

УДК 519.65

## Нули функции $T_l(a, x) = xJ'_l(x) + aJ_l(x)$ и ее ортогональные свойства

И. В. Ткаченко<sup>1)</sup>, В. И. Ткаченко<sup>1,2)</sup>, В. И. Щербинин<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> *Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина*

<sup>2)</sup> *Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Исследованы нули функции  $T_l(a, x)$ . Проанализировано взаимное расположение нулей функций Бесселя  $l$ -го порядка и ее производной, а также  $l \pm 1$ -го порядков. Найден вид уравнений, которые могут быть использованы для определения, с достаточной степенью точности, нулей функции  $T_l(a, x)$ . Численно и аналитически исследовано условие ортогональности функций  $T_l(a, x)$  и  $T_l(b, x)$  при  $l \neq 0$ . Установлено, что для каждого  $a$  можно найти такое  $b$ , при котором ортогональность этих функций удовлетворяется.

**Ключевые слова:** функции Бесселя, нули функций Бесселя, ортогональность.

Досліджено нулі функції  $T_l(a, x)$ . Проаналізовано взаємне розташування нулів функцій Бесселя  $l$ -го порядку та її похідної, а також  $l \pm 1$ -го порядків. Знайдено вигляд рівнянь, які можуть бути використані для визначення, з достатнім ступенем точності, нулів функції  $T_l(a, x)$ . За допомогою чисельних та аналітичних методів досліджено умову ортогональності функцій  $T_l(a, x)$  та  $T_l(b, x)$  при  $l \neq 0$ . Встановлено, що для кожного  $a$  може бути знайдено таке  $b$ , при якому ортогональність цих функцій задовольняється.

**Ключові слова:** функції Бесселя, нулі функцій Бесселя, ортогональність.

In the paper we consider zeroes of function  $T_l(a, x)$ . We analyze relative positions for zeroes of  $l$ -order Bessel function, its derivative and Bessel functions of  $l \pm 1$  orders. We obtain equation suitable for evaluation of  $T_l(a, x)$  function zeroes with relatively high precision. We investigate analytically and numerically orthogonality condition for  $T_l(a, x)$  and  $T_l(b, x)$  functions. We determine that this condition is satisfied, if for given  $a$  one choose a proper value of parameter  $b$ .

**Key words:** Bessel functions, Bessel function zeroes, orthogonality.

### 1. Введение

Объектом изучения в настоящей статье являются нули функции  $T_l(a, x)$ , которая составлена из функций Бесселя первого рода целочисленного порядка:

$$T_l(a, x) = xJ'_l(x) + aJ_l(x), \quad (1)$$

где  $J'_l(x) = dJ_l(x)/dx$  - производная функции Бесселя порядка  $l$  по аргументу,  $l$  - положительное, не равное нулю целое число,  $a$  - вещественное число, изменяющееся в пределах  $-\infty < a < \infty$ .

Нули функции  $T_l(a, x)$  в дальнейшем будем обозначать  $\mu_{l,n}(a)$ . Такая запись указывает на то, что нули  $\mu_{l,n}(a)$  являются функцией параметра  $a$ . В дальнейшем будем считать, что нули  $\mu_{l,n}(a)$  представляют собой возрастающую по номеру  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) последовательность чисел.

Функция (1) имеет широкий спектр использования в различных прикладных задачах. Это, прежде всего, определение корнями функционала (1) коэффициентов разложения произвольных функций в ряды Дини [1]. Одно из первых упоминаний функции (1) отмечено в работе [2] при исследовании индукции электрического тока в проводящем цилиндре, расположенном поперек магнитного поля. Функция (1) широко используется при решении граничных задач о распространении электромагнитных волн в цилиндрических магнитоактивных плазмозаполненных волноводах [3].

Таким образом, функции (1) широко используются при решении прикладных научных задач. Поэтому исследование их свойств, что непосредственно связано с поиском их нулей, имеет важное теоретическое и практическое значение.

Качественный анализ корней функции  $T_l(a, x)$  при нецелом значении порядка  $l \rightarrow \nu > -1$  хорошо описан в [1, 4]. Здесь только напомним, что если произведение  $a \cdot \nu$  вещественно и  $\nu > -1$ , то функция (1) имеет лишь вещественные положительные нули, за исключением случая  $-(a+1)\nu < 0$ , когда он имеет два чисто мнимых нуля. Асимптотические формулы для определения этих нулей приведены, например, в [5, 6]. Однако вопрос об аналитическом определении нулей функций (1) (точном или приближенном) остается открытым.

Поэтому в настоящей статье исследованы качественно и аналитически нули функции (1) при целочисленном, положительном значении их порядка, а также ортогональные свойства этой функции.

Изложение материала в статье организовано следующим образом.

Во Введении определяется объект исследования и анализируется его актуальность и изученность.

В Разделе 1 приведены известные соотношения между функциями Бесселя, с помощью которых, в дальнейшем будут преобразовываться и исследоваться функции (1). Обобщена информация о взаимном расположении нулей функции Бесселя  $l$ -го,  $l \pm 1$ -го порядков и нулей ее производной ( $J_l'(x) = 0$ ).

В Разделе 2 приведены формулы для приближенного, с точностью от долей процента до процента, вычисления нулей функции  $T_l(a, x)$ . Определены первые нули функций  $T_l(a, x)$  низших порядков и погрешности их вычисления. Полученные данные сведены в Таблицы.

В разделе 3 исследованы ортогональные свойства функций  $T_l(a, x)$  и  $T_l(b, x)$  для различных значений параметров  $a$  и  $b$ .

В Заключение сформулированы основные выводы, вытекающие из проведенного исследования.

## **2. Некоторые полезные модификации функционала $T_l(a, x)$ и взаимное расположение нулей функций Бесселя и ее производной**

Для решения поставленной задачи полезным является представление исходной функции в различных видах.

Для начала напомним, что функция (1) с использованием рекуррентного соотношения  $xJ_l'(x) = lJ_l(x) - xJ_{l+1}(x)$  может быть представлена в виде суперпозиции функций Бесселя смежного порядка, или бесконечным сходящимся рядом [4]:

$$T_l(a, x) = J_l(x) \left( l(a+1) - x \frac{J_{l+1}(x)}{J_l(x)} \right) = J_l(x) \left( l(a+1) + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \gamma_{l,n}^2} \right), \quad (2)$$

где  $\gamma_{l,n}$  - возрастающая по номеру  $n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) последовательность положительных нулей функции Бесселя ( $J_l(x) = 0$ ).

Из выражения (2) следует, что нулями функции  $T_l(a, x)$  являются нули уравнения  $l(a+1) + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - \gamma_{l,n}^2)^{-1} = 0$ . В частности, нетрудно найти, что при  $a = -1$  нулями  $T_l(a, x)$  являются нули функции Бесселя:  $J_{l+1}(x) = 0$ , т.е.  $\mu_{l,n}(-1) = \gamma_{l+1,n}$ , а при  $a \rightarrow \pm\infty$  нули  $T_l(a, x)$  асимптотически приближаются к

$$\text{нулям функции Бесселя } J_l(x): \mu_{l,n}(\pm\infty) \rightarrow \begin{cases} \gamma_{l,n+1} \\ \gamma_{l,n} \end{cases}.$$

Возможно также представление  $T_l(a, x)$  в виде бесконечного произведения [4, 7]:

$$T_l(a, x) = \left( x \frac{J_l'(x)}{J_l(x)} + la \right) J_l(x) = l \left( a + \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{\gamma_{l,n}^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{\gamma_{l,n}^2} \right)^{-1} \right) J_l(x), \quad (3)$$

где  $\gamma'_{l,n}$  - возрастающая по номеру  $n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) последовательность положительных нулей производной функции Бесселя ( $J_l'(x) = 0$ ).

Из (3), впрочем как и из (1), следует, что при  $a = 0$  нули функции  $T_l(a, x)$  совпадают с нулями производной от функции Бесселя:  $\mu_{l,n}(0) = \gamma'_{l,n+1}$ .

Использование рекуррентного соотношения  $xJ_l'(x) = -lJ_l(x) + xJ_{l-1}(x)$  преобразует функцию (1) к виду:

$$T_l(a, x) = J_l(x) \left( l(a-1) + x \frac{J_{l-1}(x)}{J_l(x)} \right). \quad (4)$$

Из выражения (4), при  $a = 1$ , следует еще один класс нулей функции  $T_l(a, x)$ , которые определяются нулями функции Бесселя  $J_{l-1}(\gamma_{l-1,n+1}) = 0$ , т.е.  $\mu_{l,n}(1) = \gamma_{l-1,n+1}$ .

Для использования в дальнейшем представлений (2) – (4) необходимо знать взаимное расположение нулей функции Бесселя ( $J_l(x) = 0$ ) и ее производной ( $J_l'(x) = 0$ ).

Известно, что положительные нули функции Бесселя  $l$  - го порядка чередуются с положительными нулями функции Бесселя  $l+1$  - го порядка [1, 4]:

$$0 < \gamma_{l,1} < \gamma_{l+1,1} < \gamma_{l,2} < \gamma_{l+1,2} < \gamma_{l,3} < \dots < \gamma_{l,n} < \gamma_{l+1,n} < \gamma_{l,n+1} < \dots \quad (5)$$

Нули производной функции Бесселя  $\gamma'_{l,n}$  таким же образом чередуются с нулями функции Бесселя [8]:

$$0 < \gamma'_{l,1} < \gamma_{l,1} < \gamma'_{l,2} < \gamma_{l,2} < \dots < \gamma'_{l,n} < \gamma_{l,n} < \gamma'_{l,n+1} < \gamma_{l,n+1} < \dots \quad (6)$$

Следует отметить, что неравенства (6) могут быть записаны также в виде неравенства иного вида  $\gamma'_{l,n+1} > \sqrt{\gamma_{l,n}\gamma_{l,n+1}}$ .

Как видно из (5), (6) нули функции Бесселя  $l+1$  - го порядка и нули производной функции Бесселя  $l$  - го порядка расположены между нулями функции Бесселя  $l$  - го порядка:

$$\gamma_{l,n} < \gamma_{l+1,n} < \gamma'_{l,n+1} < \gamma_{l,n+1}. \quad (7)$$

Определим соотношение между нулями  $\gamma_{l+1,n}$  и  $\gamma'_{l,n+1}$  при условии, что они находятся в интервале (7). Для этого найдем выражение для производной корня  $x$  функции (1) по параметру  $a$ :

$$\frac{dx}{da} = \frac{lx}{x^2 + (a^2 - 1)l^2}. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что положительные нули функции (1) являются монотонно растущей функцией параметра  $a$ , т.к. знаменатель даже при наименьшем положительном нуле, предельная величина которого определяется как  $x = \sqrt{l(l+2)}$  [4], остается положительной величиной. Поскольку ноль  $T_l(a, x)$  при  $a = -1$  равен  $\gamma_{l+1,n}$ , а при  $a = 0$  равен  $\gamma'_{l,n+1}$ , то в силу монотонной зависимости его нулей от параметра  $a$  справедливо неравенство  $\gamma_{l+1,n} < \gamma'_{l,n+1}$ .

Таким образом, относительное расположение нулей функции Бесселя и ее производной соответствует следующим неравенствам:

$$0 < \gamma'_{l,1} < \gamma_{l,1} < \gamma_{l+1,1} < \gamma'_{l,2} < \gamma_{l,2} < \gamma_{l+1,2} < \gamma'_{l,3} < \gamma_{l,3} < \dots < \gamma_{l,n} < \gamma_{l+1,n} < \gamma'_{l,n+1} < \gamma_{l,n+1} < \dots \quad (9)$$

Поскольку при  $a = 1$  нулем функции (1), попадающим в интервал (7), является  $\gamma_{l-1,n+1}$ , то, в силу монотонной зависимости корней функции  $T_l(a, x)$  от параметра  $a$ , окончательное расположение найденных нулей  $T_l(a, x)$  выглядит следующим образом:

$$0 < \gamma'_{l,1} < \gamma_{l-1,1} < \gamma_{l,1} < \gamma_{l+1,1} < \gamma'_{l,2} < \gamma_{l-1,2} < \gamma_{l,2} < \gamma_{l+1,2} < \gamma'_{l,3} < \gamma_{l-1,3} < \gamma_{l,3} < \dots < \gamma_{l,n} < \gamma_{l+1,n} < \gamma'_{l,n+1} < \gamma_{l-1,n+1} < \gamma_{l,n+1} < \dots \quad (10)$$

Анализируя выражения (2) – (4), можно сделать вывод о расположении нулей функции  $T_l(a, x)$ . В зависимости от параметра  $a$  ее нулями являются либо

корни функции Бесселя  $\gamma_{l,n}$ , либо в промежутках между ними нули сомножителя при  $J_l(x)$  в выражении (2). В последнем случае

$$a = -1 + \frac{x J_{l+1}(x)}{l J_l(x)}. \quad (11)$$

На Рис.1. приведен график зависимости нулей функции  $T_l(a, x)$  от параметра  $a$  при различных значениях порядка  $l$ . Для большей наглядности, при построении графиков на Рис.1., зададим условие симметрии нулей функций Бесселя:  $\gamma_{l,-n} = -\gamma_{l,n}$ . Аналогичное условие зададим и для нулей функции  $T_l(a, x)$ :  $\mu_{l,-n}(a) = -\mu_{l,n}(a)$ .

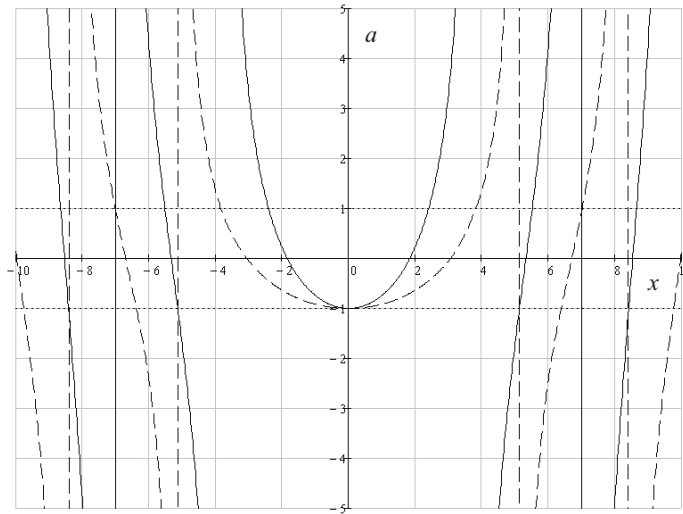


Рис.1. Расположение корней уравнения (11) при  $l=1$  (сплошная линия),  $l=2$  (пунктирная линия). Вертикальные сплошные линии соответствуют нулям функции Бесселя при  $l=1$ , пунктирные – при  $l=2$

### 3. Определение нулей функции $T_l(a, x)$

Исследуем нули функции  $T_l(a, x)$ . Для этого условно выделим следующие диапазоны их расположения. Будем считать, что первый диапазон расположен в интервале  $0 \leq x \leq \gamma_{l,1}$ ,  $k$ -й диапазон -  $\gamma_{l,k-1} \leq x \leq \gamma_{l,k}$ , где  $k = 2; 3; 4; \dots$

#### 3.1. Нули функции $T_l(a, x)$ в диапазоне $0 \leq x \leq \gamma_{l,1}$

Для их нахождения воспользуемся представлением функции  $T_l(a, x)$  в виде (2). Поскольку в рассматриваемом случае всегда выполняется неравенство  $x \leq \gamma_{l,n}$ , то бесконечную сумму в (2) можно представить в виде степенного ряда [4]:

$$2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{l,n}^2 - x^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n,l} x^{2n}, \quad (12)$$

$$\text{где } S_{2n,l} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{l,k}^{-2n}.$$

Известны несколько первых сумм  $S_{2n,l}$  [1, 4]:

$$\begin{aligned} S_{2,l} &= 2^{-2} (l+1)^{-1}, \quad S_{4,l} = 2^{-4} (l+1)^{-2} (l+2)^{-1}, \\ S_{6,l} &= 2^{-5} (l+1)^{-3} (l+2)^{-1} (l+3)^{-1}, \quad S_{8,l} = 2^{-8} (l+1)^{-4} (l+2)^{-2} (l+3)^{-1} (l+4)^{-1}, \\ S_{10,l} &= (7l+19) 2^{-9} (l+1)^{-5} (l+2)^{-2} (l+3)^{-1} (l+4)^{-1} (l+5)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Однако вычисление этих сумм для  $n > 5$  связано со значительными вычислительными трудностями. Поэтому, учитывая тот факт, что суммы с ростом  $l$  быстро убывают ( $S_{2n,l} \propto l^{1-2n}$ ), в выражении (12) выделим особенность, а оставшуюся сумму представим в виде ограниченной функции  $F_2(l, x)$ . В этом случае (11) принимает вид

$$l(a+1) = \frac{2x^2}{\gamma_{l,1}^2 - x^2} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{l,n}^2 - x^2} = \frac{2x^2}{\gamma_{l,1}^2 - x^2} + 2F_2(l, x). \quad (14)$$

Из вида функции понятно, что при  $0 \leq x \leq \gamma_{l,1}$  и  $a \rightarrow -1$  аргумент  $x \rightarrow 0$ , а значит и функция  $F_2(l, x \rightarrow 0) \rightarrow 0$ .

При  $x \rightarrow \gamma_{l,1}$  функция  $F_2(l, x)$  должна быть ограниченной величиной:

$$F_2(l, x \rightarrow \gamma_{l,1}) \equiv S_{2,l} = \gamma_{l,1}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{l,n}^2 - \gamma_{l,1}^2}. \quad (15)$$

Приближенно сумму (15) можно оценить, считая, что  $\gamma_{l,1}^2 \gg 1$ . Тогда, воспользовавшись первым слагаемым асимптотического представления корней функции Бесселя:  $\gamma_{l,n} \approx \pi/2(l-1/2+2n)$  [1,4,7], найдем приближенное значение этой суммы:

$$S'_{2,l} = \frac{2l+3}{8} \left( \psi \left( l + \frac{5}{2} \right) + C \right), \quad (16)$$

где  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  - пси - функция [9, 10],  $\Gamma(z)$  - гамма - функция, штрих обозначает производную по аргументу,  $C = 0,5772156\dots$  - постоянная Эйлера.

Поскольку приближенное значение  $\gamma_{l,n}$  всегда больше его реальной величины, то можно показать, что приближенная сумма  $S'_{2,l}$  ограничена суммой  $S_{2,l}$ , т.е.  $S'_{2,l} < S_{2,l}$ .

Функция  $F(l, x)$  в интервале  $0 \leq x \leq \gamma_{l,1}$  изменяется в пределах  $0 \leq F(l, x) < S'_{2,l}$ , а зависимость корней  $T_l(a, x)$  от параметра  $a$  в рассматриваемом интервале, согласно (8), монотонная. В этом случае выражение (14) может быть представлено в виде суммы слагаемого с особенностью и монотонно растущей функции:

$$l(a+1) = \frac{2x^2}{\gamma_{l,1}^2 - x^2} + 2F_2(l, x) \square \frac{2x^2}{\gamma_{l,1}^2 - x^2} + \frac{2S'_{2,l}x^2}{\alpha_1(l)\gamma_{l,1}^2 - \beta_1(l)x^2}, \quad (17)$$

где  $\alpha_1(l) > 1$  и  $\beta_1(l) < 1$  - нормировочные коэффициенты.

Использование коэффициентов  $\alpha_1(l)$ ,  $\beta_1(l)$  необходимо для обеспечения минимального отклонения величины:

$$\Delta_1(l, x) = \left| \frac{2x^2}{\gamma_{l,1}^2 - x^2} + \frac{2S'_{2,l}x^2}{\alpha_1(l)\gamma_{l,1}^2 - \beta_1(l)x^2} - xJ_{l+1}(x)J_l^{-1}(x) \right|, \quad (18)$$

которая характеризует сходимость приближенного представления функции (17) к ее оригиналу:  $l(a+1) = xJ_{l+1}(x)J_l^{-1}(x)$ .

В Таблице 1. приведены результаты численных расчетов максимальной погрешности  $\Delta_1(l, x)$  для  $l = 1; 2; 3; 4$ .

Таблица 1. Зависимость нормировочных коэффициентов  $\alpha_1(l)$ ,  $\beta_1(l)$  и максимальной погрешности  $(\Delta_1(l, x))_{max}$  от  $l$

$l$	1	2	3	4
$\alpha_1(l)$	1,2582	1,438	1,598	1,738
$\beta_1(l)$	0,1988	0,2751	0,345	0,404
$(\Delta_1(l, x))_{max}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$

Из Таблицы 1. следует, что подбором соответствующих нормировочных коэффициентов возможно с хорошей степенью точности аппроксимировать функцию  $T_l(a, x)$ .

Таким образом, приближенное представление (17) имеет вид биквадратного уравнения, которое может быть использовано для определения, с достаточной степенью точности, нулей функции  $T_l(a, x)$  в диапазоне  $0 \leq x \leq \gamma_{l,1}$ .

### 3.2. Нули функции $T_l(a, x)$ в диапазоне $\gamma_{l,k-1} \leq x \leq \gamma_{l,k}$ , $k = 2; 3; 4 \dots$

Исследуем расположение нулей функции  $T_l(a, x)$  в диапазоне  $\gamma_{l,k-1} \leq x \leq \gamma_{l,k}$ . Для этого в выражении (14) бесконечную сумму представим в

виде суммы первых двух слагаемых с особенностью и ограниченной функции  $F_{k+1}(l, x)$ :

$$l(a+1) = \frac{2x^2}{\gamma_{l,k-1}^2 - x^2} + \frac{2x^2}{\gamma_{l,k}^2 - x^2} + \sum_{n=1}^{k-2} \frac{2x^2}{\gamma_{l,n}^2 - x^2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2x^2}{\gamma_{l,n}^2 - x^2} \equiv \\ \equiv \frac{2x^2}{\gamma_{l,k-1}^2 - x^2} + \frac{2x^2}{\gamma_{l,k}^2 - x^2} + F_{k+1}(l, x), \quad (19)$$

Для определения нулей  $T_l(a, x)$  представим функцию  $F_{k+1}(l, x)$  в виде  $F_{k+1}(l, x) = \alpha_k(l) \cdot x^2 + \beta_k(l)$ , где константы  $\alpha_k(l)$ ,  $\beta_k(l)$  могут быть определены из условия минимизации функции

$$\Delta_k(l, x) = \left| \frac{2x^2}{\gamma_{l,k-1}^2 - x^2} + \frac{2x^2}{\gamma_{l,k}^2 - x^2} + F_{k+1}(l, x) - xJ_{l+1}(x)J_l^{-1}(x) \right|. \quad (20)$$

Выбор функции  $F_{k+1}(l, x)$  в таком виде обусловлен тем, что в аналогичном выражении (17) последнее слагаемое приближенно может быть представлено параболой.

Численные расчеты по минимизации функции (20) показывают, что использование функции  $F_{k+1}(l, x)$  в выражении (19) позволяет с точностью до величины порядка 1% представить исходную функцию  $xJ_{l+1}(x)J_l^{-1}(x)$ . Приближенное значение нулей  $T_l(a, x)$  может быть найдено из решения бикубического уравнения вида  $x^6 + a_{1,k}x^4 + a_{2,k}x^2 + a_{3,k} = 0$ , которое следует из уравнения (19).

Таблица 2. Зависимость нормировочных коэффициентов  $\alpha_k(l)$ ,  $\beta_k(l)$  и максимальной погрешности  $\Delta_k(l, x)$  от  $l$

$k$	$l$	1	2	3	4
2	$\alpha_2(l)$	0,09792	0,088937	0,082387	0,076602
	$\beta_2(l)$	2,402	3,3591	4,3176	5,2737
	$(\Delta_2(l, x))_{max}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$
3	$\alpha_3(l)$	0,096014	0,090852	0,0910937	0,09002
	$\beta_3(l)$	2,4044	3,3798	4,37935	4,37435
	$(\Delta_3(l, x))_{max}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$	$0,9 \cdot 10^{-2}$
4	$\alpha_4(l)$	0,095005	0,09476	0,094173	0,09048
	$\beta_4(l)$	2,404	3,4	4,4	5,38
	$(\Delta_4(l, x))_{max}$	$0,8 \cdot 10^{-2}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$	$0,7 \cdot 10^{-2}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$



В Таблице 2. приведены результаты численных расчетов максимальной погрешности  $\Delta_k(l, x)$  для  $l = 1; 2; 3; 4$ .

Таким образом, определение нулей функции  $T_l(a, x)$  в диапазоне  $\gamma_{l,k-1} \leq x \leq \gamma_{l,k}$  может быть сведено к решению бикубического уравнения, получаемого из приближенного уравнения (19).

#### 4. Ортогональность функций $T_l(a, x)$

Ортогональность функций Бесселя  $J_l(x)$  следует из равенства нулю интеграла:

$$\int_0^{R_0} x J_l\left(\frac{\alpha}{R_0} x\right) J_l\left(\frac{\beta}{R_0} x\right) dx = \begin{cases} \frac{R_0^2}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_{l+1}(\alpha) J_l(\beta) - \beta J_l(\alpha) J_{l+1}(\beta)], & \alpha \neq \beta \\ \frac{R_0^2}{2} \left[ J_l'^2(\alpha) + \frac{1}{2} \left( R_0^2 - \frac{l^2}{\alpha^2} \right) J_l^2(\alpha) \right], & \alpha = \beta \end{cases} \quad (21)$$

Если числа  $\alpha$  и  $\beta$  в выражении (21) не равны ( $\alpha \neq \beta$ ), и являются разными нулями функции Бесселя  $\alpha = \gamma_{l,n}$ ,  $\beta = \gamma_{l,k}$ , то функции Бесселя  $J_l(x)$  ортогональны.

Если  $\alpha = \beta$ , где  $\alpha = \gamma_{l,n}$  - нуль функции Бесселя, то значение интеграла (21) является конечной положительной величиной.

Функции Бесселя также ортогональны, если вместо корней  $\gamma_{l,n}$  и  $\gamma_{l,k}$  использовать числа  $\alpha = \mu_{l,n}$  и  $\beta = \mu_{l,k}$  ( $\mu_{l,n} \neq \mu_{l,k}$ ), где  $\mu_{l,n}, \mu_{l,k}$  - различные корни уравнения  $T_l(a, x) = 0$ . В этом случае верхнее выражение в квадратных скобках в правой части (21) обращается в тождество  $\mu_{l,n} J_{l+1}(\mu_{l,n}) J_l(\mu_{l,k}) - \mu_{l,k} J_l(\mu_{l,n}) J_{l+1}(\mu_{l,k}) = 0$  [11], что также свидетельствует об ортогональности функций Бесселя  $J_l(x)$ .

Покажем, что функции  $T_l(a, x)$  ортогональны. Для этого, аналогично (21), рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned}
I(l, a, b, n, k) &= \int_0^{R_0} x^{-1} T_l \left( a, \frac{\mu_{l,n}(a)}{R_0} x \right) T_l \left( b, \frac{\mu_{l,k}(b)}{R_0} x \right) dx = \\
&= \frac{\mu_{l,n}(a)}{R_0} \frac{\mu_{l,k}(b)}{R_0} \int_0^{R_0} x dx \left[ \frac{a-1}{2} J_{l+1} \left( \frac{\mu_{l,n}(a)}{R_0} x \right) + \frac{a+1}{2} J_{l-1} \left( \frac{\mu_{l,n}(a)}{R_0} x \right) \right] \times \\
&\times \left[ \frac{b-1}{2} J_{l+1} \left( \frac{\mu_{l,k}(b)}{R_0} x \right) + \frac{b+1}{2} J_{l-1} \left( \frac{\mu_{l,k}(b)}{R_0} x \right) \right] = \mu_{l,n}(a) \mu_{l,k}(b) \times \\
&\times \int_0^1 t dt \left[ \frac{a-1}{2} J_{l+1}(\mu_{l,n}(a)t) + \frac{a+1}{2} J_{l-1}(\mu_{l,n}(a)t) \right] \left[ \frac{b-1}{2} J_{l+1}(\mu_{l,k}(b)t) + \right. \\
&\left. + \frac{b+1}{2} J_{l-1}(\mu_{l,k}(b)t) \right],
\end{aligned} \tag{22}$$

где  $l \geq 1$ .

Для доказательства ортогональности функций  $T_l(a, x)$  и  $T_l(b, x)$  необходимо определить значения параметров  $a, b$ , при которых интеграл  $I(l, a, b, n, k)$  равен нулю.

В частном случае  $a = b = \pm 1$  интегралы (22) вычисляются аналитически, и оказываются пропорциональными сумме произведений функций Бесселя [10]:

$$I(l, \pm 1, \pm 1, n, k) = \Lambda_{\pm 1} \begin{cases} \mu_{l,n}(1) J_l(\mu_{l,n}(1)) J_{l-1}(\mu_{l,k}(1)) - \\ - \mu_{l,k}(1) J_l(\mu_{l,k}(1)) J_{l-1}(\mu_{l,n}(1)); \\ \mu_{l,n}(-1) J_{l+2}(\mu_{l,n}(-1)) J_{l+1}(\mu_{l,k}(-1)) - \\ - \mu_{l,k}(-1) J_{l+2}(\mu_{l,k}(-1)) J_{l+1}(\mu_{l,n}(-1)), \end{cases} \tag{23}$$

$$\text{где } \Lambda_{\pm 1} = \frac{\mu_{l,n}(\pm 1) \mu_{l,k}(\pm 1)}{\mu_{l,n}^2(\pm 1) - \mu_{l,k}^2(\pm 1)}.$$

Поскольку  $\mu_{l,i}(\pm 1) = \begin{cases} \gamma_{l-1,i+1} \\ \gamma_{l+1,i} \end{cases}$ , то интегралы (22), (23) тождественно равны

нулю, если  $n \neq k$ . Таким образом, ортогональность функций  $T_l(a = \pm 1, x)$  и  $T_l(b = \pm 1, x)$  доказана.

Исследуем ортогональность функций  $T_l(a, x)$  и  $T_l(b, x)$  в остальном диапазоне изменения параметров  $a$  и  $b$ .

Для определенности полагаем  $n > k$  и  $k \geq 2$ , что соответствует всегда выполняющемуся неравенству:  $\mu_{l,n}(a) > \mu_{l,k}(b)$ . В этом случае после интегрирования уравнение (22) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_- b_-}{(\mu_{l,k}(b))^2 - (\mu_{l,n}(a))^2} \left[ \mu_{l,k}(b) J_{l+2}(\mu_{l,k}(b)) J_{l+1}(\mu_{l,n}(a)) - \right. \\
& \left. - \mu_{l,n}(a) J_{l+1}(\mu_{l,k}(b)) J_{l+2}(\mu_{l,n}(a)) \right] + \frac{a_+ b_+}{(\mu_{l,k}(b))^2 - (\mu_{l,n}(a))^2} \times \\
& \times \left[ \mu_{l,k}(b) J_l(\mu_{l,k}(b)) J_{l-1}(\mu_{l,n}(a)) - \mu_{l,n}(a) J_{l-1}(\mu_{l,k}(b)) J_l(\mu_{l,n}(a)) \right] + \quad (24) \\
& + \frac{\mu_{l,n}(a)}{\mu_{l,k}(b)} \left( \frac{\mu_{l,n}(a) \mu_{l,k}(b)}{4} \right)^l \left( \frac{a_+ b_-}{2\Gamma(l+2)} \frac{\mu_{l,k}^2(b)}{\mu_{l,n}^2(a)} S_1(l, a, b, n, k) + \right. \\
& \left. + \frac{a_- b_+}{2\Gamma(l)} S_2(l, a, b, n, k) \right) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_1(l, a, b, n, k) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left( \frac{\mu_{l,n}(a)}{2} \right)^{2m}}{m! \Gamma(l+m)(m+l+1)} F \left( -m, -m-l+1, l+2, \left( \frac{\mu_{l,k}(b)}{\mu_{l,n}(a)} \right)^2 \right), \\
S_2(l, a, b, n, k) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left( \frac{\mu_{l,n}(a)}{2} \right)^{2m}}{m! \Gamma(l+m+2)(m+l+1)} F \left( -m, -m-l-1, l, \left( \frac{\mu_{l,k}(b)}{\mu_{l,n}(a)} \right)^2 \right),
\end{aligned}$$

$a_{\pm} = \frac{a \pm 1}{2}$ ,  $b_{\pm} = \frac{b \pm 1}{2}$ ,  $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  - гипергеометрическая функция от переменной  $\xi$  с параметрами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  [12].

Поскольку уравнение (24) не поддается аналитическому решению, приведем результаты его численного решения для различных значений  $l$ ,  $n$  и  $k$ . Они представлены на Рис. 2–3. При численном моделировании количество слагаемых  $m$  в суммах  $S_1(l, a, b, n, k)$  и  $S_2(l, a, b, n, k)$  в уравнении (24) должно быть выбрано достаточным  $m = N \gg 1$  для обеспечения требуемой точности их расчета. Так, например, при  $N = 20$  и  $N = 35$  значения сумм отличаются в двенадцатом знаке после запятой.

Кривые на Рис. 2–3 определяют значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых функций  $T_l(a, \mu_{l,n}(a)x/R_0)$  и  $T_l(b, \mu_{l,k}(b)x/R_0)$  при  $l=1$  и  $n > k \geq 2$  удовлетворяют условию ортогональности. Численные расчеты демонстрируют, что точки  $a = b = \pm 1$ , как и показано аналитически (23), также являются решениями уравнения  $I(l, a, b, n, k) = 0$ .

Из результатов численных расчетов, приведенных на Рис 3., следует, что при последовательном увеличении параметра  $n$  от 3 до 5 кривые решений уравнения (24) стремятся к линиям  $a = 1$  и  $b = -1$ .

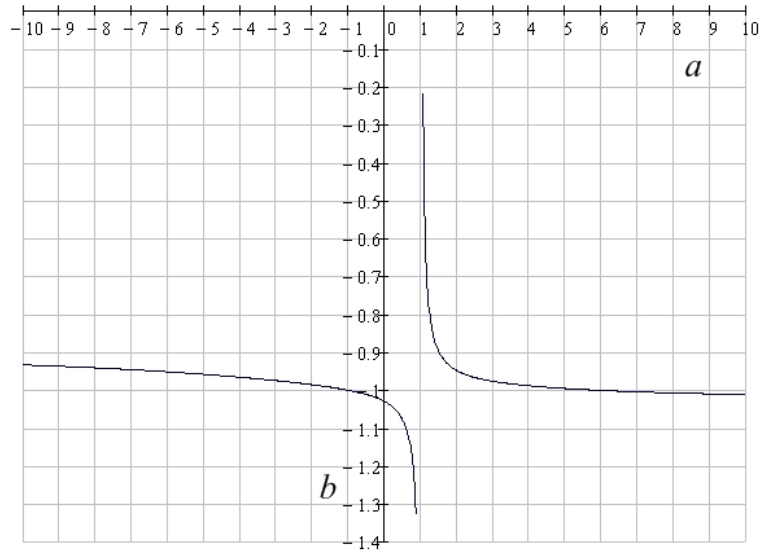


Рис.2. Расположение нулей функции  $I(1, a, b, 3, 2) = 0$ , в которых функции  $T_1(a, x)$  и  $T_1(b, x)$  ортогональны

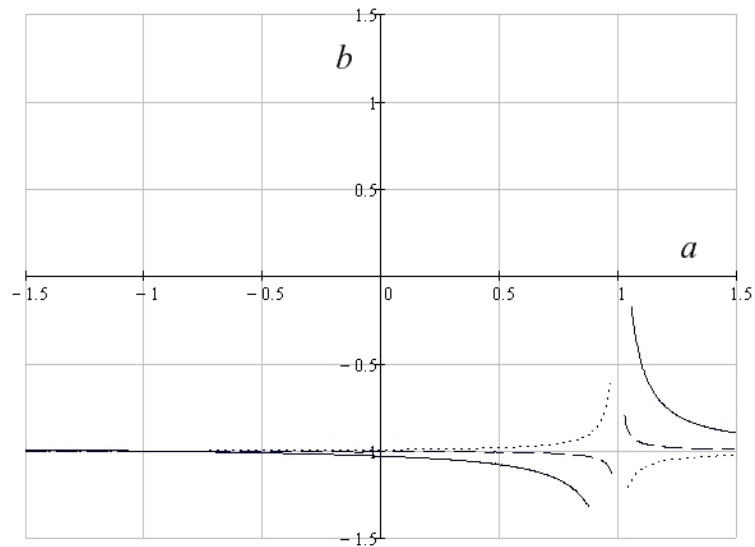


Рис.3. Расположение нулей функций  $I(1, a, b, 3, 2) = 0$  (сплошная линия);  $I(1, a, b, 4, 2) = 0$  (линия из точек);  $I(1, a, b, 5, 2) = 0$  (прерывистая линия) в которых функции  $T_1(a, x)$  и  $T_1(b, x)$  ортогональны

Для больших значений  $n \rightarrow \infty$  анализ уравнения (24) указывает, что его решениями являются прямые  $a = 1$  и  $b = -1$ .

Для нулей  $n > k = 1$  необходимо учитывать тот факт, что один из параметров уравнения (24), например  $b$ , имеет область изменения  $-1 \leq b < \infty$ , в то время как параметр  $a$  может принимать все действительные значения:  $-\infty < a < \infty$ .

Анализ уравнения (24) в частных случаях дает следующее.

Точки прямой  $b = -1$  являются решениями уравнения (24), т.к.  $\mu_{l,1}(-1) = 0$ .

Точка  $a = b = 1$  также является решением уравнения (24) в силу справедливости уравнения (23).

Результаты численного решения уравнения (24) при  $n > k = 1$  показывают, что с ростом параметра  $n = 2, 3, 4$  поведение решений (24) соответствует приведенному на Рис. 3 для области  $b \geq -1$ .

### Заключение

В результате исследования нулей функции  $T_l(a, x) = xJ_l'(x) + aJ_l(x)$  можно сформулировать следующие выводы.

Обобщена информация о взаимном расположении нулей функции Бесселя  $l$ -го,  $l \pm 1$ -го порядков и нулей ее производной ( $J_l'(x) = 0$ ).

Найден вид биквадратного уравнения, которое может быть использовано для определения, с достаточной степенью точности, нулей функции  $T_l(a, x)$  в диапазоне  $0 \leq x \leq \gamma_{l,1}$ .

Для приближенного вычисления нулей функции  $T_l(a, x)$  в диапазоне  $\gamma_{l,k-1} \leq x \leq \gamma_{l,k}$  необходимо решить бикубическое уравнение вида  $x^6 + a_{1,k}x^4 + a_{2,k}x^2 + a_{3,k} = 0$ , которое может быть получено из бесконечного сходящегося ряда путем учета его основных слагаемых.

Численно и аналитически исследовано условие ортогональности функций  $T_l(a, x)$  и  $T_l(b, x)$ .

Показано, что для любого значения параметра  $a$  может быть найдено такое  $b$ , при котором условие ортогональности функций  $T_l(a, x)$  и  $T_l(b, x)$  при  $l \geq 1$  для корней  $n > k \geq 1$  удовлетворяется.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. В пяти частях. – М.: Изд. иностранной литературы, 1949. – 798 с.
2. Lamb Н. Note on the induction of electric currents in a cylinder placed across the lines of magnetic force // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1884. – vol. XV, № 1. – P. 270 – 274.
3. Ivanov S.T., Alexov E.G. Electromagnetic waves in the semiconductor plasma waveguide // Physica Scripta. – 1989. – vol. 40, № 1. – P. 58 – 63.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 296 с.

5. Moore C.N. On the summability of the developments in Bessel's functions // Transactions of the American Mathematical Society. – 1920. – vol. 21, № 2. – P. 107 – 156.
6. Landau L.J. Ratios of Bessel functions and roots of  $\alpha J_l(x) + x J_l'(x) = 0$  // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1999. – vol. 240, № 1. – P. 174 – 204.
7. Абрамовича М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.– М.: Наука, 1979. – 832 с.
8. S. R. Finch, Bessel function zeroes, Unpublished note, 2003. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://algo.inria.fr/resolve/bs.pdf> . — PDF формат, версия 1.3.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1983. – 752 с.
11. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 272 с.
12. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1966. – 296 с.