УДК 517.95

# О решении обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка

Т. З. Чочиев

*Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-Алания, Россия*

Любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами сопровождается нелинейным характеристическим уравнением Эйлера. Если дается его решение, то само уравнение решается понижением порядка производной. В статье исследуется линейное уравнение третьего порядка, сопровождаемое нелинейной характеристической системой. Если известно ее решение, то линейное уравнение решается понижением порядка производной. Для характеристического уравнения Эйлера получено условие, выполнимость которого гарантирует решение в квадратурах.

***Ключевые слова:*** *характеристическое уравнение Эйлера, нелинейная характеристическая система, понижение порядка производной, уравнение класса Бернулли, квадратуры.*

Будь-яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами супроводжується нелінійним характеристичним рівнянням Ейлера. Якщо є його розв'язок, то вихідне рівняння можна розв'язати зниженням порядку похідної. У статті досліджено лінійне рівняння третього порядку, яке супроводжує нелінійна характеристична система. Якщо її розв'язок відомий, то лінійне рівняння допускає розв'язок зниженням порядку похідної. Для характеристичного рівняння Ейлера знайдено умову, виконання якої гарантує розв'язок у квадратурах.

***Ключеві слова:*** *характеристичне рівняння Ейлера, нелінійна характеристична система, зниженя порядку похідної, рівняння класу Бернуллі, квадратури.*

Any linear second order differential equation with variable coefficients is accompanied by a non-linear characteristic equation of Euler. If given his decision, then the equation itself is solved by decreasing order of the derivative. We investigated linear equation of third order is accompanied by a nonlinear characteristic system. If you know the solution, then the linear equation is solved by decreasing order of the derivative. The condition on the characteristic equation of Euler, which guarantees the feasibility of a solution in quadratures, was built.

***Key words:*** *characteristic equation of Euler, nonlinear characteristic system, reduction of order derivative, equation of the class of Bernoulli, the solution in quadratures.*

## П. 1. О решении обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка.

Цель статьи - разработка метода решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих в практике математического моделирования [6], на основе понижения порядка производной при известном решении характеристического уравнения. Исходим из теории уравнений хорошо известного вида

$$y''+A(x)y'+B(x)y=f(x)\,, \tag{1.1}$$

где $A(x)$, $B(x)$ и $f(x)$ – заданные функции в $(-\infty<x<\infty)$. Причем, $A(x)$ – дифференцируемая функция, $B(x)$ и $f(x)$ суть непрерывные. Условившись, что

$$A(x) = l + l_1,$$
$$B(x) = l' + ll_1, \tag{1.2}$$

относительно $l$ приходим к характеристическому уравнению Эйлера

$$l' - l^2 + Al - B = 0 \qquad (l_1 = A - l), \tag{1.3}$$

которое соответствует уравнению (1.1).

**Теорема 1.** Если $l$ – решение характеристического уравнения Эйлера, то линейное уравнение (1.1) решается понижением порядка производной.

**Доказательство.** Пусть дана функция $l$, согласно (1.3) известна и $l_1$.

В силу (1.2), уравнение (1.1) допускает представление вида

$$(y' + ly)' + l_1(y' + ly) = f(x). \tag{1.4$_1$}$$

Умножаем это равенство на $e^{\int l_1 dx}$. В левой части получим производную произведения

$$\left[(y' + ly)e^{\int l_1 dx}\right]' = f(x)e^{\int l_1 dx}.$$

Правая часть – заданная функция; поэтому, интегрируя, будем иметь:

$$y' + ly = e^{-\int l_1 dx}\left(C_1 + \int f(x)e^{\int l_1 dx}\right) = F(x). \tag{1.4$_2$}$$

Обе части теперь умножаем на $e^{\int l dx}$. Очевидно, получим:

$$\left(ye^{\int l dx}\right)' = F(x)e^{\int l dx}.$$

Правая часть известна, поэтому для $y$ сразу записываем:

$$y = e^{-\int l dx}\left(C_2 + \int F(x)e^{\int l dx}dx\right), \tag{1.5}$$

где $C_1$ и $C_1$ – произвольные постоянные.

Итак, если $l$ удовлетворяет характеристическому уравнению Эйлера, то уравнение (1.1) допускает понижение порядка производной (см. (1.4)$_2$), что позволяет построить общее решение, даваемое формулой (1.5).

**Резонен вопрос:** каково будет характеристическое уравнение Эйлера, соответствующее линейному уравнению третьего порядка

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{1.6}$$

где $a, b, c$ и $f$ – заданные функции? Причем, если считать $l$ его решением, то как составить само характеристическое уравнение? Проверим, что будет, если исходить из соотношения, аналогичного $(1.4)_1$. То есть, (1.6) представим так:

$$(y''+A_1 y'+B_1 y)'+l(y''+A_1 y'+B_1 y)=f(x)\,, \tag{1.7}$$

где $A_1, B_1, l$ – неизвестные. Очевидно, что после раскрытия скобок это дает:

$$y'''+(A_1+l)y''+(A_1'+B_1+A_1 l)y'+(B_1'+B_1 l)=f(x)\,,$$

где должно иметь место:

$$\begin{cases} A_1+l=a, \\ A_1'+B_1+A_1 l=b, \\ B_1'+B_1 l=c. \end{cases} \tag{1.8}$$

(1.8) есть система с тремя неизвестными, которая приводима к виду

$$\begin{cases} (a-l)'-(a-l)^2+a(a-l)+B_1=b, \\ B_1'-(a-l)B_1+aB_1=c. \end{cases} \tag{1.9}$$

Однако она нового ничего не дает, кроме как уравнение третьего порядка

$$-\left(e^{\int ldx}\right)'''+a\left(e^{\int ldx}\right)''+(2a'-b)\left(e^{\int ldx}\right)'+(a''-b'+c)e^{\int ldx}=0\,.$$

Применим к (1.9) более эффективный способ, успешно применявшийся нами к сложным дифференциальным системам равенств первого порядка [6-8]. По этому способу система (1.9) принимает более простую форму

$$\begin{cases} (a-l)'-(a-l)^2+(a-l^*)(a-l)=\rho, \\ B_1'+\dfrac{1}{l^*}B_1^2+\left(\dfrac{al^*-b}{l^*}+\dfrac{\rho}{l^*}\right)B_1=-c, \\ l^*(a-l)+\rho=b-B_1, \end{cases} \tag{1.10}$$

эквивалентную (1.9), если $\rho$ – решение третьего уравнения. Относительно $l^*$ составляется равенство двух интегральных соотношений, получаемых разрешением $(a-l)$ и $B_1$ из первых двух уравнений (1.10) (см. [7] $(1.6)_1$, (3.11)).

Наконец, уже можем ответить на вышеперечисленные вопросы. По нашему мнению, для (1.6) характеристическими уравнениями является система (1.9). Наличие $B_1$ и $l$ служит гарантом понижения порядка (1.6). А чтобы не сомневаться, записываем его в виде (1.7) (см. (1.8)).

Характеристическая система (1.9) составляется из (1.8). $A_1(x), B_1(x)$ и $l$ называются характеристическими функциями.

Отыскание неизвестных $l$ и $B_1$ из первых двух уравнений (1.10) связано с определенными сложностями, ибо оба уравнения нелинейные. Их исследование – предмет особого рассмотрения (см. [7,8]). Чем порядок уравнения выше, тем вопрос понижения порядка сложнее. Поэтому нет смысла (при наличии переменных коэффициентов) заниматься понижением порядка производной, если порядок выше трех.

**П. 2. Характеристическое уравнение Эйлера.**

Метод исследования системы (1.10) тесно связан со способом рассмотрения уравнения (1.3). Поэтому зададим его в более общей форме

$$l' + A(x)l^2 + B(x)l + C(x) = 0 \qquad (B^2 - 4AC \neq 0), \tag{2.1}$$

где $A, B, C$ – заданные дифференциальные функции. Обозначив через $\lambda$,

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

корни квадратного трехчлена (2.1). Тогда оно допускает следующее представление

$$\frac{d}{dx}\ln\left|\frac{l-\lambda_1}{l-\lambda_2}\right| + \frac{1}{l-\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dx} - \frac{1}{l-\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dx} = -A(\lambda_1 - \lambda_2), \tag{2.2}$$

относительно которого доказывается важная теорема:

**Теорема 2.** Если выполняется равенство

$$e^{-\int A\lambda_1 dx}\int A\alpha\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A\lambda_1 dx}dx - e^{-\int A\lambda_2 dx}\int A\alpha\frac{d\lambda_2}{dx}e^{\int A\lambda_2 dx}dx = A\alpha(\lambda_1 - \lambda_2), \tag{2.3}$$

где $\alpha$ – неизвестна, то формулы

$$\begin{cases} l - \lambda_1 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Delta} e^{-\int A\lambda_1 dx}\displaystyle\int A\alpha\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A\lambda_1 dx}dx, \\ l - \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Delta} e^{-\int A\lambda_2 dx}\displaystyle\int A\alpha\frac{d\lambda_2}{dx}e^{\int A\lambda_2 dx}dx, \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$\Delta = e^{-\int A\lambda_2 dx}\int A\alpha\frac{d\lambda_2}{dx}e^{\int A\lambda_2 dx}dx - e^{-\int A\lambda_1 dx}\int A\alpha\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A\lambda_1 dx}dx,$$

обращают (2.2) в тождество.

Действительно, если формулы (2.4) внесем в (2.2), то после группировки получим:

$$\left(A\alpha+\frac{\Delta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{A\alpha\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A\lambda_1 dx}}{\int A\alpha\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A\lambda_1 dx}dx}-\frac{A\alpha\frac{d\lambda_2}{dx}e^{\int A\lambda_2 dx}}{\int A\alpha\frac{d\lambda_2}{dx}e^{\int A\lambda_2 dx}dx}\right)=0\,.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda$, то второй множитель отличен от нуля, а первый будет

$$\Delta+(\lambda_1-\lambda_2)A\alpha=0\,,$$

развернутая форма этого выражения есть (2.3).

Таким образом, чтобы формулы (2.4) служили решением уравнения (2.2), необходимо установить выполнимость соотношения (2.3).

Выполнимость (2.3) является условием, гарантирующим решение уравнения (2.2) в квадратурах. Исследуем (2.3). Дадим обозначение неизвестным интегралам

$$u=\int A\alpha\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A\lambda_1 dx}dx;\quad v=\int A\alpha\frac{d\lambda_2}{dx}e^{\int A\lambda_2 dx}dx\,. \tag{2.5}$$

Легко заметить, что (2.3) равносильно следующей системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}-\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\dfrac{d\lambda_1}{dx}u=-\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\dfrac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}v,\\[2ex] \dfrac{dv}{dx}+\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\dfrac{d\lambda_2}{dx}v=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\dfrac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}u.\end{cases} \tag{2.6}$$

Если система (2.6) выполняется, то и выполняется условие (2.3), и обратно: из выполнимости (2.3) следует выполнимость системы (2.6).

Но система (2.6) сложная, поэтому введем другую, более удобную систему,

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}-\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\dfrac{d\lambda_1}{dx}+l^*\dfrac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)u=\rho,\\[2ex] \dfrac{dv}{dx}+\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\dfrac{d\lambda_2}{dx}+\dfrac{1}{l^*}\dfrac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)v=-\dfrac{\rho}{l^*},\\[2ex] \dfrac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2}\dfrac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}u+\rho=-\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\dfrac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}v,\end{cases} \tag{2.7}$$

эквивалентную (2.6), если $\rho$ удовлетворяет третьему уравнению, а $l^*$ – решение нелинейного уравнения

$$\frac{dl^*}{dx} + A_1 l^{*2} + B_1 l^* + C_1 = 0\,, \qquad (2.8)$$

где

$$A_1 = -\frac{\frac{d\lambda_2}{dx}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\,;\; B_1 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\frac{d(\lambda_1+\lambda_2)}{dx}\,;\; C_1 = -\frac{\frac{d\lambda_1}{dx}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\,.$$

Исследуем уравнение (2.8). Также как и ранее, через $\lambda^*$ обозначим корни квадратного трехчлена равенства (2.8). Тогда (2.8) представляется

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left|\frac{l^* - \lambda_1^*}{l^* - \lambda_2^*}\right| + \frac{1}{l^* - \lambda_1^*}\frac{d\lambda_1^*}{dx} - \frac{1}{l^* - \lambda_2^*}\frac{d\lambda_2^*}{dx} = -A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\,. \qquad (2.9)$$

Подобно предыдущему положению, если выполняется равенство

$$e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_1^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_1^* dx}dx - e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx =$$
$$= A_1\alpha^*(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\,, \qquad (2.10)$$

то формулы

$$\begin{cases} l^* - \lambda_1^* = \dfrac{\lambda_1^* - \lambda_2^*}{\Delta^*} e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}\displaystyle\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_1^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_1^* dx}dx, \\ l^* - \lambda_2^* = \dfrac{\lambda_1^* - \lambda_2^*}{\Delta^*} e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}\displaystyle\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx, \end{cases} \qquad (2.11)$$

где

$$\Delta^* = e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx - e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_1^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_1^* dx}dx\,,$$

обращают уравнение (2.9) в тождество.

Необходимо установить выполнимость соотношения (2.10). Поскольку в ее левой части содержатся два неизвестных интеграла, то составляем подобное (2.10) соотношение

$$e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx - e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_1^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_1^* dx}dx =$$
$$= -A_1\alpha^*(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma\,, \qquad (2.12)$$

где

$$\gamma = \frac{\frac{d\lambda_1^*}{dx}}{\frac{d\lambda_2^*}{dx}}\left( e^{\int A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)dx} - \int \frac{\frac{d\lambda_2^*}{dx} e^{-\int A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)dx}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} dx \right). \qquad (2.13)$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема:** Если неизвестные интегралы, входящие в (2.10) и (2.12), определены соответственно

$$\int A_1 \alpha^* \frac{d\lambda^*}{dx} e^{\int A_1 \lambda^* dx} dx = \begin{cases} e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* dx}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{d\lambda_2^*}{dx} e^{\int A_1 \lambda_2^* dx} dx}, & \text{когда} \quad \lambda^* = \lambda_2^*, \\ e^{-\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_2^* dx} - e^{-\int A_1 \lambda_1^* dx}}{r(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma} \frac{d\lambda_1^*}{dx} e^{\int A_1 \lambda_1^* dt} dx}, & \text{когда} \quad \lambda^* = \lambda_1^*, \end{cases} \qquad (2.14)$$

где $r$ – решение нелинейного уравнения

$$\frac{dr}{dx} + A^* r^2 + B^* r + C^* = 0\,, \qquad (2.15)$$

$$A^* = \frac{e^{-\int A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)dx}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{d\lambda_2^*}{dx}; B^* = -\frac{\gamma \frac{d\lambda_2^*}{dx} - e^{\int A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)dx} \frac{d\lambda_1^*}{dx}}{(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma}; C^* = -\frac{\frac{d\lambda_1^*}{dx}}{(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma}\,,$$

то система равенств (2.10) и (2.12) обращаются в тождества.

Остановимся пока на изучении уравнения (2.15), а после перейдем к доказательству теоремы. Подстановка вида

$$r = \frac{1}{\int A^* dx - v_1} \qquad (2.16)$$

уравнение (2.15) приводит к уравнению классу Бернулли относительно функции $v_1$. Непосредственная подстановка (2.16) в (2.15) после группировки дает

$$\frac{dv_1}{dx} + C^* v_1^2 + C^* \int A^* dx \cdot v_1 = 0 \qquad (B^* + C^* \int A^* dx \equiv 0)\,.$$

Следовательно, (2.16) есть решение уравнения (2.15). Но, если $r$ – решение (2.15), то, как легко проверить, соотношение вида

$$e^{-\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_2^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}}{r\left(\lambda_1^*-\lambda_2^*\right)\gamma}\frac{d\lambda_1^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_1^* dx}dx} = re^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx}, \quad (2.16)_1$$

есть тождество.

Докажем теперь теорему, то есть, выполнимость условия (2.10). В левую часть (2.10) вместо неизвестных интегралов подставим их соответствующие значения из (2.14)

$$e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}e^{-\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_2^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_1^* dx}}{r(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma}\frac{d\lambda_1^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_1^* dx}dx} -$$
$$-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx} = A_1\alpha^*(\lambda_1^*-\lambda_2^*),$$

или, воспользовавшись тождеством $(2.16)_1$,

$$e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx}\left(re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}\right) = A_1\alpha^*(\lambda_1^*-\lambda_2^*).$$

Обе части умножаем на $\dfrac{1}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\dfrac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}$,

$$\frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}\cdot e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx} =$$
$$= A_1\alpha^*\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx} = \frac{d}{dx}\int A_1\alpha^*\frac{d\lambda_2^*}{dx}e^{\int A_1\lambda_2^* dx}dx.$$

Левая часть равенства суть производная экспоненциальной функции по $x$; в правой части интеграл заменяем его соответствующим значением при $\lambda=\lambda_2$ согласно формуле (2.14). В результате будем иметь:

$$\frac{d}{dx}e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}dx} = \frac{d}{dx}e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dx}-e^{\int A_1\lambda_2^* dx}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}dx}, \quad (2.17)$$

что и требовалось.

При доказательстве нам по существу помогла выполнимость тождества $(2.16)_1$; оно всегда имеет место, ибо $r$ является решением нелинейного уравнения (2.15).

Мы доказали тождественную выполнимость условия (2.10); аналогичным образом доказывается выполнимость второго равенства (2.12).

Согласно теореме, если (2.10) удовлетворено, то формулы (2.11) обращают уравнения (2.9) в тождество, то есть (2.8) выполняется, и $l^*$ есть вполне определенная функция, определенная из (2.11).

Таким образом, (2.7) есть совместная система равенств. Из первых двух уравнений для $u$ и $v$ соответственно строим:

$$\begin{cases} u = e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}\left(u_0 + \right. \\ \left. + \int \rho e^{-\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx} dx\right), \\ v = e^{-\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_2}{dx}+\frac{1}{l^*}\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}\left(v_0 - \right. \\ \left. - \int \frac{\rho}{l^*} e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_2}{dx}+\frac{1}{l^*}\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx} dx\right), \end{cases} \tag{2.18}$$

причем, поскольку (2.8) удовлетворяет, то имеет место тождественное равенство

$$e^{-\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx} = \frac{1}{l^*} e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_2}{dx}-\frac{1}{l^*}\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}. \tag{2.19}$$

Если теперь ввести обозначение

$$\Phi = \int \rho e^{-\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx} dx, \tag{2.20}$$

то в силу тождества (2.19), формулам (2.18) придадим более удобный вид

$$\begin{cases} u = e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}(u_0 + \Phi), \\ v = \frac{1}{l^*} e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}(v_0 - \Phi), \end{cases} \tag{2.20$_1$}$$

где $u_0$ и $v_0$ – произвольные постоянные.

Подставив значения $(2.20)_1$ в третье уравнение системы (2.7), после группировки получим

$$\frac{d\Phi}{dx}+\left(\frac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}-\frac{1}{l^*(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)\Phi=L_0, \quad (2.21)$$

где

$$L_0=-\frac{\frac{d\lambda_1}{dx}}{l^*(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}v_0-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}u_0 .$$

Отсюда для функции $\Phi$ следует:

$$\Phi(x)=e^{-\int\left(\frac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}-\frac{1}{l^*(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}\left[\Phi_0+\right.$$

$$\left.+\int L_0 e^{-\int\left(\frac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}-\frac{1}{l^*(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{d\lambda_1}{dx}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}dx\right], \quad (2.22)$$

где $\Phi$ – произвольная постоянная.

Сравнивая правую часть формулы (2.22) с правой частью обозначения (2.20), найдем $\rho$:

$$\rho=e^{\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{dx}+l^*\frac{d\lambda_2}{dx}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dx}\right)dx}\frac{d\Phi}{dx}, \quad (2.23)$$

где под $\frac{d\Phi}{dx}$ подразумевается производная правой части формулы (2.22). Полученное значение для $\rho$ (см.(2.23)) и обеспечивает выполнимость третьего уравнения системы (2.7) и этим эквивалентность (2.6) и (2.7) доказана. Параллельно уточнили формулы $(2.20)_1$, или, что то же самое, построили функции $u$ и $v$, удовлетворяющие уравнениям (2.6). Но, из выполнимости системы (2.6) следует удовлетворение условия (2.3); причем $\alpha_1$ и $\alpha_2$ уже вполне определенные функции согласно обозначениям (2.5).

В итоге доказано, что, как было сформулировано, выполнимость условия (2.3) является гарантирующим свойством для построения решения уравнения (2.2) в квадратурах, причем таким решением служат формулы (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Госиздат ФМ литературы. М., 1961. 704 с.
2. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1955. 656 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для научных работников, инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.: Наука, 1986. 544 с.
4. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Госиздат техн.лит., 1953. 468 с.
6. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их применение. Ч.II. Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2004. С.116.
7. Чочиев Т.З. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Владикавказ, 2009. С.144-155.
8. Чочиев Т.З. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка // Вестник Харьковского нац. университета, № 890, вып.13, 2010. С. 264-269.

Надійшла – 31.05.2011.