УДК 519.6

Апроксимація розривних функцій розривними лінійними сплайнами на лініях триангуляції

Ю. І. Першина
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

Досліджується метод наближення розривної функції двох змінних за допомогою розривних апроксимаційних сплайнів, область визначення розривної функції розбивається на прямокутні трикутники. Також пропонується загальний вигляд похибки наближення та її оцінка. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

Ключові слова: *Розривна функція, триангуляція області, розривна апроксимація, оцінка похибки.*

Исследуется метод приближения разрывной функции двух переменных с помощью разрывных аппроксимационных сплайнов, область определения разрывной функции разбивается на прямоугольные треугольники. Также предлагается общий вид погрешности приближения и ее оценка. Построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени на заданной сетке узлов.

Ключевые слова: *Разрывная функция, триангуляция области, разрывная аппроксимация, оценка погрешности.*

The method of approximation of discontinuous function of two variables by means of discontinuous approximational splines is investigated, and the range of definition of discontinuous function breaks into rectangular triangles. An assessment of the accuracy of the method is offered. As a special case, the class of constructed discontinuous splines includes the class of classical continuous splines of the first degree on the set grid of knots.

Key words: *Discontinuous function, area triangulation, discontinuous approximation, error estimation.*

1. Вступ та актуальність

Задача наближення розривних функцій є однією з найскладніших задач обчислювальної математики. Спеціалістам з обчислювальної математики добре відомі оператори наближення неперервних та диференційовних функцій за допомогою поліномів та сплайнів [1–4]. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [5–6], в яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. В роботі [6] була розглянута апроксимація розривних розв'язків (функцій однієї змінної) диференціальних рівнянь за допомогою розривного методу Гальоркіна. А в роботі [7] розглядається розривний метод Гальоркіна для еліптичної крайової задачі з використанням двовимірних неузгоджених сіток. Цей метод дозволяє враховувати неконформність елементів. Причому метод забезпечує неперервність розв'язку, хоча від базисних функцій узгодженості не вимагає.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів, або розривних функцій за допомогою неперервних. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких як частинний випадок, включає множину неперервних сплайнів, що можуть мати розриви першого роду в заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час недостатньо вивчене питання про використання інформації про внутрішню структуру тіла людини (різні органи мають свою форму та щільність тканин).

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Наприклад, в роботі [6] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структур тіла.

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

В роботі [8] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [9] – інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерполяційні [10] та інтерлінаційні [11] сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [12].

В даній роботі вперше будуються та досліджуються апроксимаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на прямокутні трикутники.

2. Постановка задачі.

Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в одиничному квадраті $D=[0,1]^2$. Ця область розбивається прямими $x_0=0<x_1<x_2<...<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<...<y_n=1$, на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудува та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної апроксимації таких, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції .

3. Побудова наближуючого розривного апроксимаційного сплайна

Якщо (x_i,y_j) - вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутного трикутника, то може зустрітися чотири типи трикутників (рис.1)

$$\mathrm{T}_{ij}^{(1)}=\left\{x_i<x<x_{i+1}, y_j<y<y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(2)}=\left\{x_{i-1}<x<x_i, y_j<y<y_j+\frac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i-1}}\right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(3)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i,\, y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < y < y_j \right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(4)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1},\, y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i} < y < y_j \right\}.$$

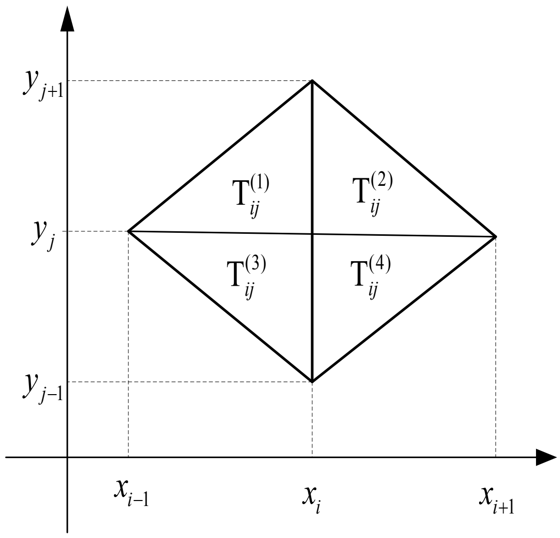


Рис.1. Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j).

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x,y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду.

Визначення: Будемо називати розривним апроксимаційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D$ $(k = \{1,2,3,4\})$ наступну функцію

$$S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}\left(A_1^{(k)}\right)} + C_2^{(k)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}\left(A_2^{(k)}\right)} + C_3^{(k)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}\left(A_3^{(k)}\right)}, \quad (1)$$

де

$$\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i, \qquad \omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)=\begin{cases} -y+y_j+\dfrac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}, & k=1\\ -y+y_j+\dfrac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i-1}}, & k=2\\ -y+y_{j-1}+\dfrac{(x-x_i)(y_j-y_{j-1})}{x_i-x_{i-1}}, & k=3\\ -y+y_j+\dfrac{(x-x_{i+1})(y_j-y_{j-1})}{x_{i+1}-x_i}, & k=4 \end{cases},$$

$$A_1^{(k)}=(x_i,y_j),\quad A_2^{(k)}=\begin{cases}(x_i+0,y_{j+1}-0), & k=1\\ (x_i-0,y_{j+1}-0), & k=2\\ (x_i-0,y_{j-1}-0), & k=3\\ (x_i+0,y_{j-1}-0), & k=4\end{cases},\quad A_3^{(k)}=\begin{cases}(x_{i+1}-0,y_j+0), & k=1\\ (x_{i-1}+0,y_j+0), & k=2\\ (x_{i-1}+0,y_j-0), & k=3\\ (x_{i+1}-0,y_j-0), & k=4\end{cases}.$$

а коефіцієнти $C_p^{(k)}$, $p=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,4}$ сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\sum_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)}\subset D}\iint\limits_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)}}\left[f(x,y)-s_{ij}^{(k)}(x,y,C)\right]^2dxdy\to\min_C \qquad (2)$$

Теорема 1. Нехай $f(x,y)\in M_2$, $M_2=\{f(x,y):D_\xi f(x,y)$ – неперервні в $\mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$ та $\left|D_\xi f(u)-D_\xi f(v)\right|\le M\|u-v\|$, $\forall u=(u_1,u_2)\in \mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, $\forall v=(v_1,v_2)\in \mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, $\forall\xi\}$ наближується апроксимаційним розривним сплайном $S(x,y)=s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y)\in \mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, визначеним формулою (1) з коефіцієнтами, що знаходяться з формули (2), тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\|Sp(x,y)\|_\infty\le\max\{|f(x_i,y_j)|,|f(x_{i+1},y_j)|,|f(x_i,y_{j+1})|\}+\frac{1}{6}Mh^2,$$

де h – довжина гіпотенузи трикутного елемента.

Доведення. Проведемо доведення на прикладі трикутника $\mathrm{T}_{ij}^{(1)}$. Тоді формула (1) перетвориться в наступний вираз

$$S(x,y)=C_1^{(1)}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}+C_2^{(1)}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+C_3^{(1)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},$$

де

$$g(x)=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}.$$

Розв’яжемо мінімізаційну задачу:

$$P_{ij}(C) \to \min_{C},$$

де

$$P_{ij}(C) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(C_1^{(1)} \frac{y-g(x)}{y_{j+1}-g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C_3^{(1)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} - f(x,y) \right)^2 dxdy$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_1^{(1)}} = 0, \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_2^{(1)}} = 0, \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_3^{(1)}} = 0, \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_4^{(1)}} = 0$$

відносно невідомих $C_m^{(1)}, m = 1,2,3$:

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2\left(C_1^{(1)} \frac{y-g(x)}{y_{j+1}-g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C_3^{(1)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) \frac{y-g(x)}{y_{j+1}-g(x)} dydx = 0 \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2\left(C_1^{(1)} \frac{y-g(x)}{y_{j+1}-g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C_3^{(1)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} dydx = 0 \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2\left(C_1^{(1)} \frac{y-g(x)}{y_{j+1}-g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C_3^{(1)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} dydx = 0 \end{cases} \quad (3)$$

У системі зробимо заміну

$$C_1^{(1)} = f\left(x_i+0, y_j+0\right) + \varepsilon_{i,j},\ C_2^{(1)} = f\left(x_i+0, y_{j+1}-0\right) + \varepsilon_{i,j+1},$$
$$C_3^{(1)} = f\left(x_{i+1}-0, y_j+0\right) + \varepsilon_{i+1,j}$$

і замінимо $f(x,y)$ інтерполяційним сплайном, побудованим на трикутному елементі $T_{ij}^{(1)}$ із залишковим членом $R(x,y)$, який був виведений у роботі [11]. В результаті отримаємо наступні вирази для інтегральних членів отриманої системи, враховуючи, що $g(x) = y_j + \dfrac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i - x_{i+1}}$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)} \right)^2 dxdy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \frac{y-g(x)}{y_j-g(x)} dxdy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-g(x)}{y_j-g(x)} dxdy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\right)^2 dxdy=\frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\,\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}dxdy=\frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 dxdy=\frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12}.$$

Система (3)набуває вигляду:

$$\begin{cases}\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12}\varepsilon_{i,j}+\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}\varepsilon_{i,j+1}+\\ \quad+\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}\varepsilon_{i+1,j}=\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}dydx;\\ \dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}\varepsilon_{i,j}+\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12}\varepsilon_{i,j+1}+\\ \quad+\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}\varepsilon_{i+1,j}=\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}dydx;\\ \dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}\varepsilon_{i,j}+\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}\varepsilon_{i,j+1}+\\ \quad+\dfrac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12}\varepsilon_{i+1,j}=\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}dydx.\end{cases}\tag{4}$$

Для аналізу правих частин отриманої системи скористаємося формулою з роботи [13] для оцінки похибки наближення розривним інтерполяційним сплайном на трикутному елементі:

$$\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\le\frac{1}{6}Mh^2,$$

де h – довжина гіпотенузи трикутного елемента $\mathrm{T}_{ij}^{(1)}$.

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\|=\max\{\varepsilon_{i,j},\varepsilon_{i+1,j},\varepsilon_{i,j+1}\}$ та спростивши отримані вирази, систему (4) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{6}\|\varepsilon\| = \frac{1}{6}Mh^2\frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{6} \\ \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{6}\|\varepsilon\| = \frac{1}{6}Mh^2\frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{6} \\ \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{6}\|\varepsilon\| = \frac{1}{6}Mh^2\frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{6} \end{cases}.$$

Тобто $\|\varepsilon\| \le \frac{1}{6}Mh^2$.

Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай функція $f(x,y)$ наближується апроксимаційним розривним сплайном $S(x,y)$ у вигляді (1) $(x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(1)} \subset D$, визначеним формулою (1) з коефіцієнтами, що знаходяться з формули (2), та $\left|f'_x(x,y)\right| \le M$, $\left|f'_y(x,y)\right| \le N$. Тоді для оцінки розривного апроксимаційного сплайна в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\|Sp(x,y)\|_\infty \le \max\{\left|f(x_i,y_j)\right|, \left|f(x_{i+1},y_j)\right|, \left|f(x_i,y_{j+1})\right|\} + \frac{M\cdot\Delta_x + N\cdot\Delta_y}{2},$$

де $\Delta_x = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_y = y_{j+1} - y_j$.

Доведення проводиться по аналогії з теоремою 1, використовуючи похибку наближення розривної функції розривними лінійними інтерполяційними сплайнами з роботи [11], яка має вигляд

$$\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \le \frac{M\cdot\Delta_x + N\cdot\Delta_y}{2}.$$

Наслідок. Якщо наближувана функція $f(x,y)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трикутному елементі розбиття з точками розриву (x_i, y_j), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном $S(x,y)$, визначеним формулами (1) з невідомими $C_m^{(k)}, m = \overline{1,3}, k = \overline{1,4}$, що знаходяться з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x,y) = f(x,y)$, де $f(x,y) = A(const)$ або $f(x,y) = A_0 + A_1x + A_2y$.

Зауваження. Якщо $C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = S(x_i, y_j), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, то побудований розривний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

4. Обчислювальний експеримент

Нехай задані вузли трикутної сітки: $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$, $y_1 = 0, y_2 = 0.5, y_3 = 1$ та функція $f(x,y)$ визначена в області $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3 \cup \mathrm{T}_4$, представленої на рис.2.

$$\mathrm{T}_1 = \{x - 0.5 > 0, y - 0.5 > 0, 1.5 - x - y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_2 = \{-(x - 0.5) > 0, y - 0.5 > 0, 0.5 + x - y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_3 = \{-(x - 0.5) > 0, -(y - 0.5) > 0, -0.5 + x + y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_4 = \{x - 0.5 > 0, -(y - 0.5) > 0, 0.5 - x + y > 0\}.$$

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду в кутах трикутної сітки (рис.3б)).

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x, y)$ у вигляді формули (2), в якості елементів матриці C беремо значення функції (лівосторонні та правосторонні) у вузлах сітки (у цьому випадку вважаємо їх заданими).

Отримаємо наступний інтерполяційний сплайн:

$$S(x,y) = \begin{cases} -x - 1.4y + 1.975 & (x,y) \in \mathrm{T}_1 \\ -1.4x - 0.6y + 1.95, & (x,y) \in \mathrm{T}_2 \\ 0.5, & (x,y) \in \mathrm{T}_3 \\ 2x - 2y, & (x,y) \in \mathrm{T}_4 \end{cases}$$

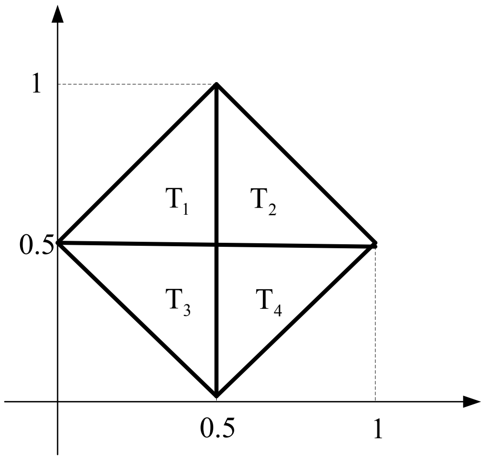
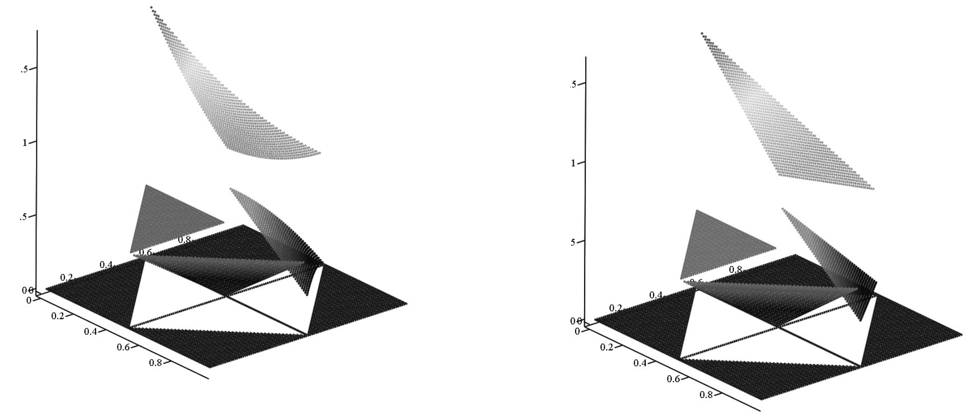


Рис 2. Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$

Максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерполяційного сплайна $S(x, y)$:

$$\max\left|f(x, y) - S(x, y)\right| \approx 0.12\,.$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Елементи матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів. Був отриманий наступні результат (рис. 3а))



а) б)

Рис.3. Графічний вигляд: а) наближуваної функції $f(x,y)$; б) наближую чого апроксимаційного сплайна $S(x,y)$

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого сплайна $S(x,y)$:

$$\max\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\approx 0.07\ .$$

Як бачимо, побудований розривний апроксимаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний. Побудовані розривні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

5. Висновки.

В роботі пропонується метод побудови розривного апроксимаційного лінійного сплайну для наближення функції з розривами першого роду та область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Визначена оцінка побудованої розривної конструкції. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

Метод, побудований авторами, припускає , що розриви наближуваної функції відомі, і тому вони співпадають з розривами наближую чого сплайну. Наступним кроком планується розробити методи наближення розривних функцій розривними сплайнами, коли розриви наближуваної функції ще треба знайти. А також планується застосувати розроблену теорію наближення розривних функцій розривними сплайнами до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1976.–355с.;
3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976;
4. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск; Наука, 1983;
5. De Vore R.A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. 1983. Vol.41, P. 29–45.
6. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
7. Н.Б. Петровская Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование.– Москва.– 2005.– Т. 17, №1.– С.79–92;
8. Arnold D.N. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems [Text] / Arnold D.N. // SIAM Journal on Numerical Analysis.– 2002.– Vol.39, №5.– P. 1749-1779.
9. О.М. Литвин, Ю.І. Першина. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72.
10. О.Н. Литвин, Ю.И. Першина. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. –С.96 – 105.
11. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривних функцій кусково-лінійними інтерполяційними розривними сплайнами на трикутній сітці вузлів // Доповіді НАНУ. –2012. – №1. - С. 38–43
12. О.М. Литвин, Ю.І. Першина. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины.–Киев, 2011, №5. – С.34–47.
13. Ю.Н. Субботин. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды Математического института АН СССР, 1989. – Т.189. – С.117–137

Надійшла у першій редакції 17.03.2012, в останній - 17.11.2012.