УДК 519.6

Відновлення розривної функції двох змінних за допомогою розривного інтерполяційного сплайна на трапецевидному елементі

О. М. Литвин, Ю. І. Першина
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

В статті розглядається метод відновлення розривної функції двох змінних за допомогою розривних лінійних сплайнів інтерполяційного типу. Область визначення розривної функції складається з прямокутних трикутників та прямокутних трапецій. В роботі також пропонується загальний вигляд похибки відновлення та її оцінка. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

Ключові слова: *розривна функція, комп'ютерна томографія, розривна інтерполяція, оцінка похибки.*

В статье предлагается метод восстановления разрывной функции двух переменных с помощью разрывных линейных сплайнов интерполяционного типа. Область определения рассматриваемой разрывной функции состоит из прямоугольных треугольников и прямоугольных трапеций. В работе также предлагается общий вид погрешности восстановления и ее оценка. Причем, построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени на заданной сетке узлов.

Ключевые слова: *разрывная функция, компьютерная томография, разрывная интерполяция, оценка погрешности.*

In article the method of restoration of explosive two variables function by means of explosive linear splines of interpolation type is offered. The range of definition of considered explosive function consists of rectangular triangles and rectangular trapezes. In work the general view of an error of restoration and its estimation also is offered. And, the constructed explosive splines include, as private.

Key words: *explosive function, computer tomography, explosive interpolation, error estimation*.

1. Вступ та актуальність

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами від однієї та декількох змінних з достатньою повнотою описана в багатьох роботах вітчизняних та зарубіжних дослідників (див. наприклад, [1-4]). На практиці використання кусково-аналітичних наближень, заданих різними формулами (поліномами відповідного степеня) в точках кожного елемента розбиття області наближення приводить інколи до знаходження великої кількості невідомих параметрів. Це привело до появи неконфорних елементів в методі скінченних елементів [5].

Аналогічна задача досліджувалась в працях Попова Б.А. [6] та інших авторів, де розглядалися наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій за допомогою розривних сплайнів в чебишовській нормі (рівномірне наближення).

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії

таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких як частинний випадок, включає множину неперервних та неперервно-диференційовних до заданого порядку сплайнів, що можуть мати розриви першого роду, або їх частинні похідні в заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин тощо); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Наприклад, в роботі [6] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структур тіла.

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

В статті [7] авторами були побудовані розривні лінійні інтерполяційні сплайни для наближення функцій однієї змінної, що може мати розриви першого роду. В роботі [8] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [9] – інтерлінаційними розривними сплайнами. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [10].

В даній роботі пропонується побудова розривного інтерполяційного сплайну для наближення розривної функцій двох змінних, область визначення якої розбивається на систему прямокутних трапецій та прямокутних трикутників, визначається загальний вигляд похибки такого наближення та її оцінка.

2. Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$. Будемо вважати, що область D розбивається прямими $x_0=0<x_1<x_2<...<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<...<y_n=1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається похилою лінією на прямокутну трапецію та прямокутний трикутник. Трапеції та трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою роботи є побудова та дослідження розривного лінійного сплайн-інтерполянта для наближення розривної функції з використанням трапецевидних елементів.

3. Побудова наближуючого розривного сплайн-інтерполянта

Нехай задана прямокутна трапеція (рис. 1)

$$\mathrm{TP}_{ij} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}(x) \right\};$$

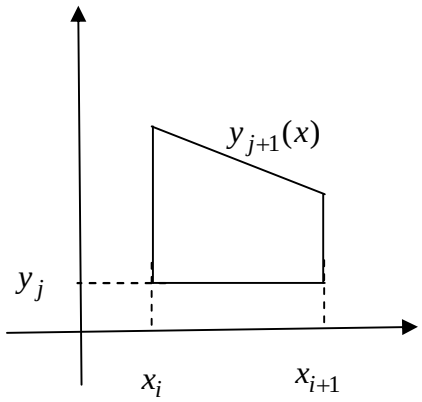


Рис. 1. Зображення одного з можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

Вважаємо, що на кожній із сторін заданої трапеції функція $f(x,y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває наступних значень

$$C_1 = f(x_i + 0, y_j + 0),$$
$$C_2 = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$
$$C_3 = f(x_i + 0, y_{j+1}(x_i) - 0),$$
$$C_4 = f(x_{i+1} - 0, y_{j+1}(x_{i+1}) - 0).$$

Визначення: Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном в області $\mathrm{TP}_{ij} \subset D$, наступну функцію

$$S(x,y) = s_{ij}(x,y) = C_1 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} + C_2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} +$$
$$+ C_3 \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x_i) - y_j} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + C_4 \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \qquad (1)$$

Теорема 1. Функція $S(x,y) = s_{ij}(x,y), (x,y) \in \mathrm{TP}_{ij} \subset D$ задовольняє інтерполяційним властивостям.

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений вище розривний сплайн.

Теорема 2. Якщо $f(x,y)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i, y_j) та $f(x,y) \in C^{(r,r)}(\mathrm{TP}_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $r=1,2$, то залишок наближення функції $f(x,y)$ сплайном вигляду (1) на кожній трапеції буде мати вигляд

$$RS(x,y) = R_1R_2 f(x,y) + \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} R_1 f(x_i,y) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} R_1 f(x_{i+1},y) +$$

$$+ \frac{y-y_{j+1}(x)}{y_j-y_{j+1}(x)} R_2 f(x,y_j) + \frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j} R_2 f(x,y_{j+1}(x)), \qquad (2)$$

де

$$R_1 f(x,y) = \int_{y_j}^{y_{j+1}(x)} f^{(0,r)}(x,¦)G1(x,y,¦)d¦, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$R_2 f(x,y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(¶,y)G2(x,¶)d¶, \; y \in [y_j, y_{j+1}(x)],$$

$$G1(x,y,¦) = \begin{cases} \dfrac{y-y_{j+1}(x)}{y_j-y_{j+1}(x)} \dfrac{(y_j-¦)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \le ¶ \le y \le y_{j+1}(x) \\ -\dfrac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j} \dfrac{(y_{j+1}(x)-¦)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \le y \le ¶ \le y_{j+1}(x) \end{cases}$$

$$G2(x,¶) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \dfrac{(x_i-¶)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \le ¶ \le x \le x_{i+1} \\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \dfrac{(x_{i+1}-¶)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \le x \le ¶ \le x_{i+1}. \end{cases}$$

Доведення. Запишемо оператор інтерлінації на лініях $x=x_i$, $x=x_{i+1}$ (див. [9])

$$S_1 f(x,y) = f(x_i,y)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} + f(x_{i+1},y)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

та на лініях $y=y_j$, $y=y_{j+1}(x)$:

$$S_2 f(x,y) = f(x,y_j)\frac{y-y_{j+1}(x)}{y_j-y_{j+1}(x)} + f(x,y_{j+1}(x))\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}.$$

Замінимо в операторах $S_1 f(x,y)$ та $S_2 f(x,y)$ сліди $f(x_i,y)$, $f(x_{i+1},y)$, $f(x,y_j)$, $f(x,y_{j+1}(x))$ операторами інтерполяції:

$$\tilde{S}_1 f(x,y) = \left(f(x_i,y_j)\frac{y-y_{j+1}(x_i)}{y_j-y_{j+1}(x_i)} + f(x_i,y_{j+1}(x_i)\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x_i)-y_j} \right)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} +$$

$$+\left(f(x_{i+1},y_j)\frac{y-y_{j+1}(x_{i+1})}{y_j-y_{j+1}(x_{i+1})}+f(x_{i+1},y_{j+1}(x_{i+1})\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x_{i+1})-y_j}\right)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i};$$

$$\tilde{S}_2 f(x,y)=\left(f(x_i,y_j)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},y_j)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{y-y_{j+1}(x)}{y_j-y_{j+1}(x)}+$$

$$+\left(f(x_i,y_{j+1}(x_i))\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},y_{j+1}(x_{i+1}))\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}.$$

Легко побачити, що $S(x,y)=S_2S_1f(x,y)=\left(\tilde{S}_1+\tilde{S}_2-S_1S_2\right)f(x,y)$.

Тепер розглянемо похибку оператора інтерполяції $S(x,y)$

$$RS(x,y)=\left(I-S\right)f(x,y)=\left(I-\tilde{S}_1-\tilde{S}_2+S_1S_2\right)f(x,y)=$$

$$=\left(I-\tilde{S}_1-\tilde{S}_2+S_1S_2\right)f(x,y)+\left(S_1+S_2-S_1S_2\right)f(x,y)- \qquad (3)$$

$$-\left(S_1+S_2-S_1S_2\right)f(x,y)=R_1R_2f(x,y)+\left(S_1-\tilde{S}_1\right)f(x,y)+(S_2-\tilde{S}_2)f(x,y),$$

де

$$R_1f(x,y)=\int_{y_j}^{y_{j+1}(x)} f^{(0,r)}(x,\eta)G1(x,y,\eta)d\eta,\quad x\in[x_i,x_{i+1}],$$

$$R_2f(x,y)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi,y)G2(x,\xi)d\xi,\ y\in[y_j,y_{j+1}(x)],$$

$$G1(x,y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j+1}(x)}{y_j-y_{j+1}(x)}\dfrac{(y_j-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j\le\xi\le y\le y_{j+1}(x)\\ -\dfrac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}\dfrac{(y_{j+1}(x)-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j\le y\le\xi\le y_{j+1}(x)\end{cases}$$

$$G2(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\dfrac{(x_i-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le\xi\le x\le x_{i+1}\\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le x\le\xi\le x_{i+1}\end{cases}$$

$$(S_1-\tilde{S}_1)f(x,y)=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\left(f(x_i,y)-f(x_i,y_j)\frac{y-y_{j+1}(x_i)}{y_j-y_{j+1}(x_i)}+f(x_i,y_{j+1}(x_i))\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x_i)-y_j}\right)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left(f(x_{i+1},y)-f(x_{i+1},y_j)\frac{y-y_{j+1}(x_{i+1})}{y_j-y_{j+1}(x_{i+1})}+\right.$$

$$+ f(x_{i+1}, y_{j+1}(x_{i+1}) \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j} \Bigg) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y);$$

$$\left(S_2 - \tilde{S}_2\right) f(x, y) =$$

$$= \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} \Bigg(f(x, y_j) - f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}, y_j) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \Bigg) +$$

$$+ \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} \Bigg(f(x, y_{j+1}(x)) - f(x_i, y_{j+1}(x_{i+1})) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} +$$

$$+ f(x_{i+1}, y_{j+1}(x_{i+1})) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \Bigg) =$$

$$= \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} R_2 f(x, y_{j+1}(x)).$$

Після підстановки цих виразів в формулу (3), отримаємо загальний вигляд похибки (2) наближення розривної функції розривним лінійним інтерполяційним сплайном.

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Оцінка похибки наближення функції $f(x, y)$ побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$ на кожній трапеції має вигляд

$$\left| f(x, y) - S(x, y) \right| \le$$

$$\le \left\| f(x, y) \right\|_{L_\infty [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{64} \times$$

$$\times \max \left\{ \left(y_j - y_{j+1}(x_i) \right)^2, \left(y_j - y_{j+1}(x_{i+1}) \right)^2 \right\} +$$

$$+ \max \left\{ \left\| f^{(0,2)}(x_i, y) \right\|_{L_\infty [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{\left(y_{j+1}(x_i) - y_j \right)^2}{8}, \right. \qquad (4)$$

$$\left. \left\| f^{(0,2)}(x_{i+1}, y) \right\|_{L_\infty [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{\left(y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j \right)^2}{8} \right\} +$$

$$+ \max \left\{ \left\| f^{(2,0)}(x, y_j) \right\|_{L_\infty [x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8}, \right.$$

$$\left\| f^{(2,0)}(x, y_{j+1}(x)) \right\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8} \Bigg\}.$$

Доведення.

$$|f(x,y) - S(x,y)| = \Bigg| R_1 R_2 f(x,y) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) +$$

$$+ \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} R_2 f(x, y_{j+1}(x)) \Bigg| \le$$

$$\le |R_1 R_2 f(x,y)| + \left| \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) \right| +$$

$$+ \left| \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} R_2 f(x, y_{j+1}(x)) \right|.$$

Користуючись оцінками з роботи [5], отримаємо

1) $|R_1 R_2 f(x,y)| \le \| f(x,y) \|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{64} \times$

$\times \max \left\{ (y_j - y_{j+1}(x_i))^2, (y_j - y_{j+1}(x_{i+1}))^2 \right\};$

2) $\left| \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) \right| \le$

$$\le \max \Bigg\{ \left\| f^{(0,2)}(x_i, y) \right\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_i) - y_j)^2}{8},$$

$$\left\| f^{(0,2)}(x_{i+1}, y) \right\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j)^2}{8} \Bigg\};$$

3) $\left| \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} R_2 f(x, y_{j+1}(x)) \right| \le$

$$\le \max \Bigg\{ \left\| f^{(2,0)}(x, y_j) \right\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8},$$

$$\left\| f^{(2,0)}(x, y_{j+1}(x)) \right\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8} \Bigg\}.$$

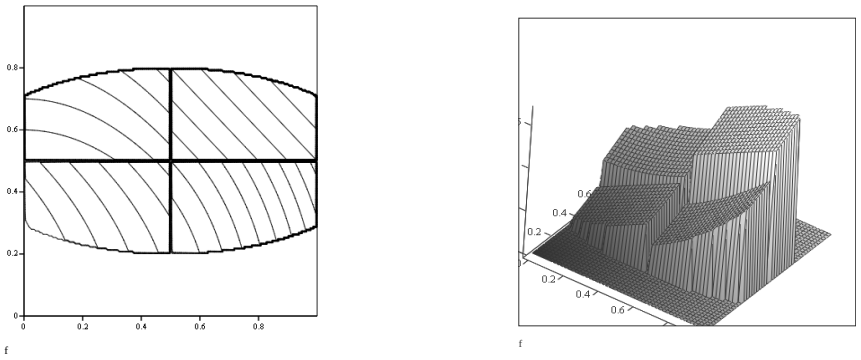
Теорема 3 доведена.

Зауваження. Для функції $f(x,y)=y^2+\frac{xy}{2}-y$, яка визначена в трапецевидному елементі $\mathrm{TP}_{ij}=\left\{0<x<1, 0<y<\frac{2-x}{2}\right\}$, похибка наближення (4) є точною.

4. Приклади

Приклад 1. Нехай функція $f(x,y)$ задана в одиничному квадраті $[0,1]^2$ таким чином (рис. 2):

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0.5<x<1,\ 0.5<y<0.5+\sqrt{0.09\left[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]} \\ x^2+y, & 0<x<0.5,\ 0.5<y<0.5+\sqrt{0.09\left[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]} \\ x+y^2, & 0<x<0.5,\ 0.5-\sqrt{0.09\left[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}<y<0.5 \\ x^2+y^2, & 0.5<x<1,\ 0.5-\sqrt{0.09\left[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}<y<0.5 \end{cases}$$



а) б)

Рис. 2. Графічне зображення: а) області визначення функції $f(x,y)$; б) функції $f(x,y)$

Тобто на лінії фігури функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії:

$$x_1=0, x_2=0.5, x_3=1,$$

$$y_1 = 0.5 - \sqrt{0.09\left[1 - \frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]},$$

$$y_2 = 0.5,$$

$$y_3 = 0.5 + \sqrt{0.09\left[1 - \frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}.$$

Вони розбивають область визначення функції $f(x,y)$ на вісім трапецевидних елементів з однією криволінійною стороною в кожному елементі.

Побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції TP_{ij} задається формулою (1).

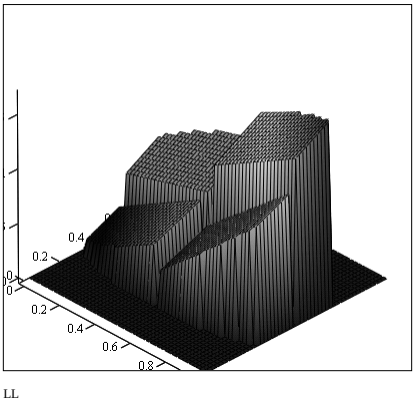


Рис. 3. Графічний вигляд розривного сплайн-інтерполянта для функції $f(x,y)$

Оцінка похибки наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованою розривною конструкцією $S(x,y)$

$$\max\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \approx 0.025.$$

Приклад 2. Нехай функція $f(x,y)$ задана в одиничному квадраті $[0,1]^2$ таким чином (рис. 4):

$$f(x,y) = \begin{cases} 3, & \dfrac{(x-0.5)^2}{0.16} + \dfrac{(y-0.5)^2}{0.04} \le 1 \\ 0, & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тобто на лінії еліпса функція має розриви першого роду. Нехай задані вузли: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.9$, $x_5 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.5$, $y_4 = 0.7$, $y_5 = 1$. Вони розбивають одиничний квадрат на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються.

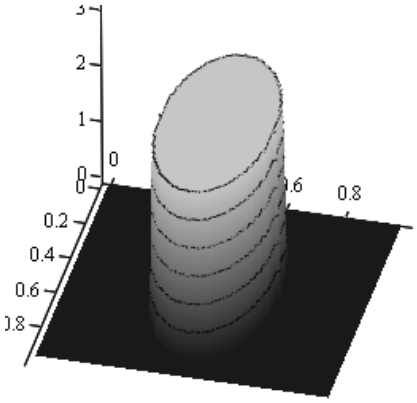


Рис. 4. Графічний вигляд наближуваної функції

Для побудови розривного наближуючого сплайна на цих вузлах скористаємося результатами роботи [10], в якій авторами був побудований та досліджений оператор розривної поліноміальної інтерполяції для наближення розривний функцій двох змінних, що має триангульовану область визначення. Зобразимо отриманий розривний сплайн та наближувану функцію на рис. 5.

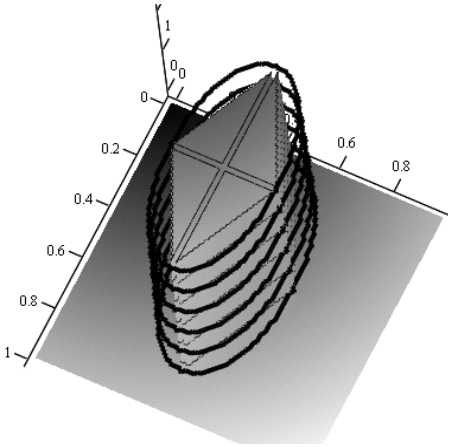


Рис. 5. Зображення наближуваної функції $f(x, y)$ *(чорні контури) та наближуючого сплайна, побудованого за формулою (2) (сірий колір)*

Тепер розіб'ємо одиничний квадрат на прямокутні трапеції та прямокутні трикутники та побудуємо на цій сітці вузлів розривний поліноміальний сплайн вигляду (1) та зобразимо цей сплайн та наближуючу функцію $f(x, y)$ на рис. 6.

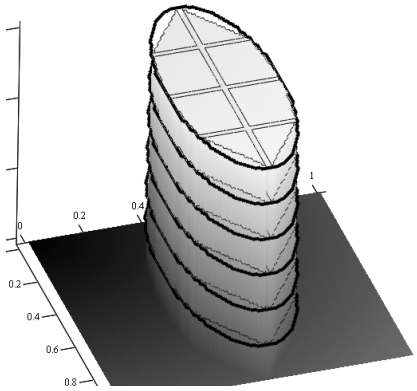


Рис. 6. Зображення наближуваної функції $f(x, y)$ *(чорні контури) та наближуючого сплайна, побудованого за формулою (1) (сірий колір)*

Як бачимо, наближений сплайн, побудований на трапеціях та трикутниках наближує краще, ніж тільки на трикутниках.

5. Висновки

В роботі пропонується метод наближення розривної функції двох змінних розривним інтерполяційним сплайном на трапецевидному елементі, загальний інтегральний вигляд похибки наближення. Наводиться оцінка похибки та показується, що вона є точною. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів. В статті також пропонується застосування цього методу до відновлення розривної функції двох змінних.

В подальшому авторами планується застосувати розроблені методи до відновлення фантома Шепа-Логана в комп'ютерній томографії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1976.
4. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – Vol.41. – P. 29-45.
5. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
6. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривної функції однієї змінної, використовуючи метод мінімакса // Обчислювальні методи і системи

перетворення інформації: Праці науково-технічної конференції (7-8 жовтня 2010р.). – Львів. – 2010. – С.52-55.
7. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип.3. – С. 122-131.
8. О. М. Литвин, Ю. І. Першина. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63-72.
9. О. Н. Литвин, Ю. И. Першина. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. – С.96-105.
10. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних з розривами на лініях тріангуляції двовимірної області за допомогою операторів сплайн-інтерлінації. – Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції 17-19 березня 2011р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О.О. – Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011р. – С.178-181.

Надійшла – 08.11.2011.