УДК 519.85

Метод последовательного раскрытия модулей в задачах негладкой оптимизации

А. И. Косолап

Украинский государственный химико-технологический университет, Украина

Предлагается новый метод для решения негладких оптимизационных задач. Этим методом такие задачи преобразуются к последовательности гладких, для решения которых разработаны эффективные методы. Для решения невыпуклых и дискретных задач использован метод точной квадратичной регуляризации. Проведенные численные эксперименты показали преимущества метода последовательного раскрытия модулей для решения задач негладкой оптимизации.

Ключевые слова: *негладкие функции, негладкая оптимизация, метод последовательного раскрытия модулей, точная квадратичная регуляризация.*

Пропонується новий метод для розв’язку негладких оптимізаційних задач. Цим методом такі задачі перетворюються до послідовності гладких, для розв’язку яких розроблені ефективні методи. Для розв’язку неопуклих та дискретних задач використано метод точної квадратичної регуляризації. Проведені чисельні експерименти показали перевагу методу послідовного раскриття модулів для розв’язку задач негладкої оптимізації.

Ключові слова: *негладкі функції, негладка оптимізація, метод послідовного розкриття модулів. точна квадратична регуляризація.*

We offer the new method for the solution of nonsmooth optimization problems. Such problems are transformed into the sequence of smooth problems. Effective methods for their solution are already developed. We also use the method of exact quadratic regularization for the solution of nonconvex and discrete problems. Numerical experiments have shown the advantages of the method of successive modules expansion for the solution of nonsmooth optimization problems.

Key words: *nonsmooth functions, nonsmooth optimization, method of successive modules expansion, exact quadratic regularization.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Оптимизационные модели возникают в любой сфере человеческой деятельности. Выбор оптимальных решений в инженерном проектировании, совершенствовании технологий, распределении ограниченных ресурсов, искусственном интеллекте и т.п. приводит к построению оптимизационных моделей. В таких моделях требуется найти максимум или минимум целевой функции при наличии ограничений на переменные. Число переменных может быть достаточно большим. Однако если целевая функция и функции в ограничениях оптимизационной задачи являются гладкими, то для нее разработаны достаточно эффективные оптимизационные методы, позволяющие находить оптимальные значения переменных, число которых может быть достаточно большим [1–2]. При решении сложных задач целевая функция или функции в ограничениях могут быть негладкими [3]. Например, задачи оптимизации с негладкими нормами. Существующие методы решения таких задач недостаточно эффективны [4], но многочисленные приложения негладкой оптимизации требуют поиска новых методов.

2. Постановка задачи и метод ее решения

В задаче оптимизации

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,...,m, x \in E^n\} \tag{1}$$

предполагается, что все функции $f_i(x)$ – выпуклые и непрерывные, x – n-мерный вектор, а E^n – евклидово пространство. При данных предположениях задача имеет решение (если ее допустимое множество не пусто), и ее точка локального минимума x^* будет также глобальным минимумом. Большинство методов для решения задачи (1) использует градиенты функций $f_i(x)$, которые указывают на направления их наибольшего возрастания. В случае, когда функции $f_i(x)$ – негладкие, градиенты заменяются субградиентами. Субградиент функции в точке определяется неоднозначно, что порождает многочисленные алгоритмы негладкой оптимизации. Если обратное направление к градиенту указывает на наибольшее убывание функции, то для субградиента это условие не выполняется.

Большинство негладких функций можно представить в виде суперпозиций гладких функций, которые содержат модули. Например, если допустимым множеством задачи (1) есть выпуклый многогранник, то его можно представить в виде

$$\{x \mid \sum_{j=1}^{m_i} | a_{ij}^T x + b_{ij} | \le d_i, i = 1,...,m\},$$

где a_{ij}, x – n-мерные векторы, а b_{ij}, d_i – числа. Такой многогранник невозможно представить системой линейных неравенств, так как число его граней может быть больше 2^n. Часто требуется минимизировать функцию $f(x) = \max\limits_{1\le i\le m}\{f_i(x)\}$. Такую функцию также можно представить выражением содержащим модули, учитывая, что

$$\max\{f_1(x), f_2(x)\} = \frac{| f_1(x) - f_2(x) | + f_1(x) + f_2(x)}{2}.$$

Это равенство можно использовать для представления функции $f(x)$ суперпозициями модулей для любого m. Большое число прикладных задач содержит целочисленные переменные. Это условие может быть задано неравенством

$$|||||...| x | -1 | -1 | ... -1 | -0{,}5 | -0{,}5 | \le 0.$$

График функции, определяющей это неравенство приведен на Рис. 1.

Существует много задач на перестановках, в которых каждая переменная задачи (1) принимает только одно из значений $1,2,...,n$ и $x_i \ne x_j, \forall i \ne j$. К этому классу относятся задачи теории расписаний, коммивояжера. Приведенное условие может быть задано в виде

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(t, x_i) \le 1, \forall t \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = n(n+1)/2, \tag{2}$$

где функции $g_i(t, x_i)$ равны

$$g_i(t, x_i) = \frac{1}{2}|t - x_i| - |t - x_i - 1| + \frac{1}{2}|t - x_i - 2|.$$

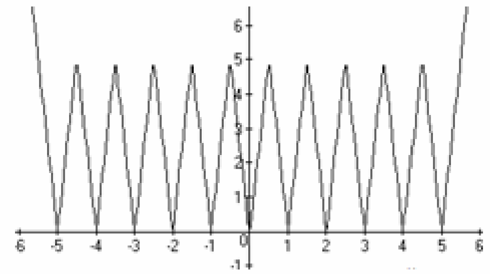

Рис. 1. Функция содержит 7 модулей

Условие (2) содержит континуум ограничений, но оно эквивалентно конечной системе неравенств (достаточно, чтобы ограничения (2) выполнялись в точках максимума функций $g_i(t, x_i)$)

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(j, x_i) \le 1, \forall t \ge 0,\ j = 1,...,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = n(n+1)/2.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции задачи (1) содержат суперпозиции модульных выражений. Будем называть такие функции – *модульными*. Преобразуем задачу (1) к виду

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x) \le x_{n+1}, f_i(x) \le 0, i = 1,...,m, x \in E^n\}. \quad (3)$$

При подстановке фиксированного значения x в ограничения задачи (3) модульные выражения раскрываются и задача (3) становится гладкой. Таким образом, пространство E^n можно разбить на непересекающиеся области, в каждой из которых ограничения задачи (3) будут определяться гладкими функциями. Так как число таких областей будет большим, рассмотрим метод последовательного раскрытия модулей для решения задачи (3). Обозначим функции $f_i(x)$ после раскрытия модулей в точке x^0 через $f_i(x, x^0)$. Алгоритм метода будет следующим.

Шаг 1. Выберем произвольную начальную точку x^0 и раскроем в ней модули ограничений задачи (3). Решим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x, x^0) \le x_{n+1}, f_i(x, x^0) \le 0, i = 1,...,m\}.$$

Пусть x^1 – ее решение.

Шаг 2. Проверим выполнимость ограничений задачи (3) в точке x^1. Если она допустима, то решение задачи (3) найдено, оно достигается в точке x^1. В противном случае, раскроем модули в ограничениях задачи (3) в точке x^1 и решим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x, x^0) \le x_{n+1}, f_0(x, x^1) \le x_{n+1}, f_i(x, x^0) \le 0, f_i(x, x^1) \le 0, i = 1,...,m\}.$$

Обозначим ее решение через x^2 .

Шаг k. Проверим выполнимость ограничений задачи (3) в точке x^{k-1}. Если она допустима, то решение задачи (3) найдено, оно достигается в точке x^{k-1}. В противном случае, раскроем модули в ограничениях задачи (3) в точке x^{k-1} и режим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x, x^j) \le x_{n+1}, f_i(x, x^j) \le 0, j = 1,...,k-1, i = 1,...,m\}.$$

Если ее решение x^k допустимо для задачи (3), то $x^* = x^k$.

Шаг $k+1$. Полагаем $k = k+1$ и переходим к шагу k.

Учитывая то, что число областей гладкости функций задачи (3) конечно, рассмотренный алгоритм сходится за конечное число итераций. Число активных ограничений в точке минимума, как правило, равно n. Поэтому в среднем необходимо n итераций для достижения точки минимума.

3. Невыпуклые задачи негладкой оптимизации

Во многих прикладных задачах функции в задаче (1) является невыпуклыми. Тогда эта задача имеет множество локальных минимумов. Используем для ее решения метод точной квадратичной регуляризации [5]. Суть этого метода в следующем. Преобразуем задачу (1) к виду

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x) + s \le x_{n+1}, f_i(x) \le 0, i = 1,...,m, x \in E^{n+1}\}, \qquad (4)$$

где параметр s удовлетворяет условию

$$f_0(x^*) + s \ge \|x^*\|^2,$$

x^* – решение задачи (1). Далее, используем преобразование пространства $x = Az$, где матрица A порядка $(n+1)\times(n+1)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ z_1 & z_2 & ... & z_{n+1} \end{pmatrix},$$

что сводит задачу (4) к следующей

$$\min\{\| z \|^2 \mid f_0(\bar{z}) + s \le \| z \|^2, f_i(\bar{z}) \le 0, i = 1,...,m, z \in E^{n+1}\}, \qquad (5)$$

где $\bar{z} = (z_1,...,z_n)$, $z = (\bar{z}, z_{n+1})$.

Тогда существует такое значение $r > 0$, что все функции

$$g_0(z) = f_0(\bar{z}) + s + (r-1)\| z \|^2, g_i(z) = f_i(\bar{z}) + r\| z \|^2, i = 1,...,m$$

будут выпуклыми для допустимых значений z.

Таким образом, задача (5) сведена к виду

$$\min\{\|z\|^2 \mid g_i(z) \le d, i=0,…, m, r\|z\|^2 = d\}, \qquad (6)$$

где все $g_i(z)$ – выпуклые функции. Следовательно, задача (1) преобразована к минимизации квадрата нормы вектора z, где переменными задачи (6) есть (z, d) – $(n + 2)$-мерный вектор. Решим методом последовательного раскрытия модулей соответствующую (6) выпуклую задачу

$$\min\{d \mid g_i(z) \le d, i = 0,...,m, r\| z \|^2 \le d\}. \qquad (7)$$

Если (z^*, d^*) – решение задачи (7), то $x^* = \bar{z}^*$ – точка глобального минимума задачи (1). В противном случае, решаем задачу

$$\max\{\| z \|^2 \mid g_i(z) \le d, i = 0,...,m\} \tag{8}$$

при фиксированных значениях d. При увеличении переменной d значение $r\| z(d) \|^2 - d$ монотонно возрастает, поэтому минимальное значение d^*, при котором выполняется условие $r\| z(d^*) \|^2 = d$, находим методом дихотомии. Таким образом, d^* определит решение задачи (1) $x^* = \bar{z}(d^*)$. Задача (8) при различных значениях d решалась методом последовательного раскрытия модулей, а соответствующая выпуклая гладкая задача модифицированным методом внутренней точки [1].

4. Численные эксперименты

Для рассмотренного метода разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты. Для сравнения использовался пакет Risk Solver, который решает оптимизационные задачи до 2000 переменных и реализует следующие методы глобальной оптимизации: мультистарт, интервальный анализ, методы ветвей и границ, генетические и эволюционные методы, табу и метод рассеяния. Численные эксперименты показали значительное преимущество метода последовательного раскрытия модулей. Негладкая задача

$$\min\{\sum_{i=1}^{10} | a_i^T x + b_i |\}, \tag{9}$$

где ее параметры заданы Табл. 1, решалась с помощью пакета Risk Solver, было получено значение функции равное 30.

Табл. 1. Параметры задачи (9)

a_1	1	1	1	5	1	2	3	6	–2	–5	b_1	56
a_2	2	–3	0	0	0	0	–12	–52	15	25,3	b_2	15
a_3	5	–55	6	–5	25	12	4	2	14	–52	b_3	58
a_4	–12	24	–55	64	0	0	0	0	–1	–22	b_4	–55
a_5	3	–3	12	1	–10	–5	5	–95	4	–74	b_5	–100
a_6	–1	1	0	2	–1	0	1	1	2	1	b_6	1
a_7	–56	5	1	3	–25	2	4	–4	12	–14	b_7	15
a_8	12	1	0	1	0	–11	–2	1	9	0	b_8	1
a_9	14	36	–33	–52	–15	–5	–3	1	0	0	b_9	8
a_{10}	5	12	0	0	0	–5	–5	–5	1	14	b_{10}	12

Методом последовательного раскрытия модулей решалась эквивалентная задача

$$\min\{e^T x \mid \sum_{i=1}^{10} | a_i^T x + b_i | \le r\},$$

где $e = (1,...,1)$, а r убывало до нуля. Найдено решение задачи (9) $r = 0{,}00001$ в точке

$$x^* = (-19{,}3879764;-3{,}284240132;-13{,}57045411;-9{,}310577672;38.1118518;$$
$$-42{,}98323925;60{,}65556767;-11{,}58242605;-10{,}6301706;11{,}81646044).$$

4. Выводы и направления дальнейших исследований

Предложен новый метод последовательного раскрытия модулей для преобразования негладких задач к последовательности гладких. Численные эксперименты показали его эффективность для решения данного класса задач. При использовании точной квадратичной регуляризации этот метод применим также для решения невыпуклых и негладких задач, в частности дискретных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. – Springer, 2006. – 685 p.
2. Luenberger D.G., Ye Y. Linear and nonlinear programming. – Springer, 2008. – 546 p.
3. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
4. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации. – М.: Изд. МЦНМ, 2010. – 281 с.
5. Косолап А.И. Метод квадратичной регуляризации для решения систем нелинейных уравнений // Журн. обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – № 4. – С.44–50.

Надійшла у першій редакції 25.03.2013, в останній - 05.04.2013.