделенная жидкость  $B$  смещается в сторону движения верхней границы. Затем часть жидкости перемещается к нижней границе. Положение выделенной жидкости  $A$  и  $B$  в момент времени  $t = 8.0$  показано на рис.8,б (смотри рис.1). Такой режим адвекции жидкости  $B$  относится к хаотическому, при котором границы выделенной жидкости растягиваются с течением времени по экспоненциальному закону.

#### 4.Выводы

Исследования показали, что течение вязкой жидкости во внутренних течениях с подвижными границами имеет критическое значение скорости, при котором происходит существенная интенсификация процессов адвекции. Поиск критических значений скорости движения границ хорошо прослеживается на динамике изменений сечений Пуанкаре, бифуркационной диаграмме течений и

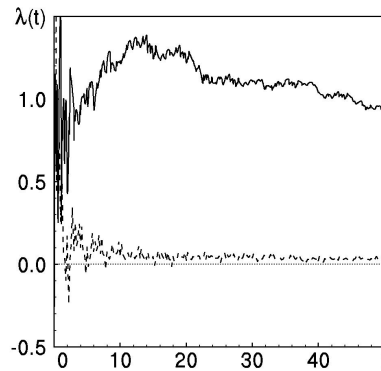


Рис.7. Наибольший показатель Ляпунова для двух маркеров

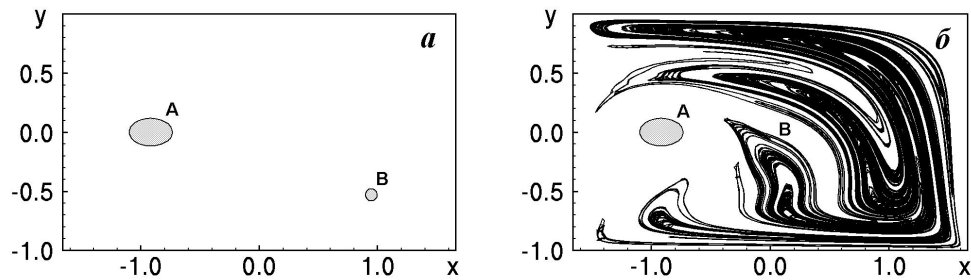


Рис.8. Адвекция жидкости, охватывающей эллиптическую и гиперболическую периодические точки в течении Стокса внутри прямоугольной полости

проявляется в увеличении количества периодических эллиптических и гиперболических точек разного порядка. Если течение является периодическим, поиск областей интенсивной адвекции связан с построением сечения Пуанкаре, определения количества, пространственного положения и типа периодических (или стационарных) точек течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport / Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 683p.
2. Aref H. Stirring by chaotic advection // JFM. – 1984. – V.143. – p.1-23.
3. Mashelkar R.A. Seamless chemical engineering science: the emerging paradigm // Chem. Eng. Science. – 1995. – V.50, N.1, – p.1-22.
4. Hoppensteadt F.C. Analysis and simulation of chaotic system / New York: Springer, 2000. – 316p.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение / М.: Мир, 1988. – 250с.
6. Ottino J.M. The mixing of fluids / Scientific American. – Jan., 1989. – p.55-67.
7. Кошель К.В., Пранц С.В. Хаотическая адвекция в океане / М. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Инс-т компьютерных исследований, 2008. – 360с.
8. Хаппель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976. – 632с.
9. Бернинг Р., Гуржий О.А., Мелешко В.В. Змішування в'язкої рідини в прямокутному мікроканалі // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – Т.50, N4. – с.140-148.
10. Бернинг Р., Гуржий А.А., Мелешко В.В. Размешивание пассивной примеси в прямоугольной полости при периодическом движении границы в приближении Стокса // Вісник ХНУ. – 2007. – N775. – с.17-28.
11. Mancho A.M. Small D., Wiggins S. A tutorial on dynamical systems concept applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets: Theoretical and computational issues // Phys. Rep. – 2006. – V.437. – p.55-124.
12. Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кускової сплайн-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доповіді НАН України. – 1996. – N8. – с.54-62.