

УДК 517.698.519.6

Еще раз о дифракции плоской монохроматической электромагнитной волны на импедансной ленте

А. В. Костенко

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Украина

Предлагается модификация известного метода решения указанной задачи дифракции, которая состоит в сведении задачи к двум граничным интегральным уравнениям второго рода, одно из которых – гиперсингулярное. Преимуществом предложенного метода является то, что матрица системы линейных алгебраических уравнений, к которой сведено граничное гиперсингулярное интегральное уравнение, имеет диагональное преобладание. С использованием метода дискретных особенностей построены дискретные математические модели. Приведены некоторые результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, численно-аналитическое решение, задача дифракции.

Пропонується модифікація відомого методу розв'язання вказаної задачі дифракції, яка міститься в зведенні задачі до двох граничних інтегральних рівнянь другого роду, одне з яких – гіперсингулярне. Перевагою запропонованого методу є те, що матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої зведено граничне гіперсингулярне рівняння, має діагональну перевагу. Із застосуванням методу дискретних властивостей побудовані дискретні математичні моделі. Наведено деякі результати чисельного експерименту.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, чисельно-аналітичний розв'язок, задача дифракції.

The modification of a known method of solving this diffraction problem is represented. The main point of the modified method is to reduce the diffraction problem to two boundary integral equations of second type one of them is hypersingular. The advantage of the proposed method is the diagonal dominance of matrix to which the boundary hypersingular equation was reduced. Using the method of discrete singularities the discrete mathematical models were built. The results of the numerical experiment are demonstrated.

Key words: hypersingular integral equations, numerical-analytical solution, diffraction problem.

1. Постановка задачи о дифракции плоской монохроматической волны на импедансной ленте

В трёхмерном пространстве заданно первичное электромагнитное поле, которое зависит от времени как $e^{-i\omega t}$, где ω – частота. Задача состоит в определении того, как изменится электромагнитное поле в каждой точке пространства, после внесения в него бесконечной идеально тонкой импедансной ленты, ширины $2a$, которая располагается так, что волновой вектор первичного поля лежит в плоскости перпендикулярной образующей ленты. Один из способов решения этой задачи предложен в [1] и развит в [2]. Там задача сведена к двум граничным интегральным уравнениям. Первое уравнение – с логарифмической особенностью в ядре, второе – сингулярное. Здесь задача также сводится к двум граничным интегральным уравнениям, но второе уравнение – гиперсингулярное. Другие методы решения подобных задач дифракции предложены в [3, 4].

Декартова система координат, введена так, чтобы лента лежала в плоскости

xOy , а ось x была параллельна направляющей ленты и делила её пополам. Тогда, лента есть $\{x \in \mathbb{R}, y \in [-a, a], z = 0\}$.

Первичное электромагнитное поле, во введённой системе координат, обозначим, следуя [5], следующим образом: пусть $\vec{k}(y, z) = (0, k \sin \alpha, -k \cos \alpha)$ – волновой вектор, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, λ – длина волны, α – угол между единичным ортом оси z и волновым вектором, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$; пусть $\vec{E}^0(y, z, t) = \vec{E}^0(y, z) e^{-i\omega t} = (E_x^0(y, z), E_y^0(y, z), E_z^0(y, z)) e^{-i\omega t}$ – вектор напряжённости электрического поля, а вектор напряжённости магнитного поля – $\vec{H}^0(y, z, t) = \vec{H}^0(y, z) e^{-i\omega t} = (H_x^0(y, z), H_y^0(y, z), H_z^0(y, z)) e^{-i\omega t}$.

Имеет место уравнение связи: $\sqrt{\varepsilon_0} |\vec{E}^0| = \sqrt{\mu_0} |\vec{H}^0|$, где ε_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная. Численный эксперимент проведён в предположении, что $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, а $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Задача состоит в нахождении компонент векторов электрической и магнитной напряжённости отражённого поля. С учётом зависимости от времени, обозначим их $\vec{E}(y, z)$ и $\vec{H}(y, z)$ соответственно.

Полное поле ищется как сумма первичного и отражённого полей. Обозначим электрическую напряжённость полного поля как $\vec{E}^*(y, z)$, а магнитную – как $\vec{H}^*(y, z)$, тогда $\vec{E}^*(y, z) = \vec{E}^0(y, z) + \vec{E}(y, z)$, а $\vec{H}^*(y, z) = \vec{H}^0(y, z) + \vec{H}(y, z)$.

Указанная задача, также как в [5], разделена на две – E - и H -поляризации. В первой – ищется $E_x(y, z)$ – единственная отличная от нуля компонента $\vec{E}(y, z)$; $E_x^0(y, z) = e^{ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha)}$ – единственная отличная от нуля компонента $\vec{E}^0(y, z)$. Две отличные от нуля компоненты $\vec{H}(y, z)$ связаны с $E_x(y, z)$ законами: $H_y(y, z) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \partial_z E_x(y, z)$ и $H_z(y, z) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \partial_y E_x(y, z)$, где μ – магнитная проницаемость среды. Во второй – ищется $H_x(y, z)$ – единственная отличная от нуля компонента $\vec{H}(y, z)$; $H_x^0(y, z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha)}$ – единственная отличная от нуля компонента $\vec{H}^0(y, z)$. Две отличные от нуля компоненты $\vec{E}(y, z)$ связаны с $H_x(y, z)$ следующими законами: $E_y(y, z) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \partial_z H_x(y, z)$ и $E_z(y, z) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \partial_y H_x(y, z)$, где ε – электрическая проницаемость среды.

На ленте выполнено граничное условие Шукина и Леонтовича (см. [4]). Для рассматриваемого электромагнитного поля эти условия имеют следующий вид:

$$\left[\vec{n}, \vec{E}^*(y, z) \right] \Big|_{y \in (-a, a), z=0} = - \left(Z(y, z) \cdot \left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \vec{H}^*(y, z) \right] \right] \right) \Big|_{y \in (-a, a), z=0}, \quad (1.1)$$

где $Z(y, z) = Z$, если (y, z) принадлежит $\{y \in [-a, a], z = 0\}$, и $Z(y, z) = Z_0$, если (y, z) принадлежит $\{y \in \mathbb{R} \setminus (-a, a), z \in \mathbb{R}\}$. Здесь Z – комплексный параметр, Z_0 – импеданс вакуума, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$.

В случае E -поляризации (1.1) примет вид:

$$\left[\frac{E_x^*(y, z)}{H_y^*(y, z)} \right] \Big|_{y \in (-a, a), z=0} = Z(y, z) \Big|_{y \in (-a, a), z=0}. \quad (1.2)$$

Из (1.2) и системы уравнений Максвелла получено граничное условие на ленте – третья краевая задача:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} E_x^*(y, z) + h_E E_x^*(y, z) \right] \Big|_{y \in (-a, a), z=0} = 0, \quad (1.3)$$

где $h_E = \frac{i\omega\mu_0}{Z(y, z)}$.

В случае H -поляризации (1.1) примет вид:

$$\left[\frac{E_y^*(y, z)}{H_x^*(y, z)} \right] \Big|_{y \in (-a, a), z=0} = Z(y, z) \Big|_{y \in (-a, a), z=0}. \quad (1.4)$$

Из (1.4) и системы уравнений Максвелла получено граничное условие на ленте – третья краевая задача:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} H_x^*(y, z) + h_H H_x^*(y, z) \right] \Big|_{y \in (-a, a), z=0} = 0, \quad (1.5)$$

где $h_H = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 Z(y, z)$.

2. Постановка краевой задачи

В случае E - и H -поляризаций задача дифракции электромагнитной волны на импедансной ленте сведена к двум третьим краевым задачам для уравнения Гельмгольца (см. [1, 2]). Обозначим $u_0(y, z)$ – первую компоненту вектора падающего поля, тогда $u_0(y, z) = d e^{i\mathbb{k}(y \sin \alpha - z \cos \alpha)}$, где $d = 1$, в случае E -поляризации, и $d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, в случае H -поляризации; $u(y, z)$ – искомую компоненту рассеянного поля, а её сужения на верхнюю и нижнюю полуплоскости – $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$ соответственно; h – коэффициент в граничном условии.

Тогда искомые функции удовлетворяют следующим соотношениям: уравнению Гельмгольца –

$$\Delta u^\pm(y, z) + \mathbb{k}^2 u^\pm(y, z) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad z > 0, \quad z < 0, \quad (2.1)$$

граничным условиям –

$$\left. \frac{\partial u^+(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} - hu^+(y, z) \Big|_{z=0} = - \left(\left. \frac{\partial u_0(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} - hu_0(y, z) \Big|_{z=0} \right), \quad y \in (-a, a), \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial u^-(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + hu^-(y, z) \Big|_{z=0} = - \left(\left. \frac{\partial u_0(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + hu_0(y, z) \Big|_{z=0} \right), \quad y \in (-a, a), \quad (2.3)$$

условиям сопряжения –

$$u^+(y, z) \Big|_{z=0} = u^-(y, z) \Big|_{z=0}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial u^+(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u^-(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \quad (2.5)$$

условиям Зоммерфельда –

$$u^\pm(y, z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right), \quad \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u^\pm(y, z)}{\partial z} - i\mathbb{k}u^\pm(y, z) = o\left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right), \quad \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

и условию Майкснера – для любой области Ω из $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\{y \in (-a, a), z = 0\}}$:

$$\int_{\Omega} \left(|u^\pm(y, z)| + |\nabla u^\pm(y, z)| \right) dydz < \infty. \quad (2.8)$$

Также, как в [1, 2], решение ищется в виде:

$$u^\pm(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^\pm(\lambda) e^{i\lambda y \mp \gamma(\lambda)z} d\lambda \quad (2.9)$$

при $z > 0$ и $z < 0$ соответственно, где $\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \mathbb{k}^2}$. Ветвь радикала выбрана так: $\operatorname{Re} \gamma(\lambda) > 0$, $\operatorname{Im} \gamma(\lambda) < 0$, чтобы удовлетворить (2.6) и (2.7).

3. Парные интегральные уравнения задачи

Следуя [1, 2], задача (2.1)-(2.8) сведена к двум парным интегральным уравнениям. Подставив (2.9) в (2.2) и (2.3), проведя алгебраические преобразования и сгруппировав слагаемые, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^+(\lambda) (\gamma(\lambda) + h) e^{i\lambda y} d\lambda = (i\mathbb{k} \cos \alpha + h) d e^{i\mathbb{k}y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a), \quad (3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^{-}(\lambda)(\gamma(\lambda)-h)e^{i\lambda y}d\lambda = (-i\mathbb{k}\cos\alpha + h)de^{i\mathbb{k}y\sin\alpha}, \quad y \in (-a, a). \quad (3.2)$$

Подставив (2.9) в (2.4) и (2.5), перенеся неизвестные в левую часть равенства, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (C^{+}(\lambda) - C^{-}(\lambda))e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (C^{+}(\lambda) + C^{-}(\lambda))\gamma(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]. \quad (3.4)$$

Складывая и вычитая (3.1) и (3.2), получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (C^{+}(\lambda) + C^{-}(\lambda))(\gamma(\lambda) + h)e^{i\lambda y}d\lambda = -2hde^{i\mathbb{k}y\sin\alpha}, \quad y \in (-a, a), \quad (3.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (C^{+}(\lambda) - C^{-}(\lambda))(\gamma(\lambda) - h)e^{i\lambda y}d\lambda = -2i\mathbb{k}\cos\alpha de^{i\mathbb{k}y\sin\alpha}, \quad y \in (-a, a). \quad (3.6)$$

Пусть $\Phi^{+}(\lambda) \equiv C^{+}(\lambda) + C^{-}(\lambda)$ и $\Phi^{-}(\lambda) \equiv C^{+}(\lambda) - C^{-}(\lambda)$. Тогда (3.4), (3.5) и (3.3), (3.6) примут, соответственно, следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{+}(\lambda)\gamma(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{+}(\lambda)(\gamma(\lambda) + h)e^{i\lambda y}d\lambda = -2hde^{i\mathbb{k}y\sin\alpha}, \quad y \in (-a, a), \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-}(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-}(\lambda)(\gamma(\lambda) + h)e^{i\lambda y}d\lambda = -2i\mathbb{k}\cos\alpha de^{i\mathbb{k}y\sin\alpha}, \quad y \in (-a, a). \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Таким образом, (3.7) и (3.8) – парные интегральные уравнения задачи (2.1)-(2.8). Подлежащие определению $\Phi^{+}(\lambda)$ и $\Phi^{-}(\lambda)$ ищутся в классе функций, определяемом (2.8).

4. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью в ядре

Так же, как в [1, 2], (3.7) сведено к граничному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью в ядре.

Пусть $F^{+}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{+}(\lambda)\gamma(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda$, $y \in \mathbb{R}$; из первой строки (3.7) имеем: $F^{+}(y) = 0$ при $y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$. Тогда $\Phi^{+}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\gamma(\lambda)} \int_{-a}^a F^{+}(t)e^{-i\lambda t}dt$, а вторая строка (3.7) примет вид:

$$F^+(y) + h \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = -2hde^{ik_y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a). \quad (4.1)$$

Второе слагаемое в (4.1) выражается через $F^+(y)$ при помощи следующего интегрального преобразования:

$$\begin{cases} F^+(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{i}{2} \int_{-a}^a H_0^{(1)}(\mathbb{k}|y-t|) F^+(t) dt. \end{cases}$$

Таким образом, имеем граничное интегральное уравнение:

$$F^+(y) + h \frac{i}{2} \int_{-a}^a H_0^{(1)}(\mathbb{k}|y-t|) F^+(t) dt = -2hde^{ik_y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a). \quad (4.2)$$

Выделив логарифм из ядра (4.2), получим:

$$\begin{aligned} F^+(y) - h \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln|y-t| F^+(t) dt + \\ + h \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a Q_1(y, t) F^+(t) dt = -2hde^{ik_y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $Q_1(y, t) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\mathbb{k}|y-t|) + \ln|y-t|$.

Решение (4.3) ищется в классе функций, сужение которых на $[-a, a]$ имеет вид: $F^+(y) = \frac{f^+(y)}{\sqrt{(y+a)(a-y)}}$, где $f^+(y)$ – гладкая функция. Представление решения (4.3) в таком виде обеспечивает выполнение (2.8). Таким образом, (4.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{f^+(y)}{\sqrt{a^2-y^2}} - h \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln|y-t| \frac{f^+(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt + \\ + h \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a Q_1(y, t) \frac{f^+(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = -2hde^{ik_y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пусть $y = a\eta$, $t = a\tau$, тогда (4.4), после алгебраических преобразований, примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{f^+(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} - \frac{h}{\omega} c_{\mathbb{k}a} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\eta-\tau| \frac{f^+(a\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau + \\ + h \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_2(a\eta, a\tau) \frac{f^+(a\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -2 \frac{h}{\omega} c_{\mathbb{k}ade}^{ik_a \eta \sin \alpha}, \quad \eta \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $Q_2(a\eta, a\tau) = \frac{h}{\omega} c\mathbb{k}a \left(i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\mathbb{k}a|\eta - \tau|) + \ln|\eta - \tau| \right)$.

Пусть $v^+(\eta) = f^+(a\eta)$, $Q_3(\eta, \tau) = Q_2(a\eta, a\tau)$, тогда (4.5) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{v^+(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} - \frac{h}{\omega} c\mathbb{k}a \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\eta - \tau| \frac{v^+(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_3(\eta, \tau) \frac{v^+(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -2 \frac{h}{\omega} c\mathbb{k}a d e^{i\mathbb{k}a\eta \sin \alpha}, \quad \eta \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. Гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода

Вторая строка (3.8) сведена к гиперсингулярному интегральному уравнению второго рода. Пусть $F^-(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda$, $y \in \mathbb{R}$; из первой строки (3.8)

имеем: $F^-(y) = 0$ при $y \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$. Тогда $\Phi^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a F^-(t) e^{-i\lambda t} dt$. С учё-

том того, что $\gamma(\lambda) \equiv |\lambda| - \frac{\mathbb{k}^2}{2\gamma(\lambda)} + \frac{\mathbb{k}^4}{2\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2}$, вторая строка (3.8) примет сле-

дующий вид:

$$\begin{aligned} & h \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) |\lambda| e^{i\lambda y} d\lambda - \frac{\mathbb{k}^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda + \\ & + \frac{\mathbb{k}^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} e^{i\lambda y} d\lambda = -2i\mathbb{k} \cos \alpha d e^{i\mathbb{k}y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Второе и третье слагаемые, в левой части (5.1), выражаются через $F^-(y)$ при помощи следующих интегральных преобразований – параметрических представлений псевдодифференциальных операторов, которые предложены в [6]:

$$\begin{cases} F^-(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) |\lambda| e^{i\lambda y} d\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} F^-(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{i}{2} \int_{-a}^a H_0^{(1)}(\mathbb{k}|y-t|) F^-(t) dt. \end{cases} \quad (5.3)$$

Четвёртое слагаемое в левой части (5.1) выражается через $F^-(y)$ следующим образом:

$$\frac{\mathbb{k}^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\mathbb{k}^4}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} d\lambda F^-(t) dt. \quad (5.4)$$

С учётом (5.2), (5.3) и (5.4), (5.1) преобразуется в следующее уравнение:

$$hF^-(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt - \frac{\mathbb{k}^2}{2} \int_{-a}^a H_0^{(1)}(\mathbb{k}|y-t|) F^-(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\mathbb{k}^4}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} d\lambda F^-(t) dt = -2i\mathbb{k} \cos \alpha de^{i\mathbb{k}y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a). \quad (5.5)$$

Выделив во втором слагаемом (5.5) логарифм, получаем:

$$hF^-(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt + \frac{\mathbb{k}^2}{2\pi} \int_{-a}^a \ln|y-t| F^-(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K_1(y, t) F^-(t) dt = -2i\mathbb{k} \cos \alpha de^{i\mathbb{k}y \sin \alpha}, \quad y \in (-a, a), \quad (5.5)$$

$$\text{где } K_1(y, t) = \frac{\mathbb{k}^4}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} d\lambda - \frac{\mathbb{k}^2}{2} \left(i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\mathbb{k}|y-t|) + \ln|y-t| \right).$$

Пусть $y = a\eta$, $t = a\tau$ и $x = \frac{\lambda}{\mathbb{k}}$, тогда (5.5), после алгебраических преобразований, примет вид:

$$\frac{h}{\omega} c\mathbb{k}aF^-(a\eta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F^-(a\tau)}{(\tau-\eta)^2} d\tau + \frac{(\mathbb{k}a)^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln|\eta-\tau| F^-(a\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_2(a\eta, a\tau) F^-(a\tau) d\tau = -2i\mathbb{k}a \cos \alpha de^{i\mathbb{k}a\eta \sin \alpha}, \quad \eta \in (-1, 1), \quad (5.6)$$

$$\text{где } K_2(a\eta, a\tau) = \frac{(\mathbb{k}a)^2}{2} \left(K_2^1(\eta, \tau) - K_2^2(\eta, \tau) \right), \quad K_2^1(\eta, \tau) = \int_0^1 \frac{\cos x\mathbb{k}a(\eta-\tau)}{i\sqrt{1-x^2} \left(i\sqrt{1-x^2} - x \right)^2} dx +$$

$$+ \int_1^{\infty} \frac{\cos x\mathbb{k}a(\eta-\tau)}{\sqrt{x^2-1} \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)^2} dx, \quad K_2^2(\eta, \tau) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\mathbb{k}a|\eta-\tau|) + \ln|\eta-\tau|.$$

Пусть $f^-(\eta) = F^-(a\eta)$, $K_3(\eta, \tau) = K_2(a\eta, a\tau)$, тогда (5.6) примет вид:

$$\frac{h}{\omega} c\mathbb{k}af^-(\eta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f^-(\tau)}{(\tau-\eta)^2} d\tau + \frac{(\mathbb{k}a)^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln|\eta-\tau| f^-(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_3(\eta, \tau) f^-(\tau) d\tau = -2i\mathbb{k}a \cos \alpha de^{i\mathbb{k}a\eta \sin \alpha}, \quad \eta \in (-1, 1), \quad (5.7)$$

Решение (5.7) ищется в классе функций, сужение которых на $[-1, 1]$ имеет

вид: $f^-(\eta) = v^-(\eta)\sqrt{(\eta+1)(1-\eta)}$, где $v^-(\eta)$ – гладкая функция. Представление решения (5.7) в таком виде обеспечивает выполнение (2.8). Таким образом, (5.7) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\omega} c_{\mathbb{K}a} v^-(\eta) \sqrt{1-\eta^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-\eta)^2} d\tau + \frac{(\mathbb{K}a)^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln|\eta-\tau| v^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_3(\eta, \tau) v^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau = -2i\mathbb{K}a \cos \alpha d e^{i\mathbb{K}a\eta \sin \alpha}, \quad \eta \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

6. Дискретные математические модели

В этом разделе проведена дискретизация (4.6) и (5.8), кратко изложен способ их решения. Решение (4.6) ищется в виде интерполяционного полинома $v^+(\eta)$ степени n , обозначим его $v_n^+(\eta)$. Левая часть (4.6) рассматривается как сумма трёх линейных операторов – первый не сохраняет степень полинома, второй – сохраняет (см. [7]), третий – не сохраняет. Введено уравнение относительно приближённого решения (4.6), где первое и третье слагаемые сохраняют степень полинома и близки по норме соответствующим слагаемым (4.6) (см. [8]), а правая часть – интерполяционный полином степени n , которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{v_n^+(t_k^n)}{\sqrt{1-(t_k^n)^2}} l_{n-1,k}^I(\eta) - \frac{h}{\omega} c_{\mathbb{K}a} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\eta-\tau| \frac{v_n^+(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{3n}(\eta, \tau) \frac{v_n^+(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -2 \frac{h}{\omega} c_{\mathbb{K}a} d \sum_{k=1}^n e^{i\mathbb{K}a t_k^n \sin \alpha} l_{n-1,k}^I(\eta), \quad \eta \in (-1, 1), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $l_{n-1,k}^I(\eta) = \frac{T_n(\eta)}{T_n'(t_k^n)(\eta-t_k^n)}$ – базисный полином, $T_n(\eta)$ – полином Чебышёва

первого рода степени n , а $\{t_k^n\}_{k=1}^n$ – его корни, $t_k^n = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = \overline{1, n}$; $Q_{3n}(\eta, \tau)$

– интерполяционный полином $Q_3(\eta, \tau)$ с узлами $\{t_k^n\}_{k=1}^n$ по каждой переменной,

$Q_{3n}(t_j^n, t_k^n) \equiv Q_3(t_j^n, t_k^n)$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $a_{jk}^{(1)} = \frac{l_{n-1,k}^I(t_j^n)}{\sqrt{1-(t_k^n)^2}}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$.

Для построения дискретной математической модели используются квадратурные формулы интерполяционного типа предложенные в [7]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t_j^n - \tau| \frac{v_n^+(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \sum_{k=1}^n a_{jk}^{(2)} v_n^+(t_k^n), \quad j = \overline{1, n},$$

где $a_{jk}^{(2)} = -\frac{1}{n} \left(\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(t_j^n) T_m(t_k^n)}{m} \right)$, $k = \overline{1, n}$;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{3_n}(t_j^n, \tau) \frac{v_n^+(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \sum_{k=1}^n a_{jk}^{(3)} v_n^+(t_k^n), \quad j = \overline{1, n},$$

где $a_{jk}^{(3)} = \frac{1}{n} Q_{3_n}(t_j^n, t_k^n)$.

Левая и правая части (6.1) – полиномы степени n . Совпадения этих частей в n различных точках – $\{t_j^n\}_{j=1}^n$, необходимо и достаточно для тождественного равенства левой и правой частей (6.1). Таким образом, (6.1) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно $\left(v_n^+(t_k^n) \right)_{k=1}^n$:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} v_n^+(t_k^n) = a_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{6.2}$$

где $a_{jk} = a_{jk}^{(1)} - \frac{h}{\omega} c_{kka} a_{jk}^{(2)} + a_{jk}^{(3)}$, $a_j = -2 \frac{h}{\omega} c_{kade}^{i k a t_j^n \sin \alpha}$.

Решение (5.8) ищется в виде интерполяционного полинома $v^-(\eta)$ степени $(n-2)$, обозначим его $v_{n-2}^-(\eta)$. Левая часть (5.8) рассматривается как сумма четырёх линейных операторов – первый не сохраняет степень полинома, второй – сохраняет, третий – не сохраняет, четвёртый – не сохраняет [7]. Введено уравнение относительно приближённого решения (5.8), где первое, третье и четвёртое слагаемые сохраняют степень полинома и близки по норме [8] к соответствующим слагаемым (5.8), а правая часть – интерполяционный полином степени $(n-2)$, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\omega} c_{kka} \sum_{k=1}^{n-1} v_{n-2}^-(t_{0k}^n) \sqrt{1-(t_{0k}^n)^2} l_{n-2,k}^{II}(\eta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n-2}^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-\eta)^2} d\tau + \\ & + \frac{(ka)^2}{2} (B_{n-2} v_{n-2}^-)(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{3_{n-2}}(\eta, \tau) v_{n-2}^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau = \\ & = -2i k a \cos \alpha d \sum_{k=1}^{n-1} e^{i k a t_{0k}^n \sin \alpha} l_{n-2,k}^{II}(\eta), \quad \eta \in (-1, 1), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $l_{n-2,k}^{II}(\eta) = \frac{U_{n-1}(\eta)}{U'_{n-1}(t_{0k}^n)(\eta-t_{0k}^n)}$ – базисный полином, $U_{n-1}(\eta)$ – полином Чебышёва второго рода степени $(n-1)$, $\{t_{0k}^n\}_{k=1}^{n-1}$ – его корни, $t_{0k}^n = \cos \frac{k}{n} \pi$, $k = \overline{1, n}$;

B_{n-2} – линейный оператор, который определён следующим образом:

$$\left(B_{n-2}v_{n-2}^-\right)(\eta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln|\eta - \tau| - \frac{2T_{n-1}(\eta)T_{n-1}(\tau)}{n-1} - \frac{2T_n(\eta)T_n(\tau)}{n} \right) v_{n-2}^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau, \quad \text{а}$$

$K_{3_{n-2}}(\eta, \tau)$ – интерполяционный полином $K_3(\eta, \tau)$ с узлами $\left\{t_{0k}^n\right\}_{k=1}^{n-1}$ по каждой переменной, $K_{3_{n-2}}\left(t_{0j}^n, t_{0k}^n\right) \equiv K_3\left(t_{0j}^n, t_{0k}^n\right)$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $b_{jk}^{(1)} = \sqrt{1 - \left(t_{0k}^n\right)^2} l_{n-2, k}^{II}\left(t_{0j}^n\right)$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$.

Для построения дискретной математической модели используются квадратурные формулы интерполяционного типа (см. [7, 8]):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n-2}^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2}}{\left(\tau - t_{0j}^n\right)^2} d\tau = \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}^{(2)} v_{n-2}^-\left(t_{0k}^n\right), \quad j = \overline{1, n},$$

$$\text{где } b_{jk}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\left(1 - \left(t_{0k}^n\right)^2\right) \left((-1)^{k+j+1} + 1\right)}{n \left(t_{0j}^n - t_{0k}^n\right)}, & k \neq j, \\ -\frac{n}{2}, & k = j, \end{cases} \quad k = \overline{1, n};$$

$$\left(B_{n-2}v_{n-2}^-\right)\left(t_{0j}^n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}^{(3)} v_{n-2}^-\left(t_{0k}^n\right), \quad j = \overline{1, n},$$

$$\text{где } b_{jk}^{(3)} = \frac{\left(t_{0k}^n\right)^2 - 1}{n} \left(\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m\left(t_{0j}^n\right) T_m\left(t_{0k}^n\right)}{m} \right), \quad k = \overline{1, n};$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{3_{n-2}}\left(t_{0j}^n, \tau\right) v_{n-2}^-(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau = \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}^{(4)} v_{n-2}^-\left(t_{0k}^n\right), \quad j = \overline{1, n},$$

$$\text{где } b_{jk}^{(4)} = \frac{1 - \left(t_{0k}^n\right)^2}{n} K_{3_{n-2}}\left(t_{0j}^n, t_{0k}^n\right).$$

Левая и правая части уравнения (6.3) – полиномы степени $(n-2)$. Совпадения

этих частей в $(n-2)$ различных точках $\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$, необходимо и достаточно для

тождественного равенства левой и правой частей (6.3). Таким образом, (6.3) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно

$$\left(v_{n-2}^-\left(t_{0k}^n\right)\right)_{k=1}^{n-1} :$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_{jk} v_{n-2}^-\left(t_{0k}^n\right) = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.4)$$

где $b_{jk} = \frac{\hbar}{\omega} c \mathbb{k} a b_{jk}^{(1)} - b_{jk}^{(2)} + \frac{(\mathbb{k}a)^2}{2} b_{jk}^{(3)} + b_{jk}^{(4)}$, $b_j = -2i \mathbb{k} a \cos \alpha e^{i \mathbb{k} a t_{0j}^n \sin \alpha}$.

7. Алгоритм численного решения задачи

Исходная задача сведена к двум системам линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестных функций в узловых точках – (6.2) и (6.4). В случае E -поляризации коэффициенты (6.2) и (6.4) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{jk} &= a_{jk}^{(1)} - i\mu \frac{Z_0}{Z} \mathbb{k} a a_{jk}^{(2)} + a_{jk}^{(3)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \\ a_j &= -2i\mu \frac{Z_0}{Z} \mathbb{k} a e^{i \mathbb{k} a t_j^n \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n}; \\ b_{jk} &= i\mu \frac{Z_0}{Z} \mathbb{k} a b_{jk}^{(1)} - b_{jk}^{(2)} + \frac{(\mathbb{k}a)^2}{2} b_{jk}^{(3)} + b_{jk}^{(4)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \\ b_j &= -2i \mathbb{k} a \cos \alpha e^{i \mathbb{k} a t_{0j}^n \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В случае H -поляризации коэффициенты (6.2) и (6.4) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{jk} &= a_{jk}^{(1)} - i\varepsilon \frac{Z}{Z_0} \mathbb{k} a a_{jk}^{(2)} + a_{jk}^{(3)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \\ a_j &= -2i\varepsilon \frac{Z}{Z_0^2} \mathbb{k} a e^{i \mathbb{k} a t_j^n \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n}; \\ b_{jk} &= i\varepsilon \frac{Z}{Z_0} \mathbb{k} a b_{jk}^{(1)} - b_{jk}^{(2)} + \frac{(\mathbb{k}a)^2}{2} b_{jk}^{(3)} + b_{jk}^{(4)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \\ b_j &= -2i \frac{\mathbb{k}a}{Z_0} \cos \alpha e^{i \mathbb{k} a t_{0j}^n \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Таким образом, параметрами задачи являются: $\mathbb{k}a$, Z , α и μ , – в случае E -поляризации, и ε – в случае H -поляризации.

Пусть $y = a\eta$, $z = a\zeta$ и $x = \frac{z}{\mathbb{k}}$, тогда искомые функции восстанавливаются по найденным $\left(v_n^+(t_k^n)\right)_{k=1}^n$ и $\left(v_{n-2}^-(t_{0k}^n)\right)_{k=1}^{n-1}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u^\pm(a\eta, a\zeta) &= \frac{i}{2\pi n} \sum_{k=1}^n v_n^+(t_k^n) \int_0^1 \cos \mathbb{k} a (\eta - t_k^n) x \frac{e^{i \mathbb{k} a \sqrt{1-x^2} \zeta}}{\sqrt{1-x^2}} dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=1}^n v_n^+(t_k^n) \int_1^\infty \cos \mathbb{k} a (\eta - t_k^n) x \frac{e^{-\mathbb{k} a \sqrt{x^2-1} \zeta}}{\sqrt{x^2-1}} dx \mp \\ &\mp \frac{\mathbb{k}a}{2\pi n} \sum_{k=1}^{n-1} v_{n-2}^-(t_{0k}^n) \left(1 - (t_{0k}^n)^2\right) \int_0^1 \cos \mathbb{k} a (\eta - t_{0k}^n) x e^{i \mathbb{k} a \sqrt{1-x^2} \zeta} dx \mp \end{aligned}$$

$$\mp \frac{\mathbb{k}a}{2\pi n} \sum_{k=1}^n v_n^+(t_k^n) \int_1^{\infty} \cos \mathbb{k}a(\eta - t_k^n) x e^{-\mathbb{k}a\sqrt{x^2-1}\zeta} dx. \quad (7.3)$$

8. Преимущества предлагаемой модификации метода решения задачи

Основное преимущество от сведения (3.8) к гиперсингулярному интегральному уравнению при решении задачи (2.1)-(2.9) состоит в том, что это уравнение, в указанном смысле, эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой, при достаточно больших значениях n , имеет диагональное преобладание. Это утверждение опирается на равенства, предложенные в [9]. Также, использование второго метода решения задачи, позволяет сравнивать и оценивать полученные решения. Численный эксперимент показал, что оба метода дают весьма близкие результаты – например, расхождение начинается в четвёртом знаке при таком наборе параметров: $\mathbb{k}a = 4\lambda$, $Z = 10^{-6} - 0,002i$, $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$ и 50 расчетных точках.

9. Результаты численного эксперимента

Ниже приведены графики, иллюстрирующие поведение искомой компоненты вектора электрической напряжённости при следующих значениях параметров: $\mathbb{k}a = 4\lambda$, $Z = 10^{-6} - 0,002i$, $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$. На рисунке 1 изображена топографическая раскраска графика $|u^+(a\eta, a\zeta)|$ в тона серого. На рисунке 2 –

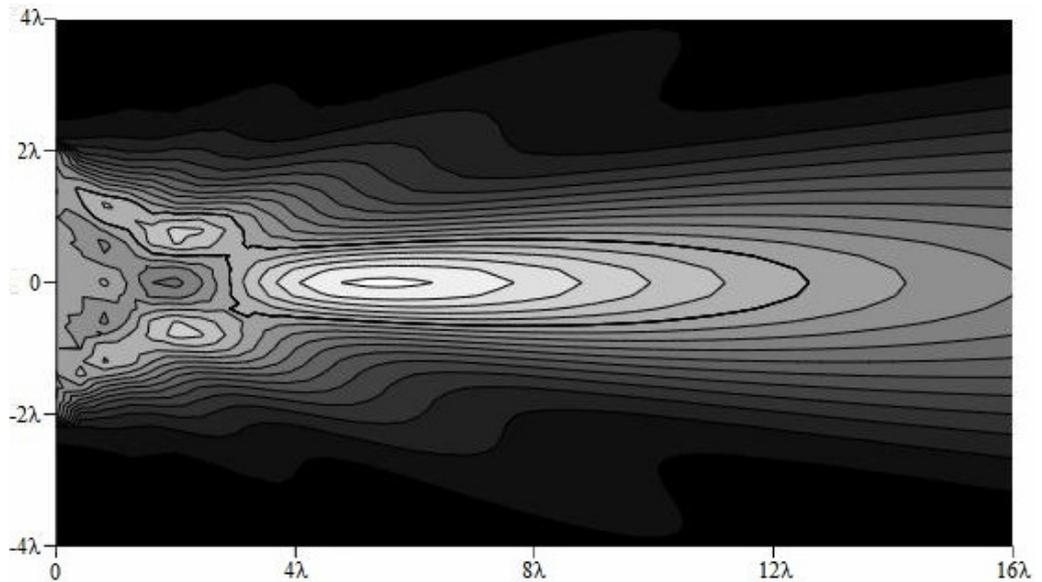


Рис. 1.

соответствие тонов серого величине $|u^+(a\eta, a\zeta)|$. На рисунке 3 представлены линии уровня $|u^-(a\eta, a\zeta) + e^{i\mathbb{k}(y\sin\alpha - z\cos\alpha)}|$, так называемая, область тени. Для

иллюстрации решения задачи при больших значениях аргументов используется диаграмма направленности, которая определяется следующим образом:

$$D^{\pm}(\varphi) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u^{\pm}(ar \cos \varphi, ar \sin \varphi)}{(\mathbb{k}ar)^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(\mathbb{k}ar - \frac{\pi}{4}\right)}}, \quad (9.1)$$

где r и φ связаны с η и ζ следующим образом: $\eta = r \cos \varphi$, а $\zeta = r \sin \varphi$.



Рис. 2.

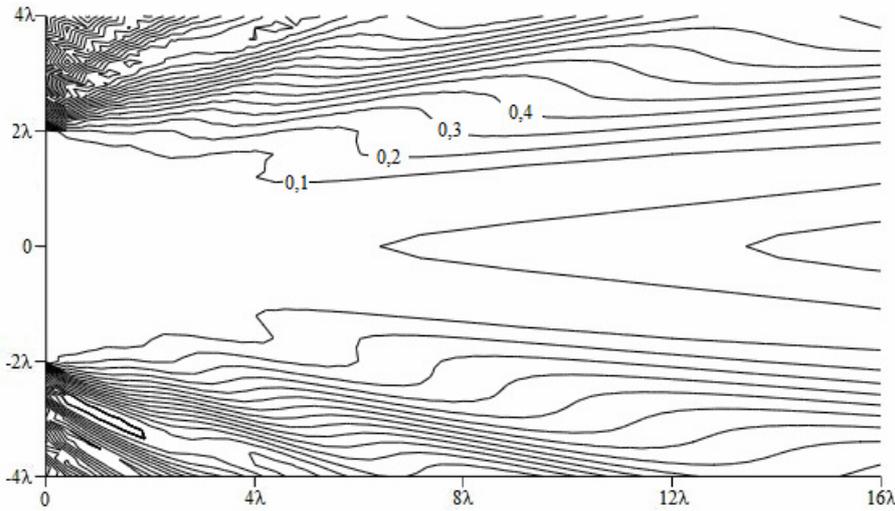


Рис. 3.

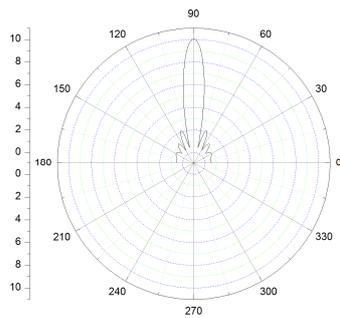


Рис. 4.

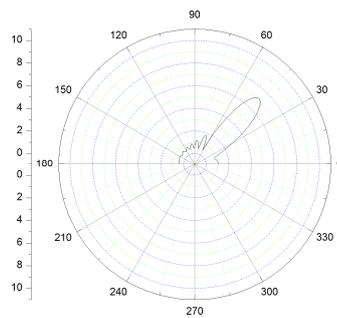


Рис. 5.

При помощи метода стационарной фазы (см. [10]) (9.1) представлено так:

$$D^{\pm}(\varphi) = \frac{i\sqrt{\pi}}{4\pi n} (1+i) \sum_{k=1}^n v_n^{\pm}(t_k^n) e^{-i\kappa a t_k^n \cos \varphi} \mp \frac{\kappa a \sqrt{\pi}}{4\pi n} \frac{(1+i)}{\sin \varphi} \sum_{k=1}^{n-1} v_{n-2}^{\pm}(t_{0k}^n) \left(1 - (t_{0k}^n)^2\right) e^{-i\kappa a t_{0k}^n \cos \varphi}. \quad (9.2)$$

С использованием (9.2) были построены диаграммы направленности. На рисунке 4 изображён график $D^+(\varphi)$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$. На рисунке 5 изображён график $D^+(\varphi)$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ и при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и тех же остальных параметрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю. В., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И. Рассеяние электромагнитных волн тонкой сверхпроводящей лентой // Док. академии наук – 1996. – Т. 351, № 4. – с. 462-464.
2. Гандель Ю. В., Кравченко В. Ф., Морозова Н. Н. Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент // Электромагнитные волны и электронные системы – 1997. – Т. 2, №. 1. – с. 4-15 (на английском).
3. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.
4. Кравченко В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 280 с.
5. Гандель Ю. В., Ерёмченко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: уч. пособ. Ч. II. – Х.: Изд. ХГУ имени М. Горького, 1992. – 145 с.
6. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решётках и экранах // Труды XI Междунар. симп «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2003) – 2003. – с. 53-58.
7. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Уч. пособ. – Х.: Изд. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.
8. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения – 2006. – Т. 42, № 9. – с. 1256-1262.
9. Батченко В. А., Гандель Ю. В. О решении гиперсингулярного интегрального уравнения задачи дифракции H -поляризованной волны на разомкнутой цилиндрической поверхности // Труды X Междунар. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2001) – 2001. – с. 44-46 (на английском).
10. Гандель Ю. В. Элементарные асимптотические оценки: Учебное пособие. – Х.: Изд. ХГУ имени М. Горького, 1977. – 50 с.