УДК 517.956

О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с ядром Коши, имеющих близкую к гауссовской степень точности

К. Р. Купатадзе, Д. Г. Саникидзе, Ш. С. Хубежты
Институт вычислительной математики им. Н.Мусхелишвили, Грузия
Институт вычислительной математики им. Н.Мусхелишвили, Грузия
Южный математический институт РАН и РСО-Алания, Россия

Построены квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром типа Коши, близкие по точности к гауссовским. Полученные формулы вместе с известными квадратурными формулами Гаусса могут быть использованы в вычислении сингулярных интегралов для относительно более широкого множества значений параметра сингулярности.

Ключевые слова: *сингулярный интеграл с ядром Коши, квадратурная формула, чебышевский вес, гауссовская точность*

Quadrature formulas for singular integrals with Cauchy type kernel close to Gauss formulas in the sense of accuracy are constructed. The obtained formulas along with the known Gauss formulas can be applied to calculation of singular integrals in the case of wider set of values of the singularity parameter.

Key words: *singular integral with Cauchy kernel,, quadrature formula, Chebyshev weight, Gauss accuracy*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В существующей ныне литературе, относящейся к вопросу теории квадратурных формул для сингулярных интегралов с ядром Коши, значительный интерес представляют квадратурные формулы Гаусса для таких интегралов (см., напр., [1,2]). В соответствующих работах этого направления показывается, что достижение гауссовской степени точности в случае сингулярных интегралов вида

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}dt \quad (-1<x<1), \tag{1}$$

где $\rho(t)$ – заданная на [-1,+1] конкретная суммируемая (обычно знакопостоянная функция), а $\varphi(t)$ произвольная функция из некоторого класса гладких функций, возможно при определенном выборе значений параметра сингулярности x. А именно, в общем случае предполагается, что такими значениями x являются нули т. н. присоединенных функций, или иначе, функций второго рода (см., напр., [3]). К обычно часто встречащимся в приложениях сингулярных интегралов вида (1) относятся интегралы с весовыми функциями $(1-t)^p(1+t)^q$ $(p,q>-1)$ (см., напр., [2, 4, 5]). Как подтверждается упомянутыми и рядом других работ, сингулярные интегралы с такими весовыми функциями имеют применение в контактных задачах теории упругости, в том числе в теории трещин.

К наиболее приемлемому подходу к вычислению (приближенно) интегралов

$$\int_{-1}^{+1}(1-t)^p(1+t)^q\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt \quad (-1<x<1) \tag{2}$$

при произвольных значениях x из рассматриваемого интервала следует отнести применение к (2) квадратурных формул для сингулярных интегралов, основанных на аппроксимации функции $\varphi(t)$ ее интерполяционными полиномами, построенными по корням ортогональных на отрезке [-1, +1] по весу $(1-t)^p(1+t)^q$ полиномов. К основным вопросам в направлении исследования и приложения построенных на такой основе квадратурных формул относятся такие вопросы, как вопрос оценки их погрешности на различных классах функций $\varphi(t)$, вопросы сходимости на возможно широких классах плотностей $\varphi(t)$, влияние ряда локальных свойств последних на поведение их остаточных членов, а также вопросы влияния вычислительных погрешностей (округления, наследственных) и т. п. Отметим также, что в самом вопросе конструирования на такой основе квадратурных формул определенное внимание приобретает, в частности, вопрос о вычислении независящих от φ стандартных интегралов

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t)^p(1+t)^q}{t-x}\,dt \quad (p,q>-1),$$

точное вычисление которых для ряда значений p, q возможно методами теории функций комплексного переменного (см., также, [6]). В общем случае эти интегралы могут быть вычислены приближенно с любой заданной степенью точности. Тем самым, в случае заданных точно (или с большой точностью) исходных данных (плотностей сингулярных интегралов) можно, по видимому, утверждать определенную вычислительную эффективность известных ныне многих квадратурных формул. Тем не менее, следует упомянуть о связанных с практическими приложениями задач с приближенными исходными данными (например, когда эти данные определяются на основе эксперимента). Так, к примеру, может обстоять дело при численном решении определенных классов сингулярных интегральных уравнений, относящихся к некоторым задачам физики (см., напр., [7]). В связи с возникновением такого рода ситуаций наиболее эффективным представляется применение к аппроксимации сингулярных интегралов квадратурных формул такой структуры, чтобы в возможно нужном процессе последовательного увеличения числа узлов квадратуры найденное на данном шагу значение ядра уравнения могло быть использовано вторично при последующем значении числа узлов. С этой целью представляется полезным рассмотрение квадратурных формул для сингулярных интегралов, построение которых будет основано на применении в качестве интерполяционных узлов совокупности нулей двух ортогональных по данному весу $(1-t)^p(1+t)^q$ полиномов последовательных степеней (n и $n+1$ в дальнейших здесь рассмотрениях). Очевидно, что такие квадратурные форомулы могут быть построены теми же способами, что и упомянутые выше и имеют алгебраическую степень точности $2n$. Тем не менее практический процесс их построения требует, обычно, рассмотрение довольно громоздких выражений и их различных преобразований. В связи с этим мы здесь ограничимся рассмотрением наиболее простого, но важного с ряда точек зрения случая чебышевской весовой функции соответствующей значениям $p,q=-1/2$ и, тем самым, приводящим к рассмотрению сингулярного интеграла вида

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt\,. \qquad (3)$$

Согласно сказанному выше, построение интересующей нас в данном случае квадратурной форомулы для интеграла (3) основывается на аппроксимации функции $\varphi(t)$ интерполяционным многочленом, построенным по значениям $\varphi(t)$ в узлах, представляющих нули функции $T_n(t)T_{n+1}(t)$, где $T_m(t)$ ($m=n$, $n+1$) чебышевский полином степени m.

2. Построение квадратурной формулы по узлам нулей полинома $T_n(t)T_{n+1}(t)$

С целью построения оговоренного выше интерполяционного полинома обозначим через $\{x_{k\,n}\}_{k=1}^{n}$ и $\{x_{k\,n+1}\}_{k=1}^{n+1}$ нули полиномов $T_n(t)$, $T_{n+1}(t)$ соответственно. В первую очередь нам нужно найти детальное выражение значений

$$\left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{k\,n}}\,,\quad \left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{k\,n+1}}\,.$$

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned}\left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{k\,n}}&=T'_n(x_{k\,n})T_{n+1}(x_{k\,n})\,,\\ \left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{k\,n+1}}&=T_n(x_{k\,n+1})T'_{n+1}(x_{k\,n+1})\,.\end{aligned} \qquad (4)$$

Используя, далее, представления $T_m(x)=\cos(m\arccos x)$ $(m=n,n+1)$, можно на основе (4) убедиться в справедливости равенств

$$\left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{k_n}}=-n\,,\quad \left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{k\,n+1}}=n+1\,.$$

Применением указанных соотношений мы для искомого интерполяционного многочлена $L_{2n}(\varphi;t)$ получаем представление

$$L_{2n}(\varphi;t)=T_n(x)T_{n+1}(x)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varphi(x_{k\,n+1})}{x-x_{k\,n+1}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(x_{k\,n})}{x-x_{k\,n}}\right\}. \tag{5}$$

Применение к полиному (5) рассматриваемого здесь сингулярного оператора заключается по сути в вычислении интегралов вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)(t-x_{k\,n})},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)(t-x_{k\,n+1})},$$

что может быть осуществленно с учётом ортогональности системы полиномов $\{T_m(t)\}$ по данному весу и применением ряда формул, относящихся к взаимосвязи этих полиномов с полиномами Чебышева второго рода $\{U_m(t)\}$. В частности, очевидно, что вычисление первого из этих интегралов может быть основано на вычислении следующих двух интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{k\,n})}, \tag{6}$$

причем второй интеграл в (6) заведомо равен нулю в силу ортогональности на $[-1,+1]$ системы полиномов $\{T_m(t)\}$ по весу $\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}$. Первый интеграл в (6), преобразуя его к виду

$$\frac{T_n(x)}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(t)\left[T_n(t)-T_n(x)\right]}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt$$

и воспользовавшись упомянутым выше свойством ортогональности, непосредственно вычисляется по известной в теории ортогональных полиномов формуле

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}=U_n(x),$$

где по данному выше обозначению выражение $U_n(x)$ представляет чебышевский полином второго рода степени n. Для вычисления интегралов с множителями вида $\left(t-x_{k\,n+1}\right)^{-1}$ в подинтегральном выражении воспользуемся представлением

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)(t-x_{k\,n+1})}=\frac{1}{x-x_{k\,n+1}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{k\,n+1})}\right\},$$

при этом, согласно замеченному выше, рассмотрению подлежит второй интеграл в правой части. Воспользовавшись представлением (см. напр., [8])

$$T_{n+1}(t)=2^n t^{n+1}+\alpha_n(t),$$

где $\alpha_n(t)$ определенный полином степени меньше $n+1$ и учитывая, что полином $T_{n+1}(t)$ нацело делится на $t-x_{k\,n+1}$, применим к рассматриваемому интегралу квадратурную формулу Эрмита узлами $\{x_{k\,n}\}_{k=1}^{n}$ (см. там же, гл. 2) с соответствующим остаточным членом. Заметив, что числитель в рассматриваемом подинтегральном выражении обращается в нуль в узлах $x_{k\,n}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, то, на основе выражения упомянутого остаточного члена мы для соответствующего интеграла получаем значение 1. В результате мы окончательно приходим к квадратурной формуле вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}\approx$$

$$\approx\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{T_n(x)U_n(x)-1}{x-x_{k\,n+1}}\varphi(x_{k\,n+1})-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)U_n(x)}{x-x_{k\,n}}\varphi(x_{k\,n}),\quad(7)$$

где $T_n(x)U_n(x)-1=U_{n-1}(x)T_{n+1}(x)$.

Данная формула и обладает упомянутым выше вычислительным свойством, выражающемся в её эффективности при переходе от данного значения n к последующему. Однако, естественный интерес представляет вопрос о достижимости возможно более высокой степени точности формулы с возможно меньшим числом узлов. Этот вопрос заведомо связан с задачей надлежащего выбора в (7) значений параметра сингулярности x из данного интервала.

Как и следовало бы ожидать, найденные на основе формулы (7) значения, приводящие также к известным формулам гауссовской точности, совпадают при этом с известными в существующей по этим вопросам литературе значениями параметра сингулярности x в соответствующем сингулярном интеграле. При этом возможность расширения множества значений x с таким свойством обычно не утверждается. Тем не менее, может быть поставлен вопрос о построении при некоторых других значениях $x\in(-1,+1)$ квадратурных формул для сингулярных интегралов со степенью точности в известном смысле максимально близких по точности к гауссовским. Можно показать, что определенные такие формулы для рассматриваемых здесь интегралов могут быть построены, исходя опять-таки из общей квадратурной формулы (7).

3. О квадратурных формулах близких по точности к гауссовским для сингулярных интегралов

Как было указано в начале же, построение квадратурной формулы вида (7) было осуществлено по определенному процессу аппроксимации плотности $\varphi(t)$, при котором возможно заведомое утверждение точности полученной данным способом квадратурной формулы для любого многочлена степени $\le 2n$ при значениях x, принадлежащих интервалу (-1, +1). При этом можно распорядиться о таком выборе значений параметра x в указанных пределах так, чтобы соответствующая квадратурная сумма содержала бы по возможности меньшее количество слагаемых (т.е., значений плотности $\varphi(t)$ в узлах). Как известно, таковыми являются прежде всего уже известные квадратурные формулы Гаусса. Однако, как уже было оговорено, максимальное число значений параметра x и, тем самым, соответствующих им формул, при которых достижение такой степени точности осуществимо, в известном смысле невелико (в основном на единицу меньше числа узлов самой квадратурной формулы). С этой точки зрения может быть естественным вопрос о возможности построения другого вида квадратурных формул с такой же алгебраической точностью по возможности с наименьшим при этом (однако заведомо большим, чем в гауссовских формулах) числом ординат. Некоторые такие формулы (как и сами известные формулы Гаусса) могут быть получены, как определенные частные случаи общей формулы (7) надлежащим выбором значений x в этой формуле.

1. Подчиним параметр x условию $U_n(x)=0$, т.е. значения x представляют нули полинома Чебышева второго рода $\left\{x_{\nu n}^{(0)}\right\}_{\nu=1}^{n}$. В данном случае вторая сумма в (7) обращается в нуль и, тем самым, мы будем иметь квадратурную формулу вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{\nu n}^{(0)})}\approx\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varphi(x_{k\,n+1})}{x_{k\,n+1}-x_{\nu n}^{(0)}}\qquad(\nu=1,2,...,n),$$

что представляет известную в литературе квадратурную формулу Гаусса с числом узлов $n+1$.

2. На этот раз будем считать, что значениями параметра x являются нули полинома $T_n(x)$. Тогда первая сумма в (7) отличается от соответствующей в предыдущем случае тем, что вместо чисел $\left\{x_{\nu n}^{(0)}\right\}$ будут присутствовать нули полинома $T_n(x)$, которые обозначим через $\left\{x_{\nu n}^{(1)}\right\}$. Во второй же сумме, если считать, что ν_0 – одно из значений ν ($\nu=\overline{1,n}$), то все отличные от содержащих в себе узел $x_{\nu_0 n}^{(1)}$ ее слагаемые исчезают и в результате мы приходим к квадратурной формуле вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x^{(1)}_{\nu_0 n})}\approx\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varphi(x_{kn+1})}{x_{kn+1}-x^{(1)}_{\nu_0 n}}-\frac{1}{n}T_n'\left(x^{(1)}_{\nu_0 n}\right)U_n\left(x^{(1)}_{\nu_0 n}\right)\varphi\left(x^{(1)}_{\nu_0 n}\right). \quad (8)$$

Она, как и предыдущая формула, имеет гауссовскую алгебраическую точность и отличается от известной гауссовской квадратурной формулы (для сингулярных интегралов) лишь присутствием последнего слагаемого в квадратурной сумме (8). В случае нечетного n, если при данном ν_0 имеет место $U_n(x^{(1)}_{\nu_0 n})=0$, получается квадратурная формула Гаусса сингулярностью в точке $x=0$. Заметим, что этот случай в (8) соответствует предыдущему при n нечетном.

3. Теперь рассмотрим случай определения параметра x согласно условию $T_n(x)U_n(x)-1=0$. Рассмотрение этого случая при произвольном n требует ряда громоздких записей. Мы здесь удовлетворимся рассмотрением случая $n=2$, что в определенной степени все же поясняет детали отличия этого случая от предыдущих. Согласно сказанному в данном случае указанное условие заключается в определении x из равенства $T_2(x)U_2(x)=1$, где $T_2(x)=2x^2-1$, $U_2(x)=4x^2-1$. Соответствующее уравнение имеет один двукратный корень $x_0=0$ и еще 2 корня $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Первая сумма $\sum\limits_{1}^{n+1}$ при $n=2$ в (7) примет вид

$$\frac{2x^2(4x^2-3)}{x-\sqrt{3}/2}\varphi(x_{13})+\frac{2x^2(4x^2-3)}{x}\varphi(x_{23})+\frac{2x^2(4x^2-3)}{x+\sqrt{3}/2}\varphi(x_{33}),$$

а вторая сумма будет

$$\left(2x^2-1\right)\left(4x^2-1\right)\left[\frac{\varphi(x_{12})}{x-x_{12}}+\frac{\varphi(x_{22})}{x-x_{22}}\right],$$

где $x_{13}=\sqrt{3}/2$, $x_{23}=0$, $x_{33}=-\sqrt{3}/2$; $x_{12}=1/\sqrt{2}$, $x_{22}=-1/\sqrt{2}$. Тем самым, при принятых выше предположениях мы имеем квадратурную формулу, справедливую при значениях $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}/2$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}\approx Q_1(\varphi;x)+Q_2(\varphi;x),$$

где

$$Q_1(\varphi;x)=\frac{1}{3}\left\{8x^2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2x\left(4x^2-3\right)\varphi(0)+8x^2\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\},$$

$$Q_2(\varphi;x)=-\frac{1}{2}\left(2x^2-1\right)\left(4x^2-1\right)\left\{\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{x+1/\sqrt{2}}+\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{x-1/\sqrt{2}}\right\}.$$

При указанных выше значениях x для $Q_1(\varphi;x)$ имеем, соответственно,

$$Q_1\left(\varphi;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad Q_1(\varphi;0)=0\,,\quad Q_1\left(\varphi;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

При соответствующих же значниях x для второй суммы имеет место

$$Q_2\left(\varphi;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\quad Q_2(\varphi;0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)-\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)\right\},$$

$$Q_2\left(\varphi;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Таким образом, мы имеем следующие квадратурные формулы для сингулярных интегралов:

при $x=0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\};$$

при $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx-2\sqrt{3}\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};$$

при $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx2\sqrt{3}\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Первая из этих формул представляет известную в существующей литературе квадратурную формулу для сингулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t}dt.$$

Остальные две формулы, соответствующие интегралам

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t+\sqrt{3}/2}dt,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-\sqrt{3}/2}dt,$$

являются квадратурными формулами повышенной точности, названными в начале данной заметки как квадратурные формулы для сингулярных интегралов с близкой по точности к гауссовским квадратурным формулам для аналогичных регулярных интегралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика. – М.: Наука, 1962. – С. 64-74.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. –Киев: Наукова Думка, 1976.– 442 с.
3. Сегё Г. Ортогональные полиномы. –М.: Наука, 1962. –500 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 599 с.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 304 с.
6. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. – Новосибирск: НАУКА, 1980. – 121 с.
7. J.E. Brown, E. Jackson. Nucleon-nucleon interaction. M.: Atomizdat, 1979. –248 pp.
8. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: «Наука», 1967. – 500 с.

Надійшла у першій редакції 30.04.2013, в останній - 16.05.2013.

УДК 517.956

О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с ядром Коши, имеющих близкую к гауссовской степень точности

К. Р. Купатадзе, Д. Г. Саникидзе, Ш. С. Хубежты
Институт вычислительной математики им. Н.Мусхелишвили, Грузия
Институт вычислительной математики им. Н.Мусхелишвили, Грузия
Южный математический институт РАН и РСО-Алания, Россия

Построены квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром типа Коши, близкие по точности к гауссовским. Полученные формулы вместе с известными квадратурными формулами Гаусса могут быть использованы в вычислении сингулярных интегралов для относительно более широкого множества значений параметра сингулярности.

Ключевые слова: *сингулярный интеграл с ядром Коши, квадратурная формула, чебышевский вес, гауссовская точность*

Quadrature formulas for singular integrals with Cauchy type kernel close to Gauss formulas in the sense of accuracy are constructed. The obtained formulas along with the known Gauss formulas can be applied to calculation of singular integrals in the case of wider set of values of the singularity parameter.

Key words: *singular integral with Cauchy kernel,, quadrature formula, Chebyshev weight, Gauss accuracy*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В существующей ныне литературе, относящейся к вопросу теории квадратурных формул для сингулярных интегралов с ядром Коши, значительный интерес представляют квадратурные формулы Гаусса для таких интегралов (см., напр., [1,2]). В соответствующих работах этого направления показывается, что достижение гауссовской степени точности в случае сингулярных интегралов вида

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1), \tag{1}$$

где $\rho(t)$ – заданная на [-1,+1] конкретная суммируемая (обычно знакопостоянная функция), а $\varphi(t)$ произвольная функция из некоторого класса гладких функций, возможно при определенном выборе значений параметра сингулярности x. А именно, в общем случае предполагается, что такими значениями x являются нули т. н. присоединенных функций, или иначе, функций второго рода (см., напр., [3]). К обычно часто встречащимся в приложениях сингулярных интегралов вида (1) относятся интегралы с весовыми функциями $(1-t)^p(1+t)^q$ $(p, q > -1)$ (см., напр., [2, 4, 5]). Как подтверждается упомянутыми и рядом других работ, сингулярные интегралы с такими весовыми функциями имеют применение в контактных задачах теории упругости, в том числе в теории трещин.

К наиболее приемлемому подходу к вычислению (приближенно) интегралов

$$\int_{-1}^{+1}(1-t)^p(1+t)^q\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt \quad (-1<x<1) \qquad (2)$$

при произвольных значениях x из рассматриваемого интервала следует отнести применение к (2) квадратурных формул для сингулярных интегралов, основанных на аппроксимации функции $\varphi(t)$ ее интерполяционными полиномами, построенными по корням ортогональных на отрезке [-1, +1] по весу $(1-t)^p(1+t)^q$ полиномов. К основным вопросам в направлении исследования и приложения построенных на такой основе квадратурных формул относятся такие вопросы, как вопрос оценки их погрешности на различных классах функций $\varphi(t)$, вопросы сходимости на возможно широких классах плотностей $\varphi(t)$, влияние ряда локальных свойств последних на поведение их остаточных членов, а также вопросы влияния вычислительных погрешностей (округления, наследственных) и т. п. Отметим также, что в самом вопросе конструирования на такой основе квадратурных формул определенное внимание приобретает, в частности, вопрос о вычислении независящих от φ стандартных интегралов

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t)^p(1+t)^q}{t-x}\,dt \quad (p,q>-1),$$

точное вычисление которых для ряда значений p, q возможно методами теории функций комплексного переменного (см., также, [6]). В общем случае эти интегралы могут быть вычислены приближенно с любой заданной степенью точности. Тем самым, в случае заданных точно (или с большой точностью) исходных данных (плотностей сингулярных интегралов) можно, по видимому, утверждать определенную вычислительную эффективность известных ныне многих квадратурных формул. Тем не менее, следует упомянуть о связанных с практическими приложениями задач с приближенными исходными данными (например, когда эти данные определяются на основе эксперимента). Так, к примеру, может обстоять дело при численном решении определенных классов сингулярных интегральных уравнений, относящихся к некоторым задачам физики (см., напр., [7]). В связи с возникновением такого рода ситуаций наиболее эффективным представляется применение к аппроксимации сингулярных интегралов квадратурных формул такой структуры, чтобы в возможно нужном процессе последовательного увеличения числа узлов квадратуры найденное на данном шагу значение ядра уравнения могло быть использовано вторично при последующем значении числа узлов. С этой целью представляется полезным рассмотрение квадратурных формул для сингулярных интегралов, построение которых будет основано на применении в качестве интерполяционных узлов совокупности нулей двух ортогональных по данному весу $(1-t)^p(1+t)^q$ полиномов последовательных степеней (n и $n+1$ в дальнейших здесь рассмотрениях). Очевидно, что такие квадратурные форомулы могут быть построены теми же способами, что и упомянутые выше и имеют алгебраическую степень точности $2n$. Тем не менее практический процесс их построения требует, обычно, рассмотрение довольно громоздких выражений и их различных преобразований. В связи с этим мы здесь ограничимся рассмотрением наиболее простого, но важного с ряда точек зрения случая чебышевской весовой функции соответствующей значениям $p,q=-\frac{1}{2}$ и, тем самым, приводящим к рассмотрению сингулярного интеграла вида

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt\,. \tag{3}$$

Согласно сказанному выше, построение интересующей нас в данном случае квадратурной форомулы для интеграла (3) основывается на аппроксимации функции $\varphi(t)$ интерполяционным многочленом, построенным по значениям $\varphi(t)$ в узлах, представляющих нули функции $T_n(t)T_{n+1}(t)$, где $T_m(t)$ ($m=n$, $n+1$) чебышевский полином степени m.

2. Построение квадратурной формулы по узлам нулей полинома $T_n(t)T_{n+1}(t)$

С целью построения оговоренного выше интерполяционного полинома обозначим через $\{x_{kn}\}_{k=1}^{n}$ и $\{x_{kn+1}\}_{k=1}^{n+1}$ нули полиномов $T_n(t)$, $T_{n+1}(t)$ соответственно. В первую очередь нам нужно найти детальное выражение значений

$$\left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{kn}}\,,\quad \left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{kn+1}}\,.$$

Имеем, очевидно,

$$\begin{gathered}\left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{kn}}=T'_n(x_{kn})T_{n+1}(x_{kn})\,,\\ \left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{kn+1}}=T_n(x_{kn+1})T'_{n+1}(x_{kn+1})\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Используя, далее, представления $T_m(x)=\cos(m\arccos x)$ $(m=n,n+1)$, можно на основе (4) убедиться в справедливости равенств

$$\left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{kn}}=-n\,,\quad \left[T_n(x)T_{n+1}(x)\right]'_{x=x_{kn+1}}=n+1\,.$$

Применением указанных соотношений мы для искомого интерполяционного многочлена $L_{2n}(\varphi;t)$ получаем представление

$$L_{2n}(\varphi;t)=T_n(x)T_{n+1}(x)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varphi(x_{k\,n+1})}{x-x_{k\,n+1}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(x_{k\,n})}{x-x_{k\,n}}\right\}. \tag{5}$$

Применение к полиному (5) рассматриваемого здесь сингулярного оператора заключается по сути в вычислении интегралов вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)(t-x_{k\,n})},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)(t-x_{k\,n+1})},$$

что может быть осуществленно с учётом ортогональности системы полиномов $\{T_m(t)\}$ по данному весу и применением ряда формул, относящихся к взаимосвязи этих полиномов с полиномами Чебышева второго рода $\{U_m(t)\}$. В частности, очевидно, что вычисление первого из этих интегралов может быть основано на вычислении следующих двух интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{k\,n})}, \tag{6}$$

причем второй интеграл в (6) заведомо равен нулю в силу ортогональности на $[-1,+1]$ системы полиномов $\{T_m(t)\}$ по весу $\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}$. Первый интеграл в (6), преобразуя его к виду

$$\frac{T_n(x)}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(t)\left[T_n(t)-T_n(x)\right]}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt$$

и воспользовавшись упомянутым выше свойством ортогональности, непосредственно вычисляется по известной в теории ортогональных полиномов формуле

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}=U_n(x),$$

где по данному выше обозначению выражение $U_n(x)$ представляет чебышевский полином второго рода степени n. Для вычисления интегралов с множителями вида $\left(t-x_{k\,n+1}\right)^{-1}$ в подинтегральном выражении воспользуемся представлением

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)(t-x_{k\,n+1})}=\frac{1}{x-x_{k\,n+1}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)T_{n+1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{k\,n+1})}\right\},$$

при этом, согласно замеченному выше, рассмотрению подлежит второй интеграл в правой части. Воспользовавшись представлением (см. напр., [8])

$$T_{n+1}(t)=2^n t^{n+1}+\alpha_n(t),$$

где $\alpha_n(t)$ определенный полином степени меньше $n+1$ и учитывая, что полином $T_{n+1}(t)$ нацело делится на $t-x_{k\,n+1}$, применим к рассматриваемому интегралу квадратурную формулу Эрмита узлами $\{x_{k\,n}\}_{k=1}^{n}$ (см. там же, гл. 2) с соответствующим остаточным членом. Заметив, что числитель в рассматриваемом подинтегральном выражении обращается в нуль в узлах $x_{k\,n}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, то, на основе выражения упомянутого остаточного члена мы для соответствующего интеграла получаем значение 1. В результате мы окончательно приходим к квадратурной формуле вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}\approx$$

$$\approx\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{T_n(x)U_n(x)-1}{x-x_{k\,n+1}}\varphi(x_{k\,n+1})-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)U_n(x)}{x-x_{k\,n}}\varphi(x_{k\,n}),\qquad(7)$$

где $T_n(x)U_n(x)-1=U_{n-1}(x)T_{n+1}(x)$.

Данная формула и обладает упомянутым выше вычислительным свойством, выражающемся в её эффективности при переходе от данного значения n к последующему. Однако, естественный интерес представляет вопрос о достижимости возможно более высокой степени точности формулы с возможно меньшим числом узлов. Этот вопрос заведомо связан с задачей надлежащего выбора в (7) значений параметра сингулярности x из данного интервала.

Как и следовало бы ожидать, найденные на основе формулы (7) значения, приводящие также к известным формулам гауссовской точности, совпадают при этом с известными в существующей по этим вопросам литературе значениями параметра сингулярности x в соответствующем сингулярном интеграле. При этом возможность расширения множества значений x с таким свойством обычно не утверждается. Тем не менее, может быть поставлен вопрос о построении при некоторых других значениях $x\in(-1,+1)$ квадратурных формул для сингулярных интегралов со степенью точности в известном смысле максимально близких по точности к гауссовским. Можно показать, что определенные такие формулы для рассматриваемых здесь интегралов могут быть построены, исходя опять-таки из общей квадратурной формулы (7).

3. О квадратурных формулах близких по точности к гауссовским для сингулярных интегралов

Как было указано в начале же, построение квадратурной формулы вида (7) было осуществлено по определенному процессу аппроксимации плотности $\varphi(t)$, при котором возможно заведомое утверждение точности полученной данным способом квадратурной формулы для любого многочлена степени $\le 2n$ при значениях x, принадлежащих интервалу (-1, +1). При этом можно распорядиться о таком выборе значений параметра x в указанных пределах так, чтобы соответствующая квадратурная сумма содержала бы по возможности меньшее количество слагаемых (т.е., значений плотности $\varphi(t)$ в узлах). Как известно, таковыми являются прежде всего уже известные квадратурные формулы Гаусса. Однако, как уже было оговорено, максимальное число значений параметра x и, тем самым, соответствующих им формул, при которых достижение такой степени точности осуществимо, в известном смысле невелико (в основном на единицу меньше числа узлов самой квадратурной формулы). С этой точки зрения может быть естественным вопрос о возможности построения другого вида квадратурных формул с такой же алгебраической точностью по возможности с наименьшим при этом (однако заведомо большим, чем в гауссовских формулах) числом ординат. Некоторые такие формулы (как и сами известные формулы Гаусса) могут быть получены, как определенные частные случаи общей формулы (7) надлежащим выбором значений x в этой формуле.

1. Подчиним параметр x условию $U_n(x)=0$, т.е. значения x представляют нули полинома Чебышева второго рода $\left\{x_{\nu n}^{(0)}\right\}_{\nu=1}^{n}$. В данном случае вторая сумма в (7) обращается в нуль и, тем самым, мы будем иметь квадратурную формулу вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{\nu n}^{(0)})}\approx\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varphi(x_{k\,n+1})}{x_{k\,n+1}-x_{\nu n}^{(0)}}\qquad(\nu=1,2,...,n),$$

что представляет известную в литературе квадратурную формулу Гаусса с числом узлов $n+1$.

2. На этот раз будем считать, что значениями параметра x являются нули полинома $T_n(x)$. Тогда первая сумма в (7) отличается от соответствующей в предыдущем случае тем, что вместо чисел $\left\{x_{\nu n}^{(0)}\right\}$ будут присутствовать нули полинома $T_n(x)$, которые обозначим через $\left\{x_{\nu n}^{(1)}\right\}$. Во второй же сумме, если считать, что ν_0 – одно из значений ν ($\nu=\overline{1,n}$), то все отличные от содержащих в себе узел $x_{\nu_0 n}^{(1)}$ ее слагаемые исчезают и в результате мы приходим к квадратурной формуле вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x_{\nu_0 n}^{(1)})}\approx\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varphi(x_{kn+1})}{x_{kn+1}-x_{\nu_0 n}^{(1)}}-\frac{1}{n}T_n'\left(x_{\nu_0 n}^{(1)}\right)U_n\left(x_{\nu_0 n}^{(1)}\right)\varphi\left(x_{\nu_0 n}^{(1)}\right). \quad (8)$$

Она, как и предыдущая формула, имеет гауссовскую алгебраическую точность и отличается от известной гауссовской квадратурной формулы (для сингулярных интегралов) лишь присутствием последнего слагаемого в квадратурной сумме (8). В случае нечетного n, если при данном ν_0 имеет место $U_n(x_{\nu_0 n}^{(1)})=0$, получается квадратурная формула Гаусса сингулярностью в точке $x=0$. Заметим, что этот случай в (8) соответствует предыдущему при n нечетном.

3. Теперь рассмотрим случай определения параметра x согласно условию $T_n(x)U_n(x)-1=0$. Рассмотрение этого случая при произвольном n требует ряда громоздких записей. Мы здесь удовлетворимся рассмотрением случая $n=2$, что в определенной степени все же поясняет детали отличия этого случая от предыдущих. Согласно сказанному в данном случае указанное условие заключается в определении x из равенства $T_2(x)U_2(x)=1$, где $T_2(x)=2x^2-1$, $U_2(x)=4x^2-1$. Соответствующее уравнение имеет один двукратный корень $x_0=0$ и еще 2 корня $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Первая сумма $\sum\limits_{1}^{n+1}$ при $n=2$ в (7) примет вид

$$\frac{2x^2(4x^2-3)}{x-\sqrt{3}/2}\varphi(x_{13})+\frac{2x^2(4x^2-3)}{x}\varphi(x_{23})+\frac{2x^2(4x^2-3)}{x+\sqrt{3}/2}\varphi(x_{33}),$$

а вторая сумма будет

$$\left(2x^2-1\right)\left(4x^2-1\right)\left[\frac{\varphi(x_{12})}{x-x_{12}}+\frac{\varphi(x_{22})}{x-x_{22}}\right],$$

где $x_{13}=\sqrt{3}/2$, $x_{23}=0$, $x_{33}=-\sqrt{3}/2$; $x_{12}=1/\sqrt{2}$, $x_{22}=-1/\sqrt{2}$. Тем самым, при принятых выше предположениях мы имеем квадратурную формулу, справедливую при значениях $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}/2$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}\approx Q_1(\varphi;x)+Q_2(\varphi;x),$$

где

$$Q_1(\varphi;x)=\frac{1}{3}\left\{8x^2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2x\left(4x^2-3\right)\varphi(0)+8x^2\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\},$$

$$Q_2(\varphi;x)=-\frac{1}{2}\left(2x^2-1\right)\left(4x^2-1\right)\left\{\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{x+1/\sqrt{2}}+\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{x-1/\sqrt{2}}\right\}.$$

При указанных выше значениях x для $Q_1(\varphi;x)$ имеем, соответственно,

$$Q_1\left(\varphi;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad Q_1(\varphi;0)=0\,,\quad Q_1\left(\varphi;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

При соответствующих же значниях x для второй суммы имеет место

$$Q_2\left(\varphi;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\quad Q_2(\varphi;0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)-\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)\right\},$$

$$Q_2\left(\varphi;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Таким образом, мы имеем следующие квадратурные формулы для сингулярных интегралов:

при $x=0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\};$$

при $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx-2\sqrt{3}\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};$$

при $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx2\sqrt{3}\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\varphi\left(-1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{\varphi\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Первая из этих формул представляет известную в существующей литературе квадратурную формулу для сингулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t}dt.$$

Остальные две формулы, соответствующие интегралам

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t+\sqrt{3}/2}dt,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-\sqrt{3}/2}dt,$$

являются квадратурными формулами повышенной точности, названными в начале данной заметки как квадратурные формулы для сингулярных интегралов с близкой по точности к гауссовским квадратурным формулам для аналогичных регулярных интегралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика. – М.: Наука, 1962. – С. 64-74.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. –Киев: Наукова Думка, 1976.– 442 с.
3. Сегё Г. Ортогональные полиномы. –М.: Наука, 1962. –500 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 599 с.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 304 с.
6. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. – Новосибирск: НАУКА, 1980. – 121 с.
7. J.E. Brown, E. Jackson. Nucleon-nucleon interaction. M.: Atomizdat, 1979. –248 pp.
8. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: «Наука», 1967. – 500 с.

Надійшла у першій редакції 30.04.2013, в останній - 16.05.2013.