УДК 519.85

Кусочно-линейные модели комбинаторных задач оптимизации

А. И. Косолап
Украинский государственный химико-технологический университет, Украина

В статье предложены кусочно-линейные модели класса комбинаторных задач оптимизации. Это позволило свести решения этих задач к минимизации линейных функций на невыпуклых многогранниках. Для их решения предлагается новый метод квадратичной регуляризации.

Ключевые слова: *кусочно-линейные модели, метод квадратичной регуляризации, невыпуклые многогранники, комбинаторная оптимизация.*

В статті запропоновані кусково-лінійні моделі класу комбінаторних задач оптимізації. Це дозволило звести розв'язок цих задач до мінімізації лінійних функцій на неопуклих многогранниках. Для їх розв'язку пропонується новий метод квадратичної регуляризації.

Ключові слова: *кусково-лінійні моделі, метод квадратичної регуляризації, неопуклі многогранники, комбінаторна оптимізація.*

Piecewise-linear models of combinatory optimization problems are offered. It has allowed to reduce solution of these problems to the minimization of linear functions on not convex polyhedrons. For their solution the new method of a quadratic regularization is offered.

Key words: *piecewise-linear models, methods of quadratic regularization, nonconvex polyhedrons, combinatory optimization.*

1. Введение

Существует огромное число комбинаторных задач, для которых в настоящее время не существует эффективных методов решения. Это такие задачи как коммивояжера, теории расписаний, выполнения сложных проектов, многие задачи теории графов и т. п. которые относятся к классу NP-сложных [1]. Были построены многочисленные модели целочисленной оптимизации для их решения. Однако эффективных методов для этого класса задач пока не разработано. В дальнейшем, широкое распространение получили эвристические методы, которые позволяют получать приближенные решения. В 90-х годах прошлого века было создано и получило широкое распространение полуопределенное программирование [2]. С его помощью удалость найти решения некоторых комбинаторных задач с гарантированной точностью [3]. Это направление интенсивно разрабатывается и в настоящее время. Как правило, комбинаторные задачи сводятся к решению квадратичных задач оптимизации. Затем квадратичные задачи посредством полуопределенной релаксации (замена $x^T Ax$ на $A \bullet xx^T = A \bullet X$) преобразуются к линейной задаче полуопределенного программирования. Для решения этого класса задач разработаны эффективные алгоритмы. Однако полуопределенная релаксация (без требования, чтобы искомая матрица X имела ранг единица) часто дает сугубо приближенные решения. Все это требует разработки новых методов решения комбинаторных задач.

2. Кусочно-линейные модели комбинаторных задач.

Рассмотрим задачу выполнения проектов. Существует n проектов, которые необходимо выполнить в течении некоторого времени. Каждый проект характеризуется издержками на выполнения в единицу времени, временем выполнения и доходом в единицу времени от завершенного проекта, соответственно $\{a_i, \tau_i, b_i\}$. Имеется начальный капитал K на выполнения проектов, но его недостаточно для выполнения всех проектов одновременно. Часть ресурсов на выполнения проектов используется из доходов уже завершенных проектов. Требуется определить времена начала выполнения всех проектов (предполагается, что выполнение проекта не прерывается), при которых доход от реализации всех проектов к фиксированному моменту времени T был бы максимальным при условии, что в каждый момент времени количество ресурсов на выполнения всех проектов неотрицательно. Для каждого проекта интервал времени его выполнения $[0,T]$ разобьем на три подинтервала $[0,x_i]$, $[x_i, x_i+\tau_i]$ и $[x_i+\tau_i, T]$. Расходование ресурса на каждом из этих подинтервалов времени линейно. Это позволяет построить кусочно-линейную функцию расходования ресурсов на выполнение каждого проекта рис. 1. Аналитическое выражение этих функций будет следующее

$$g_i(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(a_i+b_i)\,|\,t-x_i-\tau_i\,|-a_i\,|\,t-x_i\,|+b_i(t-x_i-\tau_i)-a_i\tau_i].$$

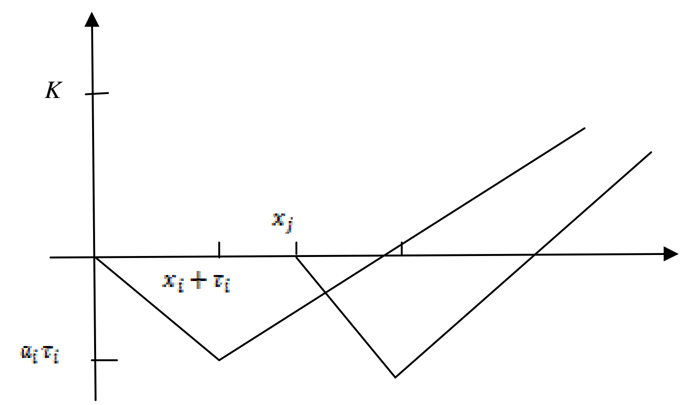

Рис.1. Функции использования ресурса

Тогда задача выполнения проектов имеет вид

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \mid g_i(t,x) \ge 0,\ \forall t \ge 0,\ x \ge 0\}, \tag{1}$$

так как максимизация дохода $\max \sum b_i(T - x_i - \tau_i)$ равносильна минимизации $\min \sum b_i x_i$. Задача (1) содержит континуум ограничений. Учитывая то, что каждая функция $g_i(t,x)$ имеет одну точку минимума $x_i+\tau_i$, то и сумма этих функций будет иметь точки локальных минимумов только в этих точках (учитывая кусочную линейность функций). Это позволяет заменить континуум ограничений эквивалентной системой n ограничений

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n}[(a_i+b_i)\,|\,x_j+\tau_j-x_i\,|-(a_i+b_i)\,|\,x_j+\tau_j-x_i-\tau_i\,|- \\ -b_i(x_j+\tau_j-x_i-\tau_i)+a_i\tau_i]\le 2K,\ \ j=1,...,n,\ \ x\ge 0\}. \qquad (2)$$

Задача (2) является линейной оптимизационной задачей на невыпуклом многограннике. Для ее решения ниже предлагается метод квадратичной регуляризации.

Рассмотрим задачу теории расписаний, в которой необходимо последовательно обработать n различных деталей на m различных станках за минимальное время. Известно t_{ij} – время обработки i-й детали на j-м станке (время обработки не прерывается). Обработку каждой детали на каждом станке на всем интервале времени также можно разбить на три подинтервала $[0,x_{ij}]$, $[x_{ij},x_{ij}+t_{ij}]$, и $[x_{ij}+t_{ij},T]$. Соответствующая функция $g_{ij}(t,x_{ij})$ на первом и третьем интервале (вне интервала выполнения) будет равна нулю. Для ее непрерывности необходимо ввести еще один подинтервал. Разобьем третий подинтервал на два $[x_{ij}+t_{ij},x_{ij}+t_{ij}+\Delta]$ и $[x_{ij}+t_{ij}+\Delta,x_{ij}+t_{ij}+\Delta+T]$, где $\Delta=\min t_{ij}$. Теперь функция $g_{ij}(t,x_{ij})$ будет иметь вид, как это представлено на рис. 2.

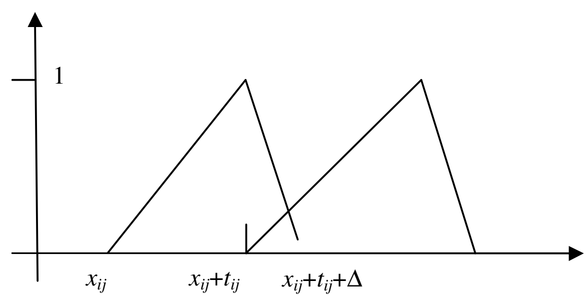

Рис.2. График функций $g_{ij}(t,x_{ij})$

Аналитическое выражение функции $g_{ij}(t,x_{ij})$ следующее

$$g_{ij}(t,x_{ij})=\frac{1}{2}(|\,t-x_{ij}\,|+(|\,t-x_{ij}+t_{ij}-\Delta\,|-|\,t-x_{ij}+t_{ij}\,|\,(\frac{1}{t_{ij}}+\frac{1}{\Delta})+\frac{t-x_{ij}+t_{ij}-\Delta}{t_{ij}}.$$

Условие того, что на одном станке одновременно может обрабатываться только одна деталь равносильно выполнению неравенства

$$\min \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(t, x_{ij}) \le 1, \ \forall t \ge 0, \ i = 1,...,n, \tag{3}$$

а условие, что каждая деталь одновременно обрабатывается только на одном станке, равносильно

$$\min \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(t, x_{ij}) \le 1, \ \forall t \ge 0, \ j = 1,...,m. \tag{4}$$

Тогда задача теории расписаний сводится к поиску

$$\min T \tag{5}$$

при ограничениях

$$x_{ij} + t_{ij} \le T, \ i = 1,...,n, \ j = 1,...,m \tag{6}$$

и ограничениях (3)–(4). Задача (2)–(6) также содержит континуум ограничений. Однако, учитывая то, что функции $g_{ij}(t, x_{ij})$ имеют только одну точку максимума $x_{ij} + t_{ij}$, задача (2)–(6) также преобразуется к конечной системе ограничений заменой t на $x_{ij} + t_{ij}$. Таким образом, задачи теории расписаний сводится к поиску линейной функции на невыпуклом многограннике.

Существует класс задач комбинаторной оптимизации на перестановках. В этих задачах необходимо, чтобы переменные x_i принимали только значения $1,2,...,n$, причем $x_i \ne x_j$ для всех $i \ne j$. Это условие также может быть представлено кусочно-линейным ограничением вида

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(t, x_i) \le 1, \forall t \ge 0,$$

где график функции имеет вид на рис. 3.

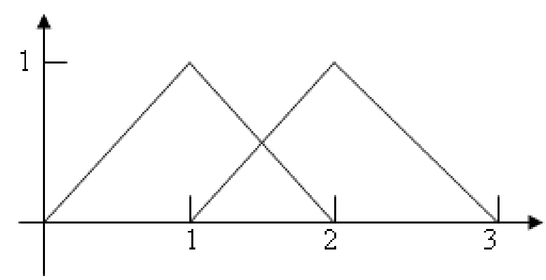

Рис.3. График функции $g_i(t, x_i)$

Аналитическое выражение функции $g_i(t, x_i)$ будет следующее

$$g_i(t, x_i) = \frac{1}{2}|t - x_i| - |t - x_i - 1| + \frac{1}{2}|t - x_i - 2|.$$

Таким образом, задачи на перестановках сводятся к кусочно-линейным моделям. Этот список моделей для комбинаторных задач можно продолжить.

Заметим, что число граней многогранников ограничений является достаточно большим (2^n и более). Будем называть такие многогранники, состоящие из модулей линейных функций, модульными. Если бы в ограничения задач входили модульные слагаемые только со знаком плюс, то такие многогранники были выпуклыми. В противном случае, они невыпуклые и могут содержать множество локальных минимумов.

3. Метод квадратичной регуляризации

Пусть в задаче

$$\min\{c^T x \mid g_i(x) \le 0, i = 1,..., m, x \ge 0\} \quad (6)$$

Функции $g_i(x)$ – кусочно-линейные и содержат слагаемые, содержащие модули линейных функций. Рассмотрим алгоритм решения задачи (6) при условии, что все функции $g_i(x)$ – выпуклые.

1. Выбираем $x^k = 0, k = 0.$
2. Раскрываем модули в ограничениях $g_i(x)$ в точке x^k и добавляем эти линейные ограничения к линейным ограничениям, полученным на предыдущих итерациях.
3. Решаем соответствующую задачу линейного программирования. Если ее решение x^{k+1} допустимо для ограничений задачи (6), то задача (6) решена. В противном случае полагаем $k = k+1$ и переходим к шагу 2.

Сходимость этого алгоритма следует из того, что на третьем шаге получаем нижнюю границу решения задачи (6), а число граней многогранника ограничений конечно.

Пусть многогранник ограничений задачи (6) является невыпуклым. Преобразуем задачу (6) к виду

$$\min\{c^T x \mid g_i(x) + r(c^T x)^2 \le d, i = 1,..., m, r(c^T x)^2 = d, x \ge 0\}. \quad (7)$$

Существует такое значение $r > 0$, что функции $g_i(x) + r(c^T x)^2$ будут выпуклыми или почти выпуклыми в положительном ортанте. Почти выпуклость означает, что при $r \to \infty$ функция становится выпуклой. Для дважды дифференцируемой функции $g(x)$, функция $g(x) + r\|x\|^2$ будет выпуклой. Поэтому рассмотренное преобразование равносильно замене $r\|x\|^2$ на $r(c^T x)^2$.

Введем обозначение

$$S(d) = \{x \mid g_i(x) + r(c^T x)^2 \le d, i = 1,..., m, x \ge 0\}.$$

Очевидно, что это множество выпуклое (почти выпуклое). Пусть d_0 – минимальное значение d, при котором множество $S(d) \neq \otimes$. Для нахождение переменной d_0 необходимо решить задачу $\min\{d \mid g_i(x) + r(c^T x)^2 \le d, i = 1,...,m, x \ge 0\}$ Пусть минимальное значение d_0 достигается в точке x^0 Если $(c^T x^0)^2 > d_0$, то решение задачи (7) находим из решения задачи

$$\min\{c^T x \mid g_i(x) + r(c^T x)^2 \le d, i = 1,..., m, r(c^T x)^2 = d, x \ge 0\}.$$

Значение d^*, при котором $r(c^T x^*)^2 = d^*$, легко определить методом дихотомии. Если же $r(c^T x^0)^2 = d_0$, то решение задачи (7) находим, решая задачу

$$\max\{c^T x \mid g_i(x) + r(c^T x)^2 \le d, i = 1,..., m, x \ge 0\}$$

и также определяем значение d^* методом дихотомии.

Рассмотрим пример

$$\min\{x_1 + x_2 \mid \frac{1}{2} |x_1 - 3| - |x_1 - 2| + \frac{1}{2} |x_1 - 4| + \frac{1}{2} |x_2 - 3| - |x_2 - 2| + \frac{1}{2} |x_2 + 1| \le 0\}.$$

Допустимое множество этой задачи невыпуклое и несвязное. Метод квадратичной регуляризации преобразует это множество в почти выпуклый многогранник. Максимум на этом многограннике совпадает с глобальным минимумом на невыпуклом многограннике, см. рис. 4.

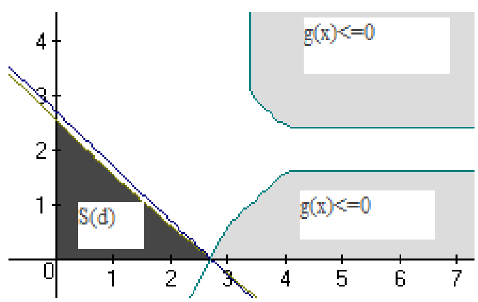

Рис.4. Метод квадратичной регуляризации

В табл. 1 приведены два примера задачи выполнения проектов, которые решены с помощью программного обеспечения, реализующего метод квадратичной регуляризации.

Табл. 1. Результаты расчетов задачи выполнения проектов

a_i	1	2	2	4	2	$K = 6$
τ_i	1	1	2	2	1	
b_i	4	4	2,5	3	2	
x_i	0	0	0	1	0,5	$bx = 4$
a_i	2	3	4	1	2	$K = 9$
τ_i	5	4	2	5	4	
b_i	3	5	5	5	4	
x_i	6	3,333332	0	1	2	$bx = 47{,}66666$

4. Выводы

Предложена общая схема построения кусочно-линейных моделей для классов задач комбинаторной оптимизации. Для решения полученных задач разработан метод квадратичной регуляризации, который сводит решение многоэкстремальных задач к однопараметрическому семейству задач выпуклой оптимизации. Предложен алгоритм для решения задач линейного программирования при модульных ограничениях. Разработанные методы реализованы программно и проведенные численные эксперименты для задач различной размерности. Они подтвердили эффективность метода квадратичной регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.:Мир. – 1982. – 416 с.
2. *Boyd S., Vandenberghe L. Semidefinite programming //SIAM Review. – 1996. – 38. – P. 49–95.*
3. *Goemans M.X., Williamson D.P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming //Journal of Assoc. Comput. Mach. – 1995. – 42. – P. 1115–1145.*

Надійшла у першій редакції 03.10.2011, в останній – 02.11.2011.