УДК 517.948

Об одном классе линейных дискретных систем

Е. А. Когут, З. Ф. Назыров, А. А. Янцевич
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье изучаются дискретные открытые системы в гильбертовых пространствах, для которых операторы, осуществляющие связь между пространством входа системы, внутреннего состояния и выхода системы, связаны некоторыми соотношениями, называемыми узловыми. Рассмотрена процедура сцепления открытых систем и соотношения между передаточными функциями сцепления и передаточными функциями сцепляемых систем. Изучены свойства характеристических оператор-функций таких систем.

Ключевые слова: *открытая дискретная система, операторный узел, характеристическая оператор-функция, сцепление, расширение системы.*

В статті вивчаються дискретні відкриті системи в гільбертових просторах, для яких оператори, що здійснюють зв'язок між простором входу системи, внутрішнього стану і виходу системи, зв'язані деякими співвідношеннями, що називаються вузловими. Розглянута процедура зчеплення відкритих систем і співвідношення між передаточними функціями зчеплення і передаточними функціями систем, що зчіпляються. Вивчені властивості характеристичних оператор-функцій таких систем.

Ключові слова: *відкрита дискретна система, операторний вузол, характеристична оператор-функція, зчеплення, розширення системи.*

Discrete open systems in Hilbert spaces are studied in the paper. Operators realizing connection between spaces of the system input, inner state and system output are linked by some relations, which are said to be colligation relations. Procedure of open systems coupling and relations between transfer functions of coupling and transfer functions of systems, which are being coupled, are considered. Properties of characteristic operator-functions of such systems are studied.

Key words: *open discrete system, operator colligation, characteristic operator-function, coupling, system expansion.*

Пусть даны H, E, F - три сепарабельных гильбертовых пространства, которые будем соответственно называть внутренним пространством, пространством входа и выхода открытой дискретной системы, если задана пара отображений $x_n = Ru_n$; $v_n = Wu_n$, где $n = 0$, 1, 2, …. В пространствах E и F при помощи сигнатурных операторов $J_E \in [E,E]$ и $J_F \in [F,F]$ заданы индефинитные метрики ($J = J^*$, $J^2 = I$, где I - единичный оператор),

$$\{u_1,u_2\}_E = (J_E u_1,u_2),\ \text{где } u_1,\ u_2 \in E;$$

$$\{v_1,v_2\}_F = (J_F v_1,v_2),\ \text{где } v_1,\ v_2 \in F.$$

Оператор, сопряженный к оператору Φ по отношению к индефинитной метрике, будем обозначать Φ^+, в отличие от обычного сопряжения, которое обозначается Φ^*. Пусть $\Phi \in [E,H]$ - линейный ограниченный оператор, отображающий пространство E в H ($x \in H$, $u \in E$);

$$(\Phi u,x)_H = (u,\Phi^* x)_E = (Ju,J\Phi^* x)_E = \{u,\Phi^+ x\}_E,\ \text{т. е. } \Phi^+ = J_E\Phi^*.$$

Рассмотрим открытууюдискретную систему в виде

$$\begin{cases} Tx_{n+1} = x_n + \Phi u_n; \\ v_n = \psi x_{n+1} + Ku_n; \end{cases} \tag{1}$$

$$x_n\big|_{n=0} = x_0 .$$

Эту систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_n = Tx_{n+1} - \Phi u_n; \\ v_n = \psi x_{n+1} + Ku_n; \end{cases} \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -\Phi \\ \psi & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Совокупность трех гильбертовых пространств H, E, F и четырех операторов $T \in [H,H]$; $\Phi \in [E,H]$; $\psi \in [H,F]$; $K \in [E,F]$ называется метрическим операторным узлом,

$$\Delta = \left(J_E, H \oplus E, S, H \oplus F, J_F\right),$$

если операторная матрица $S = \begin{pmatrix} T & -\Phi \\ \psi & K \end{pmatrix}$ J -унитарна, т. е.

$$S^+ S = I_{H \oplus E} \quad \text{и} \quad SS^+ = I_{H \oplus F}; \tag{2}$$

$$S^+ = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & \psi^* \\ -\Phi^* & K^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^* & \psi^+ \\ -\Phi^+ & K^+ \end{pmatrix},$$

где $\Phi^+ = J_E \Phi^*$; $\psi^+ = \psi^* J_F$; $K^+ = J_E K^* J_F$.

Открытая дискретная система называется ассоциированной с метрическим узлом, если операторы T, Φ, ψ, K удовлетворяют условиям (2).

В развернутом виде узловые соотношения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} &TT^* + \Phi\Phi^+ = I_H; &&TT^* + \psi^+\psi = I_H; \\ &\psi\psi^+ + KK^+ = I_F; &&\Phi^+\Phi + K^+K = I_E; \\ &\psi T^* = K\Phi^+; &&K^+\psi = \Phi^+ T; \\ &T\psi^+ = \Phi K^+; &&\psi^+ K = T^*\Phi. \end{aligned} \tag{3}$$

Для таких открытых систем, ассоциированных с метрическими узлами, закон сохранения метрики

$$\|x_n\|_H^2 - \|x_{n+1}\|_H^2 = \|u_n\|_E^2 - \|v_n\|_F^2; \tag{4}$$

$$\left(x_n, x_n\right)_H - \left(x_{n+1}, x_{n+1}\right)_H = \left(Tx_{n+1} - \Phi u_n, Tx_{n+1} - \Phi u_n\right)_H - \left(x_{n+1}, x_{n+1}\right)_H =$$

$$= \left(T^* T x_{n+1}, x_{n+1}\right)_H - \left\{\Phi^+ T x_{n+1}, u_n\right\}_E - \left\{u_n, \Phi^+ T x_{n+1}\right\}_E + \left\{u_n, \Phi^+\Phi u_n\right\}_E - \left(x_{n+1}, x_{n+1}\right)_H =$$

$$= -\left\{\psi x_{n+1}, \psi x_{n+1}\right\}_F - \left\{\psi x_{n+1}, K u_n\right\}_F - \left(\Phi u_n, T x_{n+1}\right)_H + \left\{u_n, u_n\right\}_E - \left\{K u_n, K u_n\right\}_F =$$

$$= \left\{u_n, u_n\right\}_E - \left\{\psi x_{n+1} + K u_n, \psi x_{n+1} + K u_n\right\}_F = \left\{u_n, u_n\right\}_E - \left\{v_n, v_n\right\}_F .$$

Рассмотрим два оператора, $T_1 \in [H_1, H_1]$ и $T_2 \in [H_2, H]$, и обозначим $H_1 \oplus H_2 = H$. В пространстве H зададим оператор $T = T_1 P_1 + T_2 P_2 + C_T$, где P_k - операторы проектирования H на H_k ($k = 1$, 2) и оператор C_T, отображающий H_1 в H_2 и аннулирующий H_2. Оператор T называется сцеплением операторов

T_1 и T_2 ($T = T_1 \curlyvee T_2$), а C_T - коэффициент сцепления, [1]. Пусть даны две открытые дискретные системы, ассоциированные с метрическими узлами

$$\begin{cases} x_n = T_1 x_{n+1} - \Phi u_n^{(1)}; \\ v_n^{(1)} = \psi_1 x_{n+1} + K u_n^{(1)}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_n = T_2 y_{nH} - \Phi_2 u_n^{(2)}; \\ v_n^{(2)} = \psi_2 y_{nH} + K_2 u_n^{(2)}, \end{cases}$$

где $x_n \in H_1$, $y_n \in H_2$, $u_n^{(1)} \in E_1$, $u_n^{(2)} \in E_2$, $v_n^{(1)} \in F_1$, $v_n^{(2)} \in F_2$ ($n = 0$, 1, 2,…) и $E_2 = F_1$.

Рассмотрим их сцепление, т. е. на вход второй системы подается выход первой системы $v_n^{(1)} = u_n^{(2)}$. Покажем, что сцеплением этих двух систем будет система, ассоциированная с метрическим узлом

$$\begin{cases} x_n = T_1 x_{n+1} - \Phi_1 u_n^{(1)}; \\ y_n = T_2 y_{n+1} - \Phi_2 \left(\psi_1 x_{n+1} + K u_n^{(1)} \right); \\ v_n^{(2)} = \psi_2 y_{n+1} + K_2 \left(\psi_1 x_{n+1} + K u_n^{(1)} \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ -\Phi_2 \psi_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi_1 & u_n^{(1)} \\ \Phi_2 K_1 & u_n^{(1)} \end{pmatrix}; \\ v_n^{(2)} = \left(K_2 \psi_1, \psi_2 \right) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} + K_2 K_1 u_n^{(1)}. \end{cases} \tag{5}$$

Итак, получили систему такого же вида, у которой внутренний оператор

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ -\Phi_2 \psi_1 & T_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $T = T_1 \curlyvee T_2$ с коэффициентом сцепления $\left(-\Phi_2 \psi_1 \right)$. Входом такой системы является вход первой системы $u_n^{(1)}$, а выходом – выход второй системы $v_n^{(2)}$. Каналовые операторы сцепления $\Phi \in \left[E_1, H \right]$, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix}$ и $\psi \in \left[H, F_2 \right]$, $\psi = \left(K_2 \psi_1, \psi_2 \right)$, а так называемый дефектный оператор $K = K_2 K_1$.

Проверка выполнения узловых соотношений сцепления не вызывает трудностей, как, например:

$$TT^* + \Phi\Phi^+ = I_H;$$

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ -\Phi_2 \psi_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^* & -\psi_1^+ \Phi_2^+ \\ 0 & T_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix} \left(\Phi_1^+, K_1^+ \Phi_2^+ \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 T_1^* & -T_1 \psi_1^+ \Phi_2^+ \\ -\Phi_2 \psi_1 T_1^* & \Phi_2 \psi_1 \psi_1^+ \Phi_2^+ + T_2 T_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1 \Phi_1^+ & \Phi_1 K_1^+ \Phi_2^+ \\ \Phi_2 K_1 \Phi_1^+ & \Phi_2 K_1 K_1^+ \Phi_2^+ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_{H_1} & \left(\Phi_1 K_1^+ - T_1 \psi_1^+ \right) \Phi_2^+ \\ \Phi_2 \left(K_1 \Phi_1^+ - \psi_1 T_1^* \right) & \Phi_2 \psi_1 \psi_1^+ \Phi_2^+ + T_2 T_2^* + \Phi_2 K_1 K_1^+ \Phi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{H_1} & 0 \\ 0 & I_{H_2} \end{pmatrix} = I_H.$$

Будем искать линейно представимое решение системы (1):

$$x_n = \lambda^n x_0, \quad \lambda \neq 0 .$$

А отображения входа на внутреннее состояние R и входа на выход системы W имеют вид:

$$\lambda T x_n = x_n + \Phi u_n ; \quad x_n = \left(\lambda T - I\right)^{-1} \Phi u_n ; \quad x_n = R \cdot u_n ; \ R = \left(\lambda T - I\right)^{-1} \Phi ;$$

$$v_n = \lambda \psi x_n + K u_n = \lambda \psi \left(\lambda T - I\right)^{-1} \Phi u_n + K u_n ; \ v_n = W u_n ;$$

$$W = K + \psi \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi .$$

Передаточная оператор-функция входа на выход открытой системы называется характеристической оператор-функцией (х. о.-ф.)

Характеристическая оператор-функция сцепления

$$W = K + \psi \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi = K_2 K_1 + \left(K_2 \psi_1, \psi_2 \right) \begin{pmatrix} T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 & 0 \\ -\Phi_2 \psi_1 & T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 \right)^{-1} & 0 \\ \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \Phi_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} & \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \end{pmatrix};$$

$$W = K_2 K_1 + \left(K_2 \psi_1, \psi_2 \right) \begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 \right)^{-1} & 0 \\ \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \Phi_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 \right)^{-1} & \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix} =$$

$$= K_2 K_1 + K_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 \right)^{-1} \Phi_1 + \psi_2 \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \Phi_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 \right)^{-1} \Phi_1 +$$

$$+ \psi_2 \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \Phi_2 K_1 = \left[K_2 + \psi_2 \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2 \right)^{-1} \Phi_2 \right] \cdot \left[K_1 + \psi_1 \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 \right)^{-1} \Phi_1 \right] =$$

$$= W_2 \cdot W_1 .$$

Характеристическая оператор-функция сцепления есть произведение характеристических оператор-функций сцепляемых систем.

Передаточная оператор-функция сцепления R, отображающая вход сцепления E_1 на внутреннее состояние $H = H_1 \oplus H_2$, связана с R_1 и R_2 следующим образом: $R = R_1 + R_2 \cdot W_1$;

$$R=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1} & 0\\ \left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2\psi_1\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1} & \left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2K_1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1\\ \left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2\psi_1\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1+\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2K_1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda}\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1\\ \frac{1}{\lambda}\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2\left[K_1+\psi_1\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2W_1\end{pmatrix};$$

$$I-W\cdot W^{+}=I-\left(K+\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi\right)\left(K^{+}+\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{*}\right)=$$

$$=I-KK^{+}-K\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+}-\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi K^{+}-$$

$$-\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+}=\psi\psi^{+}-\psi T^{*}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+}-$$

$$-\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}T\psi^{+}-\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\left(I-TT^{*}\right)\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+}=$$

$$=\psi\left[I-T^{*}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}-\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}T-\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\left(I-TT^{*}\right)\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\right]\psi^{+}=$$

$$=\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\frac{1-|\lambda|^2}{|\lambda|^2}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+};$$

$$I-W^{+}W=I-\left(K^{+}+\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+}\right)\left(K+\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi\right)=$$

$$=\Phi^{+}\Phi-\Phi^{+}T\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi-\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}T^{*}\Phi-$$

$$-\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^{+}\psi\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi=\Phi^{+}\left(T^{*}-\frac{1}{\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\frac{1-|\lambda|^2}{|\lambda|^2}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi.$$

Итак, характеристическая оператор-функция является двусторонним J-сжатием внутри единичного круга,

$$I-W\cdot W^{+}>0 \text{ и } I-W^{+}\cdot W>0 \text{ при } |\lambda|<1.$$

Теперь рассмотрим дискретную открытую систему, ассоциированную с локальным операторным узлом. Совокупность двух гильбертовых пространств H и E и трех линейных ограниченных операторов $T\in[H,H]$, $\varphi\in[E,H]$ и $J\in[E,E]$ называется локальным операторным узлом, если J оператор инволюции в пространстве E ($J=J^*$, $J^2=I$) и выполнено узловое соотношение $\dfrac{T-T^*}{i}=\varphi\varphi^+$, где φ^+ - оператор, сопряженный к φ по отношению к индефинитной метрике, порожденной оператором инволюции J,

$$\left(\varphi u,x\right)_H=\left(u,\varphi^* x\right)_E=\left(Ju,J\varphi^* x\right)_E=\left\{u,J\varphi^* x\right\}_E=\left\{u,\varphi^+ x\right\}_E \quad (\varphi^+=J\varphi^*).$$

Дискретная открытая система, ассоциированная с локальным операторным узлом, имеет вид

$$\begin{cases} iTx_{n+1}=x_n+\varphi u_n; \\ v_n=\varphi^+ x_{n+1}+u_n; \\ \quad x_n\big|_{n=0}=x_0, \end{cases} \tag{7}$$

где $x_n\in H$; u_n, $v_n\in E$ ($n=0$, 1, 2,…).

Удобно записать эту систему в виде $\begin{cases} x_n=iTx_{n+1}-\varphi u_n; \\ v_n=\varphi^+ x_{n+1}+u_n. \end{cases}$ Для таких систем имеет место следующее соотношение:

$$\left(x_{n+1},x_n\right)_H+\left(x_n,x_{n+1}\right)_H=\left\{u_n,u_n\right\}_E-\left\{v_n,v_n\right\}_E; \tag{8}$$

$$\left(x_{n+1},x_n\right)+\left(x_n,x_{n+1}\right)=\left(x_{n+1},iTx_{n+1}-\varphi u_n\right)+\left(iTx_{n+1}-\varphi u_n,x_{n+1}\right)=$$

$$=-i\left(T^* x_{n+1},x_{n+1}\right)-\left(x_{n+1},\varphi u_n\right)+i\left(Tx_{n+1},x_{n+1}\right)-\left(\varphi u_n,x_{n+1}\right)=$$

$$=i\left(\left(T-T^*\right)x_{n+1},x_{n+1}\right)-\left\{\varphi^+ x_{n+1},u_n\right\}_E-\left\{u_n,\varphi^+ x_{n+1}\right\}_E=$$

$$=-\left(\varphi\varphi^+ x_{n+1},x_{n+1}\right)-\left\{\varphi^+ x_{n+1},u_n\right\}_E-\left\{u_n,\varphi^+ x_{n+1}\right\}_E+\left\{u_n,u_n\right\}_E-\left\{u_n,u_n\right\}_E=$$

$$=\left\{u_n,u_n\right\}-\left\{\varphi^+ x_{n+1}+u_n,\varphi^+ x_{n+1}+u_n\right\}_E=\left\{u_n,u_n\right\}_E-\left\{v_n,v_n\right\}_E.$$

В результате сцепления двух систем, ассоциированных с локальными узлами, получим систему, на вход которой подан вход первой, получим на выходе выход второй системы. При этом $E_1=E_2$ и $J_1=J_2$. Опуская определение сцепления двух операторов, рассмотрим две системы:

Теперь внутренние пространства сцепления $H=H_1\oplus H_2$ и $I=\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x_n=iT_1x_{n+1}-\varphi_1 u_n^{(1)}; \\ v_n^{(1)}=\varphi_1^+ x_{n+1}+u_n^{(1)} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_n=iT_2y_{n+1}-\varphi_2 u_n^{(2)}; \\ v_n^{(2)}=\varphi_2^+ y_{n+1}+u_n^{(2)}, \end{cases}$$

где $x_n\in H_1$, $y_n\in H_2$; $u_n^{(1)}$, $u_n^{(2)}$, $v_n^{(1)}$, $v_n^{(2)}\in E$ при $n=0$, 1, 2,…. Так как $u_n^{(2)}=v_n^{(1)}$, то

$$\begin{cases} x_n = iT_1 x_{n+1} - \varphi_1 u_n^{(1)}; \\ y_n = iT_2 y_{n+1} - \varphi_2 \left(\varphi_1^+ x_{n+1} + u_n^{(1)}\right); \\ v_n^{(2)} = \varphi_2^+ y_{n+1} + \varphi_1^+ x_{n+1} + u_n^{(1)}; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_1 u_n^{(1)} \\ \varphi_2 u_n^{(1)} \end{pmatrix}; \\ v_n = \left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right)\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} + u_n^{(1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Основной оператор $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix}$; $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ и коэффициент сцепления равен $i\varphi_2\varphi_1^+$.

Для системы (9) выполняется узловое соотношение

$$\frac{1}{i}\left(T - T^*\right) = \frac{1}{i}\left[\begin{pmatrix} T_1^* & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_1^* & -i\varphi_1\varphi_2^+ \\ 0 & T_2^* \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} T_1 - T_1^* & i\varphi_1\varphi_2^+ \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 - T_2^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_1^+ & \varphi_1\varphi_2^+ \\ \varphi_2\varphi_1^+ & \varphi_2\varphi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right); \quad \frac{T - T^*}{i} = \varphi \cdot \varphi^+ .$$

Будем искать решения дискретной системы в виде $x_n = \lambda^n \cdot x_0$ ($\lambda \neq 0$), тогда отображение входа на выход системы равно $v_n = Wu_n = \left(I + \lambda\varphi^+ \left(i\lambda T - I\right)^{-1} \varphi\right)u_n$;

$$W = I - i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{i\lambda} I\right)^{-1} \varphi .$$

W есть оператор-функция данной системы от λ и называется характеристической оператор-функцией.

Рассмотрим характеристическую оператор-функцию сцепления и характеристическую оператор-функцию сцепляемых систем,

$$W = I_E - i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{i\lambda} I\right)^{-1} \varphi = I - i\left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right)\begin{pmatrix} T_1 - \frac{1}{i\lambda} I_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 - \frac{1}{i\lambda} I_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= I_E - i\left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right)\begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{1}{i\lambda} I_1\right)^{-1} & 0 \\ -\left(T_2 - \frac{1}{i\lambda} I_2\right)^{-1} i\varphi_2\varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{i\lambda} I_1\right)^{-1} & \left(T_2 - \frac{1}{i\lambda} I_2\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= I_E - i\varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{i\lambda} I_1\right)^{-1} \varphi_1 - \varphi_2^+ \left(T_2 - \frac{1}{i\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2\varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{i\lambda} I_1\right)^{-1} \varphi_1 -$$

$$-i\varphi_2^+ \left(T_2 - \frac{1}{i\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2 = W_2 \cdot W_1 .$$

Так же сохраняется и соотношение, связывающее отображение входа сцепления и сцепляемых систем и внутренних состояний систем $R = R_1 + R_2 W_1$;

$$\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\varphi=\begin{pmatrix}T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1 & 0\\ i\varphi_2\varphi_1^{+} & T_2-\frac{1}{i\lambda}I_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left(T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1\right)^{-1} & 0\\ -i\left(T_2-\frac{1}{i\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2\varphi_1^{+}\left(T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1\right)^{-1} & \left(T_2-\frac{1}{i\lambda}I\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1-i\left(T_2-\frac{1}{i\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2\varphi_1^{+}\left(T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1+\left(T_2-\frac{1}{i\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2=$$

$$=\left(T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1+\left(T_2-\frac{1}{i\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2\left[I-i\varphi_1^{+}\left(T_1-\frac{1}{i\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1\right];\qquad R=R_1+R_2W_1.$$

$$I-W\cdot W^{+}=I-\left[I-i\varphi^{+}\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\varphi\right]\cdot\left[I+i\varphi^{+}\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi\right]=$$

$$=\varphi^{+}\left[i\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}-i\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}-\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\varphi\varphi^{+}\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\right]\varphi=$$

$$=\varphi^{+}\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\left[i\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)-i\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)-\varphi\varphi^{+}\right]\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi=$$

$$=\frac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^{2}}\varphi^{+}\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi;$$

$$I-W^{+}\cdot W=I-\left[I+i\varphi^{+}\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi\right]\left[I-i\varphi^{+}\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\varphi\right]=$$

$$=\frac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^{2}}\varphi^{+}\left(T^{*}+\frac{1}{i\bar{\lambda}}I\right)^{-1}\cdot\left(T-\frac{1}{i\lambda}I\right)^{-1}\varphi\,.$$

Характеристическая оператор-функция есть двустороннее J -сжатие в правой полуплоскости λ; $I-W\cdot W^{+}>0$; $I-W^{+}W>0$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$.

Известно, что любой линейный ограниченный оператор может быть включен в операторный узел, локальный или метрический, причем не единственным образом, [2], [3].

Покажем, как произвольную дискрет ную открытую систему можно расширить до ассоциированной с соответствующим узлом. Причем расширение можно произвести за счет расширения внешних пространств системы.

Рассмотрим произвольную дискретную открытую систему

$$\begin{cases}Tx_{n+1}=x_n+\Phi u_n;\\ v_n=\psi x_{n+1}+Ku_n;\end{cases}$$

$$x_n\big|_{n=0} = x_0\,,$$

где операторы $T \in [H,H]$; $\Phi \in [E,H]$; $\psi \in [H,F]$; $K \in [E,F]$ не связаны никакими соотношениями ($x_n \in H$; $u_n \in E$, $v_n \in F$; $n = 0$, 1, 2, …)

Удобно записать ее в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -\Phi \\ \psi & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Определим оператор

$$B = \begin{pmatrix} T & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi & K & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

действующий из пространства $H \oplus E \oplus F$ в $H \oplus E \oplus F$, и включим его в метрический операторный узел

$$\Delta_B = \left(J_{E_B}, \left(\left[H \oplus E \oplus F \right] \oplus E_B \right), \begin{pmatrix} B & N \\ M & Q \end{pmatrix}, \left(\left[H \oplus E \oplus F \right] \oplus F_B \right), J_{F_B} \right), \tag{11}$$

где J_{E_B} и J_{F_B} операторы инволюции, действующие в пространствах $J_{E_B} \in [E_B, E_B]$ и $J_{F_B} \in [F_B, F_B]$.

Обозначим $E \oplus F \oplus E_B = E'$ и $E \oplus F \oplus F_B = F'$ и зададим метрики в E' и F' с помощью операторов

$$\sigma_{E'} = \begin{pmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_F & 0 \\ 0 & 0 & J_{E_B} \end{pmatrix} \text{ и } \sigma_{F'} = \begin{pmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_F & 0 \\ 0 & 0 & J_{F_B} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор, задающий расширенную систему, будет

$$\begin{pmatrix} B & N \\ M & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -\Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где операторы $N_1 \in [E_B, H]$, $N_2 \in [E_B, E]$; $N_3 \in [E_B, F]$ и $M_1 \in [H, F_B]$, $M_2 \in [E, F_B]$, $M_3 \in [F, F_B]$ и $Q \in [E_B, F_B]$ появляются при включении оператора B (10) в метрический операторный узел (11). Теперь оператор (12), задающий расширенную систему, удовлетворяет всем узловым соотношениям, и система имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \\ v_n^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -\Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_n^{(3)} \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_n = Tx_{n+1} - \Phi u_n^{(1)} + N_1 u_n^{(3)}; \\ v_n^{(1)} = N_2 u_n^{(3)}; \\ v_n^{(2)} = \psi x_{n+1} + K u_n^{(1)} + N_3 u_n^{(3)}; \\ v_n^{(3)} = M_1 x_{n+1} + M_2 u_n^{(1)} + M_3 u_n^{(2)} + Q u_n^{(3)} \end{cases}$$
$$x_n\big|_{n=0} = x_0$$

и если на вход расширенной системы подать специальный сигнал вида $u_n^{(1)} = u_n$; $u_n^{(2)} = 0$; $u_n^{(3)} = 0$, то на втором канале выхода расширенной системы будет выход исходной системы

$$\begin{cases} v_n^{(1)} = 0; \\ v_n^{(2)} = \psi x_{n+1} + K u_n; \\ v_n^{(3)} = M_1 x_{n+1} + M_2 u_n, \end{cases}$$

а внутреннее состояние расширенной системы совпадает с внутренним состоянием исходной системы $x_n = Tx_{n+1} - \Phi u_n$.

Рассмотрим теперь открытую систему

$$\begin{cases} iTx_{n+1} = x_n + \varphi u_n; \\ v_n = \psi x_{n+1} + K u_n, \end{cases}$$

где оператор K обратим, а операторы T, φ, ψ, K не связаны никакими соотношениями; $x_n \in H$, $u_n \in E$, $v_n \in F$ ($n = 0$, 1, 2, …) Обозначим $Ku_n \equiv \tilde{u}_n$ и $\varphi_\xi \cdot K^{-1} = \tilde{\varphi}$. Таким образом $\tilde{u}_n \in F$ и $\tilde{\varphi} \in [F, H]$. Система примет вид

$$\begin{cases} x_n = iTx_{n+1} - \tilde{\varphi}_\xi \tilde{u}_n; \\ v_n = \psi x_{n+1} + \tilde{u}_n. \end{cases} \tag{13}$$

В работе [2] предложен способ расширения открытой непрерывной системы до ассоциированной с локальным операторным узлом. Воспользуемся идеей подобного расширения на случай дискретной системы.

Включим оператор $T \in [H, H]$ в некоторый локальный узел $\Delta_0 = (T, H, \varphi_0, E_0, J_0)$, где $\dfrac{T - T^*}{i} = \varphi_0 \cdot \varphi_0^+$ и $\varphi_0^+ = J_0 \varphi_0^*$, где $\varphi_0 \in [E_0, H]$. В E_0 введена индефинитная метрика с помощью оператора инволюции J_0 и $\{u_1, u_2\}_{E_0} = (J_0 u_1, u_2)$, где круглыми скобками обозначается обычное (дефинитное) скалярное произведение. Определим одинаковые пространства входа и выхода расширенной системы

$$\hat{E} = \hat{F} = F \oplus F \oplus F \oplus F \oplus E_0$$

и определим скалярное произведение в $\hat{E}$ и $\hat{F}$ следующим образом. Если $\hat{u}' = (\xi_1', \eta_1', \xi_2', \eta_2', \xi_0')$ и $\hat{u}'' = (\xi_1'', \eta_1'', \xi_2'', \eta_2'', \xi_0'')$, то

$$\{\hat{u}', \hat{u}''\} = (\xi_1', \eta_1'') + (\eta_1', \xi_1'') + (\xi_2', \eta_2'') + (\eta_2', \xi_2'') + \{\xi_0', \xi_0''\}_{E_0}$$

или иначе это скалярное произведение можно записать в виде

$$\left\{\hat{u}',\hat{u}''\right\}=\left(\left(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\xi_0\right),\hat{\sigma}\begin{pmatrix}\xi_1''\\ \eta_1''\\ \xi_2''\\ \eta_2''\\ \xi_0''\end{pmatrix}\right),\ \text{где }\hat{\sigma}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&\sigma_0\end{pmatrix}.$$

Определим действие оператора $\hat{\Phi}$ из $\hat{E}$ в H следующим образом. Если $\hat{u}=\left(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\xi_0\right)$, то $\hat{\Phi}\hat{u}=-\tilde{\varphi}\xi_1+\psi^*\xi_2+\varphi_0\xi_0$.

Тогда действие оператора $\hat{\Phi}^+$ будет следующим:

$$\left(\hat{\Phi}\hat{u},h\right)=\left(-\tilde{\varphi}\xi_1+\psi^*\xi_2+\varphi_0\xi_0,h\right)=-\left(\xi_1,\tilde{\varphi}^*h\right)+\left(\xi_2,\psi h\right)+\left\{\xi_0,\varphi_0^+h\right\}_{E_0}.$$

Таким образом $\hat{\Phi}^+h=\left(0,-\tilde{\varphi}^*h,0,\psi h,\varphi_0^+h\right)$;

$$\hat{\Phi}\hat{\Phi}^+h=\hat{\Phi}\left(0,-\tilde{\varphi}^*h,0,\psi h,\varphi_0^+h\right)=\varphi_0\varphi_0^+h=\frac{T-T^*}{i}h,$$

и узловое соотношение выполнено.

Рассмотрим расширенную систему

$$\begin{pmatrix}x_n\\ \left\{\begin{matrix}v_n^{(1)}\\ v_n^{(2)}\\ v_n^{(3)}\\ v_n^{(4)}\\ v_n^{(5)}\end{matrix}\right.\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iT&-\tilde{\varphi}&0&\psi^*&0&\varphi_0\\0&0&0&0&0&0\\-\tilde{\varphi}^*&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\ \psi&I&0&0&0&0\\ \varphi_0^+&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ \left.\begin{matrix}\xi_1\\ \eta_1\\ \xi_2\\ \eta_1\\ \xi_0\end{matrix}\right\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iTx_{n+1}-\tilde{\varphi}\xi_1+\psi^*\xi_2+\varphi_0\xi_0\\ \left\{\begin{matrix}0\\ -\tilde{\varphi}^*x_{n+1}\\ 0\\ \psi x_{n+1}+\xi_1\\ \varphi_0^+x_{n+1}\end{matrix}\right.\end{pmatrix}.$$

Если на вход расширенной системы подать сигнал вида $\left(\tilde{u}_n,0,0,0,0\right)$, то на четвертом канале выхода расширенной системы получим выход исходной системы, а внутреннее состояние совпадает с внутренним состоянием исходной системы (13);

$$x_n\xi=iTx_n-\tilde{\varphi}\tilde{u}_n;\quad v_n^{(1)}=0;\quad v_n^{(2)}=\tilde{\varphi}_n^*x_{n+1};\quad v_n^{(3)}=0;\quad v_n^{(4)}=\psi x_{n+1}+\tilde{u}_n;$$
$$v_n^{(5)}=\varphi_0^+x_{n+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы, - М.: Наука, 1966. – 298с.
2. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, - Харьков: Изд. Харьк ун-та, 1971. – 160с.
3. Золотарев В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов, - Харьков: ХНУ, 2003. – 342с.

Надійшла у першій редакції 05.03.2012, в останній - 28.05.2012.