

УДК 532.5

Процессы переноса скалярных полей в течениях вязкой жидкости в криволинейных трубах в приближении Дина

А. А. Гуржий, А. В. Шалденко

Национальный технический университет “КПИ”, Украина

В работе рассматривается задача адвекции выделенной жидкости внутри криволинейной трубы с круговым поперечным сечением в приближении Дина. Показано, что поле скорости в поперечном сечении претерпевают каскад бифуркаций, связанный с появлением периодических эллиптических и периодических гиперболических точек. Анализ численных результатов показывает, что зоны с интенсивными режимами адвекции в рассматриваемом течении формируются в областях, прилегающих к периодическим гиперболическим точкам.

Ключевые слова: течение Дина, бифуркационная диаграмма, задача адвекции, области интенсивной адвекции, численный эксперимент.

В роботі розглядається задача адвекції виділеної рідини усередині криволінійної труби з круговим поперечним перерізом у наближенні Діна. Показано, що поле швидкості в поперечному перерізі зазнає каскад бифуркацій, пов'язаний з появою періодичних еліптичних і періодичних гіперболічних точок. Аналіз чисельних результатів показує, що зони з інтенсивними режимами адвекції в розглянутій течії формуються в областях, прилеглих до періодичних гіперболічних точок.

Ключові слова: Течія Діна, бифуркаційна діаграма, задача адвекції, області інтенсивної адвекції, чисельний експеримент.

The advection problem of separated fluid inside curved pipes with circular cross-section at Dean approximation is considered in the article. The velocity field in the transverse cross-section undergoes a cascade of bifurcations associated with an appearance of periodic elliptic and periodic hyperbolic points is shown. Analyze of numerical results shows that the zones with intensive advection regimes in the flow under consideration are formed in regions near periodic hyperbolic points.

Key words: Dean flow. Bifurcation diagram, advection problem, intensive advection regions, numerical experiment.

1. Введение

Перемешивание разного рода пассивных составляющих в течениях жидкости является сложным природным явлением, которое включает два важнейших процесса: деформация пятна в заданном поле скорости, и размыв границ пятна молекулярной диффузией [1]. Анализ геометрических и временных масштабов течений позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема перемешивания сводится к анализу деформации выделенных областей жидкости в заданном поле скорости. Такая задача в научной литературе [2] получила название задача об адвекции.

Известно, что при определенных условиях некоторые ламинарные течения проявляют интенсивные режимы адвекции. В этих течениях две прилегающие жидкие частицы отдаляются одна от другой экспоненциально со временем – свойство, характерное для хаотических детерминированных динамических систем. По аналогичному закону растягивается материальная линия, составленная из таких частиц. В современной литературе [2,3] для течений, которые проявляют такие свойства, предложен термин “хаотическая адвекция”.

С практической точки зрения одной из важных задач вихревой динамики является течение Дина [4], которое развивается в криволинейных трубах [5, 6]. Численное решение уравнений Навье-Стокса [5] показывает, что течение теряет устойчивость для $Dn_{cr} \approx 600$ (где Dn – число Дина), смещая положение максимальной осевой скорости в поперечном сечении трубы на 0.38 (где a – радиус поперечного сечения трубы) и уменьшая объемный расход примерно на 28% по отношению к прямолинейной трубе. Экспериментальные исследования [7] показывают, что решение Дина [4] в приближении $Dn < Dn_{cr}$ достаточно хорошо описывает движение вязкой жидкости в криволинейных трубах.

В работе [8] рассматривается адвекция системы жидких частиц в сегментированной криволинейной трубе постоянного радиуса, в которой каждый ее сегмент периодически смещается относительно другого на угол $\pm\theta$ в поперечном сечении. Анализ сечений Пуанкаре и статистический анализ распределения жидких частиц показали, что геометрическая периодичность сегментов при неизменной приложенной разности давления приводит к существенной интенсификации процессов адвекции, начиная с некоторого критического значения $\pm\theta_{cr}$. Однако сравнительный анализ режимов адвекции выделенных областей жидкости при различных параметрах течений до настоящего времени в научной литературе не проводился.

Целью настоящей работы является выявление основных закономерностей процесса переноса выделенной жидкости в сегментированной криволинейной трубе с постоянным круговым поперечным сечением.

2. Критерии хаотической адвекции жидкости

Неинертная (пассивная) жидкая частица всегда перемещается со скоростью внешнего окружающего потока. Поэтому утверждение равенства скорости частицы и скорости внешнего течения приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями адвекции [2]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

Другими словами, адвекция жидкости фактически сводится к анализу траекторий системы лагранжевых частиц в эйлеровом поле скорости. Главная сложность этой задачи связана с переходом от движения дискретной системы жидких частиц к деформациям непрерывных линий и поверхностей, ограничивающих выделенную жидкость.

При анализе режимов хаотической адвекции жидкостей исследователи пользуются основным критерием [9]: хаотическая (интенсивная) адвекция – процесс, при котором длина в двумерном случае (или площадь в трехмерном случае) границ выделенной жидкости растягивается во времени по экспоненциальному закону; регулярная (слабая) адвекция – процесс, при котором длина в двумерном случае (или площадь в трехмерном случае) границ выделенной жидкости растягивается во времени в первом приближении по линейному или другому закону.

В настоящее время универсального критерия идентификации хаотического движения отдельных жидких частиц не существует. В хаотической динамике

применяется несколько критериев хаотического движения отдельных жидких частиц [9,10]. Одним из самых простых критериев является анализ фазовой траектории жидкой частицы (маркера): если ее траектория имеет определенную упорядоченность и предсказуемость, то движение частицы считается регулярным; если ее траектория не содержит признака упорядоченности, то движение частицы считается хаотическим.

Важным качественным критерием является сечение Пуанкаре – система точек, полученная в результате пересечения фазовой траекторией произвольно выбранной плоскости в выбранном направлении. Фазовая траектория считается регулярной, если система точек сечения Пуанкаре формирует упорядоченную структуру или ложится на регулярную кривую. Если траектория маркера формирует нерегулярную последовательность точек, то движение является хаотическим.

При хаотическом движении две близлежащие траектории в среднем расходятся. Мерой расхождения служат показатели Ляпунова [9,10]. Методика их определения сводится к совместному интегрированию уравнений движения (1) с линеаризованными уравнениями

$$\frac{dz_i}{dt} = [A] z_j, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad \text{где} \quad [A] = \left. \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}(t)}. \quad (2)$$

В расчетах принимают $|z_i^0| = 1.0$.

Наибольший показатель Ляпунова определяется следующим образом:

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|z_i(t)|}{|z_i^0|}. \quad (3)$$

При хаотическом движении $\Lambda > 0$, две соседние траектории, в среднем, расходятся. При регулярном движении $\Lambda < 0$, траектории, в среднем, сходятся.

При анализе процессов адвекции в периодических течениях можно найти такие частицы, которые через интервал времени nT (где T – период движения) возвращаются в фазовом пространстве в начальное положение \mathbf{x} . Эти точки называют периодическими точками порядка n . Для их определения необходимо выполнить условие

$$[\mathbf{T}]^n \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = 0. \quad (4)$$

Анализ корней λ_i характеристического уравнения линеаризованной системы (4) позволяет выделить в периодическом течении гиперболические точки ($\lambda_i > 1$), эллиптические точки ($\lambda_i < 1$) и точки параболического типа ($\lambda_i = 1$).

3. Поле скорости в течении Дина

Аналитические выражения для компонент поля скорости ламинарного течения в криволинейной трубе с круговым поперечным сечением впервые было получено в работе [4] в приближении $Dn \ll 1$. В этой части работы приведены основные этапы вывода выражений для компонент поля скорости с целью упорядочения обозначений, примененных в этой работе.

Рассмотрим ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом динамической вязкости μ внутри сегмента трубы с круговым

поперечним сечением a и радиусом кривизны R (рис.1). Каждый сегмент трубы имеет угловую протяженность θ_0 , в локальной системе координат, связанной с центром кривизны сегмента. Плоскость последующего сегмента по отношению к предыдущему сегменту повернута на фиксированный угол χ .

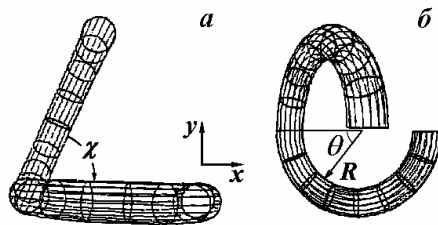


Рис.1. Геометрия задачи

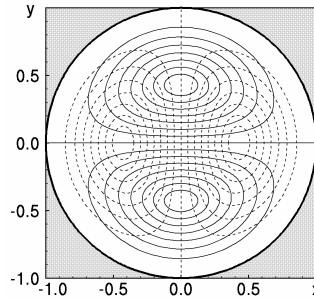


Рис.2. Траектории движения жидких частиц в поперечном сечении трубы

Полагаем, что течение в сегменте трубы является стационарным и значения компонент поля скорости $\{u, v, w\}$ не зависят от угловой координаты θ . В каждом поперечном сечении криволинейной трубы можно ввести (x, y) -плоскость, которая связана с полярной системой координат (r, φ) выражениями: $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi$.

В дальнейшем задачу удобно пронормировать на радиус a трубы и характерную осевую скорость W течения.

В предположении $a \ll R$ для ламинарного течения с малыми числами Рейнольдса Re решение задачи разделяется на течение Пуазейля вдоль трубы с характерной осевой скоростью W и поперечное течение, компоненты поля скорости которого выражаются через скалярную функцию тока

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

В этом случае безразмерные уравнения, описывающие распределение осевой скорости $w(r, \varphi)$ течения и функции тока, имеют вид

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{a^2}{RW\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla^2 \Psi + 2Dn w \left(\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (7)$$

где Dn – безразмерный параметр задачи – число Дина [8]

$$Dn = \frac{W^2 a^2}{R\nu} = \left(\frac{Wa}{\nu} \right)^2 \frac{a}{R} = Re^2 \frac{a}{R}. \quad (8)$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости.

Далее уравнения (6,7) раскладываются в ряд Тейлора по малому параметру Dn . Первый порядок разложения описывает течение Пуазейля в прямолинейной трубе с круговым поперечным сечением [11], а следующий порядок для

уравнения (7) – поперечное течение, которое формируется в криволинейной трубе [12]. В прямоугольной системе координат, связанной с осью трубы, ведущие слагаемые поля скорости принимают вид (здесь $r^2 = x^2 + y^2$)

$$u_x = \frac{\alpha}{1152} \left\{ h(r) + \frac{y^2}{r} h'(r) \right\}, \quad u_y = \frac{\alpha}{1152} \frac{xy}{r} h'(r), \quad w = \frac{\beta}{4} (1 - r^2). \quad (9)$$

где $h(r) = \frac{(4 - r^2)}{4} (1 - r^2)^2$, $\alpha = \text{Dn}C^2$, $\beta = \frac{\text{Dn}C}{\text{Re}}$, $C = -\frac{a^2}{RW\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta}$.

Более высокие порядки разложения не учитываются.

Принимая во внимание уравнение адвекции (1), можно заметить, что динамическая система, описывающая движение отдельных жидких частиц в рассматриваемом течении, является автономной. Интегрирование задачи адвекции по времени можно изменить на интегрирование вдоль осевой координаты θ . Разделив первые два уравнения (9) на третье уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{G}{1152} (4 - 5x^2 - 23y^2 + x^4 + 8x^2y^2 + 7y^4), \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{G}{192} xy(3 - x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (10)$$

где $G = \alpha / \beta$. Эти уравнения описывают движение жидких частиц по мере их продвижения вдоль трубы по угловой координате θ .

4. Адвекции жидкости в криволинейных трубах

Рассмотрим ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости внутри последовательных периодических сегментов криволинейной трубы в приближении Дина. Пусть протяженность каждого сегмента трубы $\theta_0 = \pi$, а плоскость каждого последующего сегмента трубы повернута по отношению к плоскости предыдущего сегмента на угол $\chi = \pi/2$.

Движение жидкости вдоль трубы описывается системой уравнений (1) с начальными условиями: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Она движется по замкнутым траекториям (рис.2), образуя два циркуляционных течения в верхней и нижней частях трубы (сплошные линии). На следующем сегменте циркуляционные течения поворачиваются на угол χ (штриховые линии). Пересечение фазовых траекторий на соседних сегментах трубы часто приводит к интенсификации процессов адвекции [8, 9].

На рис.3 показано сечение Пуанкаре для различных значений G . Дискретизация фазовых траекторий проводилась после прохождения жидкой частицы двух сегментов, составляющих период течения. При $G=30.0$ (рис.3,а), сечение Пуанкаре является регулярным во всей области поперечного сечения трубы. Имеются две периодические эллиптические точки ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$) первого порядка. При $G=50.0$, сечение Пуанкаре усложняется (рис.3,б), а регионы регулярного движения частиц уменьшаются. В области, прилегающей к эллиптическим периодическим точкам ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$), появляются регулярные острова четвертого порядка ($E_1^{(3)}$, $E_2^{(3)}$, $E_3^{(3)}$, $E_4^{(3)}$ и $E_1^{(4)}$, $E_2^{(4)}$, $E_3^{(4)}$, $E_4^{(4)}$, соответственно).

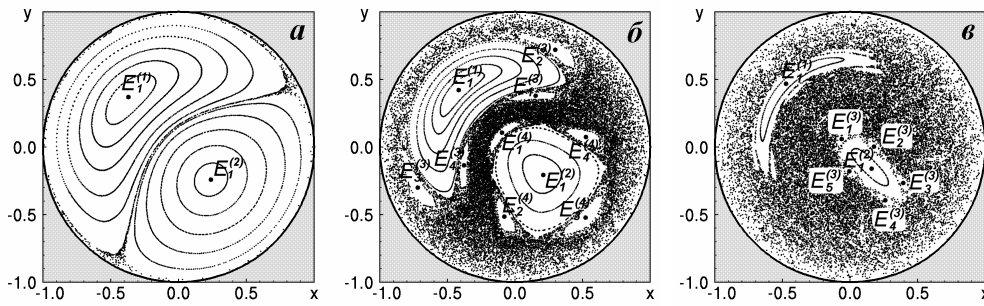


Рис.3. Сечение Пуанкаре течения Дина для разных значений параметра G

При $G = 70.0$ хаотическая область сечения Пуанкаре (рис.3,в) становится преобладающей в поперечном сечении. Около эллиптической точки $E_1^{(2)}$ появляется система эллиптических точек ($E_1^{(3)}, E_2^{(3)}, \dots, E_5^{(3)}$) пятого порядка. Дальнейшее увеличение G приводит к тому, что большая часть сечения Пуанкаре заполняется хаотической последовательностью точек.

Бифуркационная диаграмма периодических точек первого порядка в рассматриваемом течении при изменении параметра G показана на рис.4 (z – координаты точек на прямой $y = -x$). Для малых значений G течение обладает только двумя эллиптическими (E) периодическими точками. При $G=177$ происходит первая бифуркация, при которой образуются две пары эллиптических и гиперболических (H) точек. В дальнейшем (при $G=225$) происходит образование одной эллиптической и трех гиперболических периодических точек. Схемы пространственного положения периодических точек при некоторых значениях G показаны на рисунке, на котором эллиптические периодические точки нанесены сплошными кружочками, а гиперболические периодические точки – крестиками.

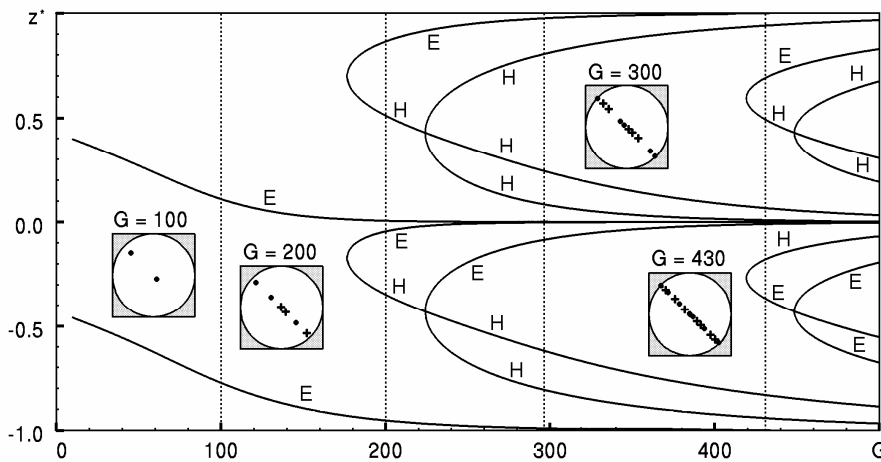


Рис.4. Бифуркационная диаграмма течения Дина при $\chi = \pi/2, \theta_0 = \pi$

Процесс адвекции жидкости с границами в виде квадрата $ABCD$, охватывающего эллиптическую периодическую точку E первого порядка при $G = 200$, показан на рис.5,а. Траектории точек A , B , C и D показаны на рисунке сплошной линией, а траектория точки E нанесена штриховой линией. В первом сегменте жидкость движется в направлении, указанном стрелкой и возвращается в центральную часть сечения ($A_1B_1C_1D_1$). Через два сегмента, составляющих период рассматриваемого течения, выделенная жидкость ($A_2B_2C_2D_2$) возвращается в область, прилегающую к эллиптической периодической точке E .

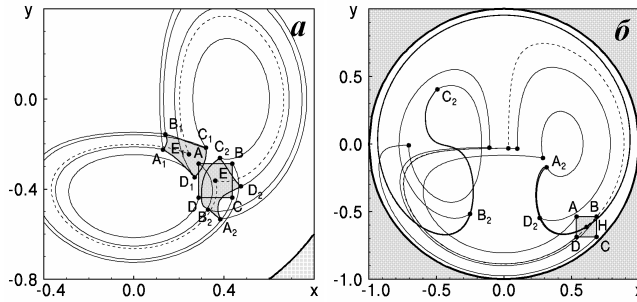


Рис.5. Адвекция квадратной области, охватывающей эллиптическую (а) и гиперболическую (б) периодические точки при $G=200$

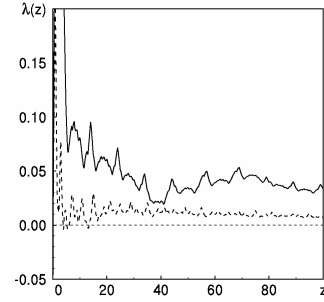


Рис.6. Изменение наибольшего показателя Ляпунова для маркеров

Некоторые особенности процесса адвекции можно подчеркнуть из примера на рис.5,б, на котором показана адвекция квадрата $ABCD$, охватывающего в начальный момент гиперболическую периодическую точку H первого порядка. За один период точка H возвращается в свое исходное положение. Выделенная жидкость испытывает сильное растяжение, квадрат вытягивается в тонкую полосу, которая располагается вдоль границы течения. При этом стороны AD и BC растянулись значительно меньше по сравнению со сторонами AB и CD .

Рассмотрим траектории движения двух жидких частиц, которые в начальный момент были расположены в регулярной ($x_1^0 = 0.2$, $y_1^0 = 0.0$) и хаотической ($x_2^0 = 0.6$, $y_2^0 = 0.3$) зонах сечения Пуанкаре для $G = 50.0$ (рис.3,б). На рис.6 показано изменение наибольшего показателя Ляпунова по мере прохождения частиц вдоль трубы, $z = R\theta$. Маркер 1 движется по регулярной траектории, наибольший показатель Ляпунова (штриховая линия) с течением времени стремится к $\Lambda \approx 0.01$. Аналогичная зависимость для маркера 2 (сплошная линия) стремится к значению $\Lambda \approx 0.04$, которое можно отнести к хаотическому режиму движения. В рассматриваемом течении можно выделить область, которая в течение одного периода может претерпевать некоторые деформации, а в конце периода возвращается в свое начальное положение. Выделим в начальный момент объем A жидкости, сформированный регулярным сечением Пуанкаре около эллиптической периодической точки E на рис.3,б при $G = 50.0$. Одновременно выделим малую круговую область B радиуса $R_0 = 0.15$ с центром в точке ($x_c = 0.6$, $y_c = 0.3$), которая расположена в хаотической зоне сечения Пуанкаре, как показано на рис.7,а. Результаты численного моделирования показывают, что

жидкость A в течение каждого периода возвращается в свое начальное положение. С другой стороны, выделенная жидкость B подвержена сильному растяжению вдоль границы поперечного сечения. Положение выделенной жидкости в сечении $n = 12$ показано на рис.7,б.

При увеличении осевой скорости течения жидкости, интенсивность процесса адвекции существенно увеличивается. На рис.8 показан случай адвекции жидкости при $G = 90.0$. В начальном сечении выделенная жидкость занимает положение, аналогичное выделенной жидкости A на рис.7,а. Уже после 5 периодов границы выделенной жидкости сильно растянулись, однако подкрашенная жидкость, в отличие от предыдущего случая, размещена в центральной части поперечного сечения (рис.8,а). Дальнейшее продвижение жидкости по трубе сопровождается заполнением выделенной жидкостью всего поперечного сечения. Положение выделенной жидкости после 10 периодов показано на рис.8,б. Такой режим адвекции относится к интенсивным (хаотическим) режимам.

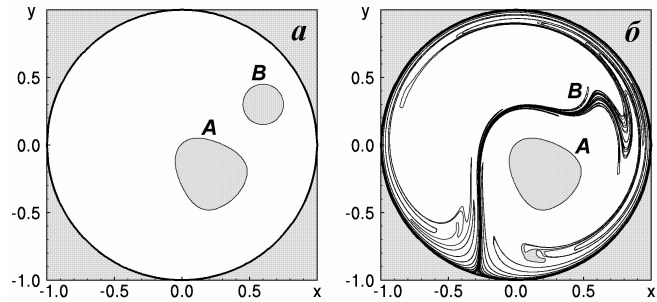


Рис.7. Адвекция выделенной жидкости внутри регулярного и хаотического сечений Пуанкаре при $G=50$

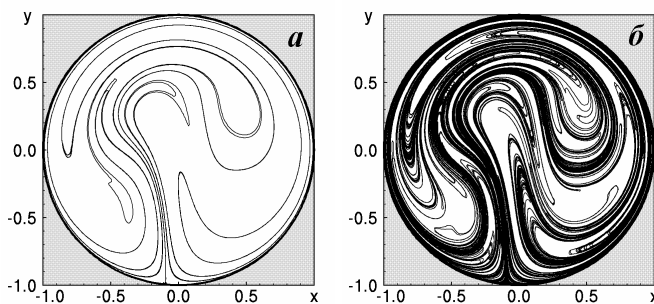


Рис.8. Адвекция выделенной жидкости в криволинейной трубе при $G = 90.0$

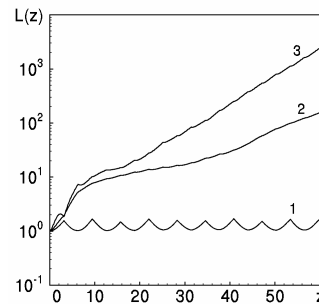


Рис.9. Изменение длины пассивных контуров по мере продвижения вдоль трубы

На рис.9 показано изменение нормированной длины контура выделенной жидкости по мере продвижения ее вдоль трубы. Цифрами 1 и 2 показаны кривые для контуров областей выделенной жидкости, расположенных в регулярной и хаотической (рис.7) областях сечения Пуанкаре (рис.3,б). Кривая 3 иллюстрирует зависимость для случая на рис.8. Видно, что кривые 2 и 3 возрастают по экспоненциальной зависимости, что соответствует интенсивному режиму адвекции жидкости внутри криволинейной трубы.

4. Выводы

Рассмотрена задача об адвекции выделенной жидкости внутри сегментированной криволинейной трубы с круговым поперечным сечением в приближении Дина. Показано, что поле скорости, формируемое в гидродинамической системе, в приближении $Dn \ll 1$ может быть представлено в виде ряда по малому параметру Dn . При этом ведущие слагаемые описывают течение Пуазейля вдоль трубы и течение в поперечном сечении трубы.

Исследования показали, что при увеличении приложенного градиента к сегменту трубы топологические свойства течения существенно усложняются: происходит последовательность бифуркаций, которая сопровождается появлением системы эллиптических и гиперболических точек. Анализ сечения Пуанкаре рассматриваемого течения, выполненный для системы пассивных жидких частиц, позволяет оценить размеры области интенсивной и регулярной адвекции в поперечном сечении трубы.

Показано, что процессы адвекции для жидкости, расположенной в начальный момент в областях, прилегающих к гиперболическим периодическим точкам, протекает интенсивно, при этом длина контура выделенной жидкости растягивается экспоненциально во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика / М.: Наука, 1986. – 736с.
2. Aref H. Stirring by chaotic advection // JFM. – 1984. – V.143. – p.1-23.
3. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1990. – V.A333, – p.273-288.
4. Dean W.R. The streamline motion of fluid in a curved pipe // Phil. Mag. Ser.7. – 1928. – V.5. – p.673-693.
5. McConalogue D.J., Srivastava R.S. Motion of a fluid in curved tube // Proc. Roy. Soc. London. – 1968. – V.A307. – P.37-53.
6. Smith F.T. Fluid flow into a curved pipe // Proc. Roy. Soc. London. – 1976. – V.A351. – p.71-87.
7. Bara B., Nandakumar K., Masliyah J.H. An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions // JFM. – 1992. – V.244. – p.339-376.
8. Jones S.W., Thomas O.M., Aref H. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // JFM. – 1989. – V.209. – p.335-357.
9. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport / Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 364p.
10. Мун Ф. Хаотические колебания / М.: Мир, 1990. – 312с.
11. Ламб Г. Гидродинамика / М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. – 929с.
12. Berger S.A., Talbot L., Yao L.-S. Flow in curved pipes // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1983. – V.15. – p.461-512.