УДК 539.3

Численное моделирование плесканий жидкости в упругой цилиндрической оболочке

В. И. Гнитько, В. В. Науменко

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

Разработаны математические модели для анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, под действием сейсмических и импульсных загрузок. Построены дискретные модели для проведения численных экспериментов. Осуществлен переход от трехмерной задачи к одномерной. Метод решения основан на сведении задачи об определении давления жидкости на оболочку к системе сингулярных интегральных уравнений. Связанная задача теории упругости решается с помощью сочетания методов конечных и граничных элементов. Дифференциальные уравнения нестационарной задачи решаются численно методом Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядка. Проведен численный эксперимент для цилиндрической оболочки под действием сейсмической загрузки.

Ключевые слова: *плескания жидкости в резервуарах, вынужденные колебания, гидроупругое взаимодействие, сейсмическое нагружение, методы граничных и конечных элементов.*

Розроблені математичні моделі для аналізу динамічної поведінки оболонок обертання, частково заповнених ідельною нестисливою рідиною, підданих дії імпульсних та сейсмічних навантажень. Побудовані дискретні моделі для проведення чисельних експериментів. Здійснено перехід від тривимірної задачі до одновимірної. Метод розв’язання засновано на зведенні задачі визначення тиску рідини на оболонку до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Зв’язана задача теорії пружності розв’язується за допомогою сполучення методів скінченних та граничних елементів. Диференціальні рівняння нестаціонарної задачі розв’язані чисельно методом Рунне-Кута 4-го та 5-го порядку. Проведено чисельний експеримент та для циліндричної оболонки під дією сейсмічного навантаження.

Ключові слова: *плескання рідини в резервуарах, вимушені коливання, гідропружня взаємодія, сейсмічне навантаження, методи граничних та скінченних елементів.*

The mathematical models to analyze the dynamics of partially filled shells of revolution under impulse and seismic loading are elaborated. The discrete models for numerical simulation are proposed. The reduction of 3D problem to one-dimensional one was done. The method of solution relies on reducing problem of determining the fluid pressure on the shell walls to the system of singular integral equations. The coupled problem is solved using combination of boundary and finite element methods. Differential equations of transient problem are solved numerically by Runge-Kutta method 4th and 5th orders. The numerical simulation was accomplished for cylindrical shell under seismic loading

Key words: *sloshing in tanks, forced vibrations, hydro-elastic interaction, seismic loading, finite and boundary element methods.*

1. Введение

Контейнеры и резервуары для хранения нефти, и других легковоспламеняющихся и опасных жидкостей широко используются в различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, химическая и нефтегазовая промышленность, энергетическое машиностроение, транспорт.

Эти резервуары функционируют в условиях повышенных технологических нагрузок и заполнены нефтью, легковоспламеняющимися или ядовитыми веществами. Аварийный риск при функционировании таких емкостей, связанный с сейсмической опасностью, взрывами, другими форс-мажорными обстоятельствами, долгое время недооценивался во многих странах, в частности, на Украине, вследствие недостаточной проработки проблемы. Катастрофические последствия крупнейших землетрясений последних лет привлекли внимание к теоретическим работам, посвященным оценке и мониторингу аварийного риска, как при сейсмических воздействиях, так и при внештатных ситуациях на производстве [1-4]. Актуальность таких исследований подтверждается новыми картами сейсмической активности Украины (сейсмическая зона Вранча) и расположением промышленных центров.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается задача о действии импульсных нагрузок на оболочку вращения с произвольным разветвленным меридианом при частичном заполнении жидкостью. Решение задачи состоит из нескольких этапов, каждый из которых представляет самостоятельную задачу. На первом этапе определяются частоты и формы колебаний оболочки в вакууме. Вектор перемещений, представляющий собой решение связанной гидродинамической задачи, ищется в виде линейной комбинации собственных форм колебаний оболочки в вакууме. Далее определяются частоты и формы свободных колебаний оболочки, содержащей жидкость, гравитационные силы не учитываются. Жидкость рассматривается идеальная, несжимаемая. Ее движение, вызванное действием вынуждающей силы, начинается из состояния покоя, и вследствие теоремы Томпсона, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, удовлетворяющий уравнению Лапласа. На оболочку, кроме вынуждающей силы, действуют силы давления со стороны жидкости. С использованием интеграла Коши-Лагранжа величину этого давления можно выразить через потенциал скоростей, который также ищем в виде линейной комбинации решений краевых задач для уравнения Лапласа для каждой моды колебаний. Определение этих частных потенциалов представляет собой второй этап решения связанной динамической задачи гидроупругости. Затем определяются частоты и формы колебаний жесткой оболочки с учетом гравитационных сил. Результирующий потенциал скоростей представляем в виде суммы двух потенциалов, соответствующих задачам определения частот и форм свободных колебаний жидкости в жесткой оболочке и упругой оболочки с жидкостью без учета гравитационной составляющей. Интегрирование по объему жидкости сведено к интегрированию вдоль меридиана оболочки и радиуса свободной поверхности жидкости, т.е. является одномерным. Далее приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка для решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки, частично заполненной жидкостью. Третий этап решения связанной задачи состоит в численном решении полученной системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта.

Матричное уравнение движения оболочки, частично заполненной жидкостью, запишем в виде

$$\boldsymbol{LU} + \boldsymbol{M\ddot{U}} = P_l + Q\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ – матрицы жесткости и масс; $\boldsymbol{U} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ – вектор-функция перемещений; $Q(t)$ – вектор внешней нагрузки, $P(t)$ – гидродинамическое давление жидкости. Давление жидкости находим из интеграла Коши–Лагранжа, который в линейном приближении имеет вид

$$\frac{P}{\rho_l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gz + \frac{P_0}{\rho_l} - a_s(t)\,x\,, \tag{2}$$

где ρ_l – плотность жидкости; z – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении, g – ускорение свободного падения, $a_s(t)\,x$ - ускорение горизонтального сейсма.

Обозначим смоченную поверхность оболочки через S_1, а свободную поверхность S_0. Пусть декартова система координат $0xyz$ связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости S_0 совпадает с плоскостью $x0y$ в состоянии покоя. Считаем, что резервуар с жидкостью подвергается динамическому воздействию. На смоченной поверхности упругой оболочки требуется выполнение условия непротекания, на свободной поверхности задаются динамическое и кинематическое граничные условия. Динамическим граничным условием является равенство давления на свободной поверхности атмосферному, а кинематическое условие состоит в том, чтобы частицы жидкости, находящиеся на свободной поверхности жидкости в начальный момент времени, оставались на ней во все последующие моменты движения.

Таким образом, получаем следующую краевую задачу

$$\boldsymbol{LU} + \boldsymbol{M\ddot{U}} + \rho_l\dot{\phi} + gz + a_s(t)\,x = Q\,;$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}\,,\ P \in S_1\,; \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \dot{\zeta}\,,\ P \in S_0\,; \qquad \dot{\phi} + g\zeta + a_s(t)\,x = 0\,,\ P \in S_0$$

для определения неизвестных функций $\boldsymbol{U}$ и ϕ. Будем искать собственные формы колебаний оболочки в жидкости в следующем виде:

$$U(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\,u_k(x,y,z)\,, \tag{3}$$

где функции $u_k(x,y,z)$ – собственные формы колебаний оболочки в вакууме, $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Потенциал скоростей ϕ представим в виде суммы двух потенциалов $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Для определения ϕ_1 сформулируем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2\phi_1 = 0\,, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}\,,\ P \in S_1\,, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = 0\,,\ P \in S_0\,. \tag{4}$$

Здесь $w(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} w_k(x,y,z)\,c_k(t)$, функции $w_k(x,y,z)$ – нормальные компоненты собственных форм колебаний пустой оболочки. Отметим, что из соотношения (2) и второго из уравнений (4) следует, что

$$\phi_1(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}\phi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k(t)\,. \tag{5}$$

Для определения функций ϕ_{1k} имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2\phi_{1k}=0\,,\qquad \frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n}=w_k\,,\ P\in S_1\,,\qquad \phi_{1k}=0\,,\ P\in S_0\,. \tag{6}$$

Потенциал ϕ_2 ищем в виде $\phi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{n}\dot{d}_k(t)\phi_{2k}(x,y,z)$, где функции ϕ_{2k} – собственные формы колебаний жидкости в жестком сосуде. Определим эти собственные формы. Предварительно рассмотрим задачу

$$\nabla^2\phi=0\,,\quad \frac{\partial\phi}{\partial n}=0\,,\ P\in S_1\,,\quad \frac{\partial\phi}{\partial n}=\dot{\zeta}\,,\ P\in S_0\,,\quad \dot{\phi}+g\zeta=0\,,\ P\in S_0\,. \tag{7}$$

Последнее из уравнений (7) представляет динамическое условие на свободной поверхности. Дифференцируя это уравнение по t, приходим к уравнению для потенциала скоростей жидкости в жестком сосуде

$$\ddot{\phi}+g\frac{\partial\phi}{\partial n}=0\,,\ P\in S_0\,. \tag{8}$$

Решение этой задачи ищем в форме $\phi(x,y,z,t)=e^{i\kappa t}\psi(x,y,z)$. Потенциал ψ, описывающий свободные гармонические колебания жидкости, является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla^2\psi=0\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0\,,\ P\in S_1\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\kappa^2}{g}\psi\,,\ P\in S_0\,. \tag{9}$$

Ее решение определяет ряд собственных чисел κ_k и соответствующих им собственных функций ϕ_{2k} . Решив задачу (10), будем искать ϕ_2 в виде

$$\phi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{n}d_k(t)\psi_k(x,y,z)\,.\ \phi_{2k}\left(x,y,z\right)=\psi_k\left(x,y,z\right). \tag{10}$$

Таким образом, получены представления для потенциалов ϕ_1 и ϕ_2; $\phi=\phi_1+\phi_2$

$$\phi_1(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}\phi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k(t)\,,\qquad \phi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{n}\dot{d}_k(t)\phi_{2k}(x,y,z)\,.$$

При этом удовлетворяются уравнение Лапласа и граничное условие непротекания. На свободной поверхности должны выполняться условия

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\dot{\zeta}\,,\ P\in S_0\,;\ \dot{\phi}+g\zeta+a_s\left(t\right)x=0\,,\ P\in S_0. \tag{11}$$

Первое из этих равенств определяет форму свободной поверхности

$$\frac{\partial\phi_2(x,y,z,t)}{\partial n}=\sum_{k=1}^{n}\dot{d}_k(t)\,\frac{\partial\phi_{2k}(x,y,z)}{\partial n}=\dot{\zeta};\quad \sum_{k=1}^{n}d_k(t)\,\frac{\partial\phi_{2k}(x,y,z)}{\partial n}=\zeta+C\,.$$

Константу интегрирования C определяем из начального условия $\zeta(0,P)=H$, которое означает, что в начальный момент времени (перед землетрясением) свободная поверхность жидкости занимала горизонтальное положение. Следовательно, $C=H$. Подставляя полученные соотношения и равенства

$\dot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_1 = 0$ во второе из уравнений (11), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{d}_k(t)\phi_{2k}(x,y,z) + g\sum_{k=1}^{m} \dot{c}_k(t)\,\frac{\partial\phi_{1k}(x,y,z)}{\partial n} + g\sum_{k=1}^{n} d_k(t)\,\frac{\partial\phi_{2k}(x,y,z)}{\partial n} + H = 0\,.$$

Используя соотношения (7), приходим к дифференциальным уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ddot{d}_k(t) + \kappa_k^2 d_k(t)\right]\phi_{2k}(x,y,z) + g\sum_{k=1}^{m} \dot{c}_k(t)\,\frac{\partial\phi_{1k}(x,y,z)}{\partial n} + H = 0\,. \quad (12)$$

Умножим уравнение (12) скалярно на функцию ϕ_{2l}. В силу ортогональности системы собственных форм колебаний жидкости (и единицы) в жестком сосуде получим следующие соотношения

$$\ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\phi_{2l},\phi_{2l})}\sum_{k=1}^{m} \dot{c}_k(t)\left(\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n},\phi_{2l}\right) + a_s(t)(x,\psi_l) = 0, \quad l = 1,2..,n\,. \quad (13)$$

После определения функций ϕ_{1k} и ϕ_{2k} подставляем их в уравнение (1) и получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$L\left(\sum_{k=1}^{m} c_k u_k\right) + M\left(\sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k u_k\right) = -\rho_l\left(\sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k\phi_{1k} + \sum_{i=1}^{n} \ddot{d}_i\phi_{2i} + gz + a_s(t)x\right) + Q\,. \quad (14)$$

Пусть ω_k, u_k – собственные частоты и формы свободных колебаний оболочки в вакууме. Имеют место следующие соотношения:

$$\boldsymbol{L}u_k = \omega_k^2\boldsymbol{M}u_k\,, \qquad (\boldsymbol{M}u_k, u_j) = \delta_{kj}\,. \quad (15)$$

Умножив скалярно уравнение (14) на u_j и принимая во внимание условия нормировки (15), получим следующую систему n+m дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{gathered}\ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_j(t) + \rho_l\left[\sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k(\phi_{1k},u_j) + \sum_{i=1}^{n} \ddot{d}_i(\phi_{2i},u_j) + g(z,u_j) + a_s(t)(\rho,u_j)\right] = \\ = 0,\ j = 1,\ m; \quad \ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\phi_{2l},\phi_{2l})}\sum_{k=1}^{m} \dot{c}_k(t)\left(\frac{\partial\phi_{1k}}{\partial n},\phi_{2l}\right) = 0, \quad l = 1,2..,n.\end{gathered} \quad (16)$$

Задачи определения потенциалов $\dot{\phi}_1, \phi_2$ сведены к системам сингулярных интегральных уравнений [5,6], для численного решения которых используется метод дискретных особенностей [7].

3. Численные результаты

Дан анализ сейсмического воздействия на жесткую цилиндрическую оболочку со следующими параметрами: радиус R=1 м, толщина h=0.01 м, высота L=2 м, модуль Юнга $E=2\cdot10^5$ МПа, коэффициент Пуассона ν=0.3, плотность материала ρ=7800 кг/м^3; плотность жидкости ρ_l=1000 кг/м^3.

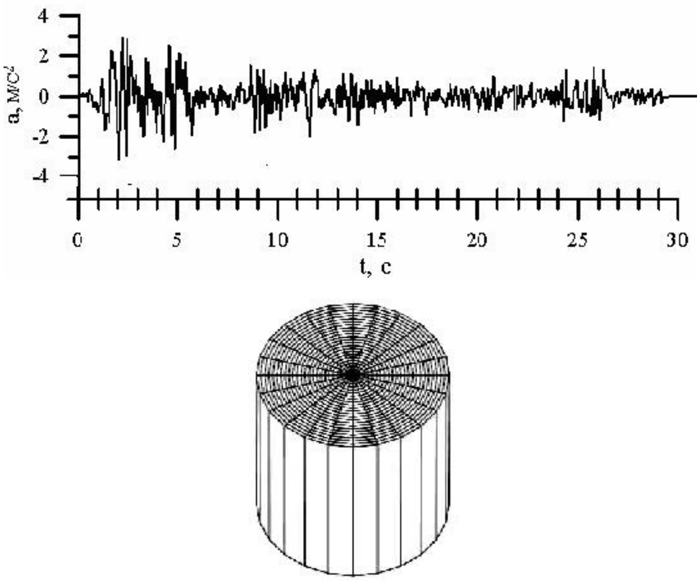

Рис. 1. Акселерограмма землетрясения и свободная поверхность жидкости в начальный момент времени

На рис. 1 показаны акселерограмма землетрясения в Эль-Центро [7], США (9 баллов) и свободная поверхность жидкости в начальный момент землетрясения. На рис. 2 показана свободная поверхность жидкости в различные моменты времени, полученная для акселерограммы, представленной на рис. 1.

Рис. 2. Свободная поверхность жидкости в различные моменты времени

Решены также задачи о колебаниях упругих цилиндрических оболочек с жидкостью.

4. Выводы

Разработан эффективный метод анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, при сейсмическом и импульсном нагружении. Исследована динамика цилиндрического резервуара, заполненного несжимаемой жидкостью при сейсмическом нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kumar V., Ganesan, N. Dynamic analysis of conical shells conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – 310(1-2). – pp. 38-57.
2. Malhotra P. K. New method for seismic isolation of liquid-storage tanks // Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 1997. – 26(8). – pp. 839-847.
3. Sanchez-Sanchez H., Cortes S.C., Dominguez A.M. Structural behaviour of liquid filled storage tanks of large capacity placed in seismic zones of high risk in Mexico // Proc. of 13th World Conference on Earthquake Engineering. – Vancouver, B.C., Canada. – 2004. – Paper № 2665.
4. Sanchez-Sanchez H., Cortes S.C. Seismic response of cylindrical tanks for oil // Proc. of 14th World Conference on Earthquake Engineering. – China, 2008.
5. Strelnikova E.,Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // Proc. of XXXII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, 2010, P. 203-211.
6. E. S., Ventsel, V. Naumenko, E. Strelnikova, E. Yeseleva. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. Engineering analysis with boundary elements, №34, 2010, 856-862p.
7. Paz M. International handbook of earthquake engineering: codes, programs, and examples: Oxfordshire, UK: Chapman & Hall, 545 p. 1994.

Надійшла – 15.03.2012.