УДК 532.546

Об одном численном методе определения поля давлений в нелинейном случае

Г. В. Голубев
Казанский национальный исследовательский технический университет – КАИ им. А. Н. Туполева, Россия

Рассматривается задача об определении поля давления в гетерогенном трещиновато-пористом слое. Мы вывели исходное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных с дивергентной главной частью и установили его тип. Мы ставим математическую задачу и предлагаем метод решения на основе аналитических преобразований и метода итераций. Также разработаны общие алгоритмы и ряд примеров.

Ключевые слова: *поле давления, гетерогенный трещиновато-пористый слой, дифференциальное уравнение в частных производных, тип, алгоритм.*

Розглянуто задачу про визначення тиску у гетерогенному тріщинувато-пористому шарі. Ми отримали вихідне нелінійне диференціальне рівняння у частинних похідних та встановили його тип. Ми ставимо математичну задачу та пропонуємо метод розв’язку на основі аналітичних перетворень і методу ітерацій. Також розроблено загальні алгоритми і низка прикладів.

Ключеві слова: *поле тиску, гетерогенний тріщинувато-пористий шар, диференціальне рівняння у частинних похідних, тип, алгоритм.*

We consider the problem on determination of pressure field in heterogeneous fractured porous stratum. We derived the initial nonlinear differential partial equation with the main divergent part and established its type. We formulate this problem and suggest the method for solution on the basis of analytical transformations and the iterations method. Also the general algorithm and a number of examples are given.

Key words: *pressure field, heterogeneous fractured porous strata, nonlinear differential partial equation, type, algorithm.*

На случай нелинейной фильтрации дано обобщение метода определения поля давлений в неоднородной пористой среде, изложенного в монографии [1] и публикациях [2]-[3]. В качестве исходного взят параметрический закон [4], объединяющий в одной записи сразу несколько законов нелинейной фильтрации, что представляется удобным при разработке численных алгоритмов решения задачи и при их программной реализации. Рассмотрены также случаи, когда закон фильтрации линейный, но проницаемость зависит от давления или градиента давления. Основное уравнение фильтрации тогда также является нелинейным по отношению к функции давления. Сформулированы соответствующие краевые задачи и предложены алгоритмы их решения. Рассмотрены примеры.

Движение жидкости в неоднородном горизонтальном пласте описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}[k\Phi(x,y,p,\quad)\frac{\partial p}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[k\Phi(x,y,p,\quad)\frac{\partial p}{\partial y}]=a\frac{\partial p}{\partial t}+f. \qquad (1)$$

Уравнение (1) можно назвать основным уравнением фильтрации в рассматриваемом случае, и в нем использованы следующие обозначения p – функция давления, k – проницаемость пласта, Φ – функция, зависящая от выбора модели фильтрационного течения, γ – начальный градиент давления, $f(x,y,t)$ – функция плотности отбора или закачки, x, y – декартовы координаты, t – время, a – некоторая заданная функция. Работу эксплуатационных и нагнетательных скважин будем моделировать логарифмическими особенностями функции давления, жидкость и пористую среду примем несжимаемыми. Пусть фильтрация в пласте подчиняется нелинейному параметрическому закону

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu}\frac{|\nabla p| - \lambda_1\gamma\mu_0}{\lambda_2\gamma + \sqrt{\lambda_3\gamma^2 + |\nabla p|^2}}\nabla p, \quad \gamma = \tau/\sqrt{k}, \tag{2}$$

где $\bar{v}$ – скорость фильтрации, μ – вязкость жидкости, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_0$ – параметры, при некоторых значениях которых из (2) в качестве частных случаев получается ряд известных законов фильтрации, τ – постоянная. Коэффициент проницаемости пласта будем вначале считать функцией координат $k = k(x,y)$.

Второе исходное соотношение, кроме (2), получается из уравнения неразрывности и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления [5]

$$\frac{\partial}{\partial x}(hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_y) + f = 0. \tag{3}$$

Толщину пласта h в дальнейшем положим равной единице $h = 1$. Из (2) и (3) выводится основное уравнение фильтрации в рассматриваемом случае в такой форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k}{\mu}\frac{|\nabla p| - \lambda_1\mu_0\tau}{\lambda_2\gamma + \sqrt{\lambda_3\gamma^2 + |\nabla p|^2}}\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k}{\mu}\frac{|\nabla p| - \lambda_1\mu_0\tau}{\lambda_2\gamma + \sqrt{\lambda_3\gamma^2 + |\nabla p|^2}}\frac{\partial p}{\partial y}\right] = f. \tag{4}$$

Соотношение (4) можно рассматривать или как уравнение для определения функции давления p или как уравнение для определения фильтрационного параметра коэффициента проницаемости k по соответствующим наборам исходных данных. Если изучается первый вариант задачи, то его можно преобразовать к стандартной для уравнений второго порядка форме

$$a_{11}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + H(x,y,p,\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y}) = f, \tag{5}$$

где введены обозначения

$$a_{11} = A + B(\frac{\partial p}{\partial x})^2, a_{12} = B\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}, a_{22} = A + B(\frac{\partial p}{\partial y})^2, \quad A = k\frac{|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1\mu_0\tau}{\lambda_2\tau + \sqrt{\lambda_3\tau^2 + k|\nabla p|^2}},$$

$$B = \frac{k^{3/2}}{|\nabla p|(\lambda_2\tau + \sqrt{\lambda_3\tau^2 + k|\nabla p|^2})} - \frac{k^2(|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1\mu_0\tau)}{\sqrt{\lambda_3\tau^2 + k|\nabla p|^2}\,(\lambda_2\tau + \sqrt{\lambda_3\tau^2 + k|\nabla p|^2})^2},$$

$$H=\frac{(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y})(1,5\left|\nabla p\right|\sqrt{k}-\text{ª}_1\text{«}_0\sim)}{\text{ª}_2\sim+\sqrt{\text{ª}_3\sim^2+k\left|\nabla p\right|^2}}-\frac{0,5(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y})k\left|\nabla p\right|^2(\left|\nabla p\right|\sqrt{k}-\text{ª}_1\text{«}_0\sim)}{\sqrt{\text{ª}_3\sim^2+k\left|\nabla p\right|^2}(\text{ª}_2\sim+\sqrt{\text{ª}_3\sim^2+k\left|\nabla p\right|^2})^2}.$$

Весьма существенным является вопрос о типе уравнения (5), поскольку от этого зависит последующая постановка задачи. Он определяется по знаку дискриминанта $d=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$. Подставляя сюда коэффициенты a_{11},a_{12},a_{22}, получим $d=-A^2-\left|\nabla p\right|^2 AB$. Далее исследуем знак d для определенных законов фильтрации.

1. Закон с начальным градиентом давления:

$\text{ª}_1=\text{«}_0=1,\text{ª}_2=\text{ª}_3=0,A=(\left|\nabla p\right|-\quad)/\left|\nabla p\right|>0,$ поскольку $\left|\nabla p\right|>\quad,$ – начальный градиент давления, $B=k\quad/\left|\nabla p\right|^2>0,$ следовательно, $d<0.$

2. Закон с гиперболической аппроксимацией:

$$\text{ª}_1=0,\text{ª}_2=\text{ª}_3=1,A=\left|\nabla p\right|/(\quad+\sqrt{\quad^2+\left|\nabla p\right|^2}>0,$$

$$B=k^{3/2}\sim(\sim+\sqrt{\sim+k\left|\nabla p\right|^2}\;/\left|\nabla p\right|\sqrt{\sim^2+k\left|\nabla p\right|^2}(\sim+\sqrt{\sim^2+k\left|\nabla p\right|^2})^2>0,$$

следовательно, $d<0.$

3. Нелинейный закон фильтрации с параметрами

$\text{ª}_1=0,\text{ª}_2=1,\text{ª}_3=0,$ тогда $A=k\left|\nabla p\right|/(\quad+\left|\nabla p\right|)>0,B=0,$ следовательно, $d<0.$

4. Полигональный закон:

$\text{ª}_1=1,\text{«}_0=1-\text{«}/\neg,\text{ª}_2=\text{ª}_3=0,A=[\left|\nabla p\right|-(1-\text{«}/\neg)\quad]/\left|\nabla p>0,\right|$ поскольку $\text{«}/\neg<1,$ ($\neg$ – повышенная вязкость жидкости при малых градиентах давления), $1-\text{«}/\neg<1,\left|\nabla p\right|>\quad,B=\text{«}_0\sim k/\left|\nabla p\right|^2>0,$ следовательно $d<0.$

5. Линейный закон фильтрации:

$\text{ª}_1=\text{ª}_2=\text{ª}_3=0,A=k>0,B=0,$ следовательно, $d<0.$

Таким образом, во всех пяти рассмотренных случаях знак дискриминанта d оказался отрицательным и уравнение (5) для этих случаев принадлежит к эллиптическому типу. Преобразованием независимых переменных оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\text{¶}^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\text{¦}^2}+\text{¡}(\text{¶},\text{¦},p,\frac{\partial p}{\partial\text{¶}},\frac{\partial p}{\partial\text{¦}})=0$$

или, если воспользоваться более привычными обозначениями, к форме

$$\Delta p+H(x,y,p,\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y})=0. \qquad (6)$$

Найдем фундаментальное решение задачи определения поля давлений в круговом пласте единичного радиуса с одной эксцентричной скважиной. Задача формулируется следующим образом: В области D с границей ∂D найти решение дифференциального уравнения (6) при выполнении условий:

1. $p(r,\theta) = p_k(\theta)$ при $r = 1$ (краевое условие),
2. в центре скважины A_i функция p имеет логарифмическую особенность, причем

$$\lim \oint_{\Gamma_i} \frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n} ds = Q_i \text{ при } \Gamma_i \to 0.$$

Здесь Q_i – дебит скважины, $\kappa = kh/\mu$ – гидропроводность пласта, Γ_i – охватывающий скважину контур, n – внутренняя нормаль к нему.

При решении этой задачи воспользуемся идеей И. Н. Векуа [6] о переходе в уравнении (6) к комплексным переменным $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$ и о преобразовании его в формально гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \overline{z}} + 0,25H(z,\overline{z},p,\frac{\partial p}{\partial z},\frac{\partial p}{\partial \overline{z}}) = 0. \qquad (7)$$

От уравнения (7) путем интегрирования совершается переход к эквивалентному ему интегро-дифференциальному уравнению

$$p(z,\overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}} H(\zeta,\overline{\zeta},p,\frac{\partial p}{\partial \zeta},\frac{\partial p}{\partial \overline{\zeta}})d\zeta\, d\overline{\zeta}, \qquad (8)$$

где φ и ψ – произвольные аналитические функции своих аргументов, $z_i = x_i + iy_i$, $\overline{z}_i = x_i - iy_i, x_i, y_i$ – координаты центра скважины.

Интегро-дифференциальное уравнение (8) решается методом последовательных приближений

$$p_0(z,\overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}),$$

$$p_1(z,\overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}} H(\zeta,\overline{\zeta},p_0,\frac{\partial p_0}{\partial \zeta},\frac{\partial p_0}{\partial \overline{\zeta}})d\zeta\, d\overline{\zeta},$$

$$p_2(z,\overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}} H(\zeta,\overline{\zeta},p_1,\frac{\partial p_1}{\partial \zeta},\frac{\partial p_1}{\partial \overline{\zeta}})d\zeta\, d\overline{\zeta},$$

$$p_n(z,\overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}} H(\zeta,\overline{\zeta},p_{n-1},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \overline{\zeta}})d\zeta\, d\overline{\zeta}.$$

Поскольку исходное уравнение (6) действительное, то функции $\varphi(z), \psi(\overline{z})$ должны быть попарно сопряженными и n – е приближение p_n запишется в виде

$$p_n(x,y) = \mathrm{Re}[\varphi(z) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}} H(\zeta,\overline{\zeta},p_{n-1},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \overline{\zeta}})d\zeta\, d\overline{\zeta}]. \qquad (9)$$

Краевое условие для функции p_n из (9) приводит к равенству

$$\mathrm{Re}[\varphi(z) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}} H(\zeta,\overline{\zeta},p_{n-1},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \overline{\zeta}})d\zeta\, d\overline{\zeta}] = p_k(\theta). \qquad (10)$$

Правую часть этого равенства представим в виде равномерно сходящегося ряда Фурье, а произвольную аналитическую функцию $\varphi(z)$ возьмем в виде суммы логарифмической особенности и регулярной части

$$\varphi(z) = B_i \ln(z - z_i) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad (11)$$

где комплексные коэффициенты c_n подлежат определению. Постоянная B_i

выражается через дебит скважины по формуле $B_i = Q_i \,/\, 2®±_i ,±_i = ±(x_i , y_i)$.

Равенства (10) приводят в итоге к алгебраической системе уравнений для определения действительной и мнимой частей коэффициентов c_n. Ограничиваясь M первыми коэффициентами, эту систему можно решить на ПЭВМ, используя один из программных продуктов: Mathematica, Maple, Gauss и т.д. В данном случае это делалось с помощью пакета Mathcad 7.0 Professional. Для решения нелинейных систем уравнений в нем применяется итерационный метод Левенберга-Маркардта или его модификации. Этот метод заимствован в Mathcad-е из свободно распространяемого пакета алгоритмов MINPACK, разработанного в Аргонской национальной лаборатории (США). Соответствующая публикация помечена 1980г. Метод Левенберга-Маркардта является квазиньютоновским. На каждом шаге вычисляются первые частные производные от невязок по переменным, относительно которых ищется решение, и составляется соответствующая матрица Якоби. Имеется ряд существенных ограничений. Можно использовать также алгоритмы из других пакетов прикладных программ. Но везде это делается не очень просто. Найденные численно коэффициенты c_n подставляются в формулу (9), которая и будет представлять в итоге решение задачи.

В случае, когда закон фильтрации линейный, но $k = k(x, y, p)$, основное уравнение фильтрации (1) имеет вид

$$\Delta p + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} / k + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} / k + \frac{\partial k}{\partial p}[(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + (\frac{\partial p}{\partial y})^2] / k = 0. \qquad (12)$$

Таким образом, сразу получается уравнение в форме (6), где

$$H = \frac{\partial \ln k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \ln k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \ln k}{\partial p}[(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + (\frac{\partial p}{\partial y})^2]. \qquad (13)$$

Следовательно, все последующие выкладки остаются в силе.

В случае же линейного закона фильтрации и зависимости коэффициента проницаемости от координат и градиента давления $k = k(x, y, |\nabla p|)$ основное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}[1 + \frac{\partial \ln k}{\partial |\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial x})^2 \frac{1}{|\nabla p|}] + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}[1 + \frac{\partial \ln k}{\partial |\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial y})^2 \frac{1}{|\nabla p|}] + 2\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\frac{\partial \ln k}{\partial |\nabla p|}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{1}{|\nabla p|} +$$

$$+ \frac{\partial \ln k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \ln k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \qquad (14)$$

Обозначим

$$a_{11} = 1 + \frac{\partial \ln k}{\partial |\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial x})^2 \frac{1}{|\nabla p|}, a_{12} = \frac{\partial \ln k}{\partial |\nabla p|}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{1}{|\nabla p|}, a_{22} = 1 + \frac{\partial \ln k}{\partial |\nabla p|}(\frac{\partial p}{\partial y})^2 \frac{1}{|\nabla p|},$$

тогда уравнение (14) запишется в виде

$$a_{11}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial \ln k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \ln k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \qquad (15)$$

Исследуем тип этого уравнения, для чего установим знак дискриминанта

$$d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 - k\left|\nabla p\right| / \frac{\partial k}{\partial \left|\nabla p\right|}.$$

Из физических соображений следует, что $k > 0$ (проницаемость – положительная величина), $\partial k / \partial \left|\nabla p\right| > 0$ (проницаемость с ростом градиента давления возрастает, например, в пласте начинают подключаться к работе новые пропластки). Тогда $d < 0$ и, следовательно, уравнение (15) принадлежит к эллиптическому типу. С помощью преобразования переменных оно может быть записано в канонической форме (6), далее для решения используется описанный подход. Остановимся еще на случае, когда проницаемость зависит только от координат. Уравнение (1) тогда записывается в форме

$$\Delta p + \frac{\partial \ln k}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \ln k}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

а интегро-дифференциальное уравнение (8) имеет вид

$$p(z,\bar{z}) = \text{¨}(z) + \cdot(\bar{z}) - 0,5\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left[\frac{\partial \ln k}{\partial \text{¸}}\frac{\partial p}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial \ln k}{\partial \bar{\text{¸}}}\frac{\partial p}{\partial \bar{\text{¸}}}\right]d\text{¸}\, d\bar{\text{¸}}\,. \tag{17}$$

В этом случае можно доказать сходимость последовательных приближений к точному решению задачи. Это делается следующим образом. В процессе последовательных приближений функция p_n записывается так

$$p_n(z,\bar{z}) = \text{¨}(z) + \cdot(\bar{z}) - 0,25\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} H(\text{¸}, \bar{\text{¸}}, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \text{¸}}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{\text{¸}}})d\text{¸}\, d\bar{\text{¸}}, \tag{18}$$

а производные $\partial p_n / \partial z, \partial p_n / \partial \bar{z}$ имеют вид

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{\partial \text{¨}(z)}{\partial z} + \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}[a(z,\bar{\text{¸}})\frac{\partial p_{n-1}}{\partial z} + b(z,\bar{\text{¸}})\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{\text{¸}}}]d\bar{\text{¸}}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \cdot(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \int_{z_i}^{z}[a(\text{¸}, z)\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \text{¸}} + b(\text{¸}, \bar{z})\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{z}}]d\text{¸}\,. \tag{20}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательностей $(p_n, \partial p_n / \partial z, \partial p_n / \partial \bar{z})$ вычислим разности

$$\mu_n = p_{n+1} - p_n = \int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}[a(\text{¸},\bar{\text{¸}})\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \text{¸}} + b(\text{¸},\bar{\text{¸}})\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \bar{\text{¸}}}]d\text{¸}\, d\bar{\text{¸}},$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial z} = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial z} - \frac{\partial p_n}{\partial z} = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}[a(z,\bar{\text{¸}})\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial z} + b(z,\bar{\text{¸}})\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \bar{\text{¸}}}]d\bar{\text{¸}},$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial p_n}{\partial \bar{z}} = \int_{z_i}^{z}[a(\text{¸},\bar{z})\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \text{¸}} + b(\text{¸},\bar{z})\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \bar{z}}]d\text{¸}\,, (n = 1,2,...).$$

Коэффициенты a и b – ограниченные по модулю величины, верхнюю границу которых обозначим C_1. Функцию p_0, ее производные $\partial p_0 / \partial z, \partial p_0 / \partial \bar{z}$ также можно считать ограниченными величинами с верхней границей C_2 в области D, за исключением малой окрестности скважин. Получим оценки

$$\left|\mu_0\right| < 2C_1C_2\frac{(\left|z - z_i\right| + \left|\bar{z} - \bar{z}_i\right|)^2}{2!}, \left|\frac{\partial \mu_0}{\partial z}\right| \text{è} \left|\frac{\partial \mu_0}{\partial \bar{z}}\right| < 2C_1C_2(\left|z - z_i\right| + \left|\bar{z} - \bar{z}_i\right|).$$

Далее

$$|\mu_1| < \frac{(2C_1)^2 C_2}{3!}(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^2, \left|\frac{\partial \mu_1}{\partial z}\right| \text{è} \left|\frac{\partial \mu_1}{\partial \overline{z}}\right| < \frac{(2C_1)^2 C_2}{2!}(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^2.$$

Используем метод полной математической индукции. Предположим, что имеют место оценки

$$|\mu_n| < \frac{C_2}{2C_1}(2C_1)^{n+2}\frac{(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left|\frac{\partial \mu_1}{\partial z}\right| \text{è} \left|\frac{\partial \mu_1}{\partial \overline{z}}\right| < \frac{C_2}{2C_1}(2C_1)^{n+2}\frac{(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из формулы для μ_{n+1} получим

$$|\mu_{n+1}| < C_1\left|\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}}(|\text{¸} - z_i| + |\text{¸} - \overline{z}_i|)^{n+1} d\text{¸}\, d\overline{\text{¸}}\right| <$$

$$< 2C_1\frac{C_2}{2C_1}(2C_1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!}\left|\int_{z_i}^{z}\int_{\overline{z}_i}^{\overline{z}}(|\text{¸} - z_i| + |\text{¸} - \overline{z}_i|)^{n+1} d\text{¸}\, d\overline{\text{¸}}\right| =$$

$$= \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+2)!}\left|\int_{z_i}^{z}[(|\text{¸} - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+2} - |\text{¸} - z_i|^{n+2}] d\text{¸}\right| =$$

$$= \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+3)!}[(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+3} - |\overline{z} - \overline{z}_i|^{n+3} - |z - z_i|] <$$

$$< \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+3)!}(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+3}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left|\frac{\partial \mu_{n+1}}{\partial z}\right| < \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+2)!}(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+2},$$

$$\left|\frac{\partial \mu_{n+1}}{\partial \overline{z}}\right| < \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+2)!}(|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i|)^{n+2}.$$

Учтем также, что в области D $|z - z_i| + |\overline{z} - \overline{z}_i| < L,$ где $L -$ некоторое число. Также нетрудно заметить, что в правых частях последних трех неравенств фигурируют общие члены разложения $\exp(2C_1 L)$ (с точностью до постоянных множителей). Это говорит о том, что последовательности $\{p_n\}, \{\partial p_n / \partial z\}$, $\{\partial p_n / \partial \overline{z}\}$ сходятся равномерно к функциям $p_n, \partial p_n / \partial z, \partial p_n / \partial \overline{z}$. Переходя к пределу в формулах (18)-(20), приходим к исходному интегро-дифференциальному уравнению и производным от него по z и $\overline{z}$. Все это говорит о сходимости процесса последовательных приближений к точному решению задачи.

По описанному алгоритму проводились численные расчеты примеров. Представляет интерес рассмотреть прежде всего случаи, когда существует точное аналитическое решение задачи и можно оценить погрешность приближенного. Они имеются в линейном случае, например, при экспоненциальном, линейном и квадратичном законах изменения коэффициента проницаемости. При законе $k = k_0 \exp(\sim x + \quad y), (k_0, \sim, \quad = const)$ целесообразно сначала повернуть систему координат на угол $¥ = arctg \quad / \sim$ и представить проницаемость в виде $k = k_0 \exp(mx)$, $(m = \sqrt{\sim^2 + \quad ^2})$. Интегро-дифференциальное уравнение (17) запишется тогда в виде

$$p(z,\bar{z}) = \ddot{\ }(z) + \cdot\ (\bar{z}) - ª \int_{z_i}^{z} \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} \left(\frac{\partial p}{\partial ¸} + \frac{\partial p}{\partial \bar{¸}}\right) d¸\, d\bar{¸},\ ª = m/4. \qquad (21)$$

Здесь мы не будем приводить вид первого и второго приближений для функции давления ввиду их громоздкости. Расчеты показали, что при линейном законе изменения коэффициента проницаемости вклад второго приближения весьма мал и можно ограничиться первым приближением, которое дает по существу точное решение задачи.

Проводились также расчеты чисто технических примеров. В этих расчетах использовалась соответствующая техническая документация карты изобар пласта, карты изолиний проницаемости и толщины пласта, сведения о дебитах скважин, их положении, вязкости нефти и т.д. Для одного из участков приняты следующие значения исходных параметров: $« = 2,3$ мПа*с, $h = 11$м, $\bar{p}_k = 13,58$ мПа (среднее давление на контуре питания), $k_0 = 0,46*10^{-12}$ м^2, $Q = 1866$ см^3/с, $r_1 = 0,24, \bar{\ }_1 = 3® / 2$ (полярные координаты скважины), $D = 650$ м (диаметр выделенной области). Для других участков исходные данные отличались не очень сильно, только скважин на них расположено больше. Сравнение значений давления, вычисленных в узлах сеточной области, с картой изобар показало их достаточную близость. Расхождение в данных составляло сотые доли мПа, что дает относительную погрешность менее одного процента. Это удовлетворяет практическим требованиям точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев Г.В., Тумашев Г.Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. – Казань: Изд-во Кзанск. ун-та, 1972. – 196с.
2. Голубев Г.В. К задаче определения поля давлений в неоднородной пористой среде // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. – 1966. – № 4. – с. 152-154.
3. Голубев Г.В. Об одном методе определения поля давлений в неоднородной пористой среде // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. – 1967. – № 3. – с. 186-182.
4. Мухидинов Н., Мукимов Н., Садыков М.К. Численное моделирование нелинейной фильтрации. – Ташкент: «Фан», 1989. – 120с.
5. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: «Высшее образование», 1993. – 416с.
6. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М: «Наука», 1988. – 509с.

Надійшла – 13.03.2012.