

УДК 532.527

## Программа построения линий тока по дискретному полю скоростей

О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук

ГВУЗ "Приазовский государственный технический университет", Украина

В работе предлагается универсальная методика, алгоритм и программа построения линий тока по дискретному полю скоростей, которая может быть использована для как идеальной, так и вязкой жидкости для стационарных и нестационарных течений.

*Ключевые слова:* жидкость, линии тока, визуализация, гидродинамика

В роботі розглядається універсальна методика, алгоритм та програма побудови ліній течії по дискретному полю швидкостей, яка може бути використана як для ідеальної, так і в'язкої рідини у випадку стаціонарних та нестаціонарних течій.

*Ключові слова:* рідина, лінії течії, візуалізація, гідродинаміка

It is proposed a universal technique, algorithm and program of stream line plotting with using discrete velocity field which can be used for ideal and viscid liquid in stationary and time dependent problem.

*Key words:* liquid, stream line, visualization, hydrodynamic

### 1. Введение

Одной из актуальных задач гидродинамики является визуализация результатов численных и аналитических расчетов. В плоском случае такого типа визуализация осуществляется путем построения линий уровня функции тока (для идеальной жидкости), например, в работе [1] или численного решения дифференциального уравнения  $dy/dx = u/v$  на расчетной сетке. При этом возникает проблема выбора плотности линий тока и построения линий тока в окрестности особых точек дифференциального уравнения и возле углов. Очень часто остаются незамеченными небольшие области циркуляционного движения жидкости.

В данной работе предлагается методика и программа визуализации линий тока, которая может быть использована для любого типа течений как идеальной, так и вязкой жидкости, стационарного или нестационарного движения.

### 2. Описание методики

Будем полагать, что поле скоростей получается в результате численного решения гидродинамической задачи, или как результат эксперимента. Следует отметить, что поле скоростей может быть решением как стационарной задачи, так и полем скоростей для заданного момента времени при решении нестационарной задачи. Оно может быть также полем скоростей в сечении трехмерной области течения жидкости.

Идея данной методики позаимствована из метода маркеров [2], где маркеры (меченые частицы) использовались для расчета движения свободной поверхности жидкости. При этом маркеры, не лежащие в поверхностных ячейках, на движение жидкости напрямую не влияли. В данном алгоритме

предполагается, что расчетная сетка (имеющая вид прямоугольника) с разбивкой на прямоугольные ячейки покрывает область, в которой мы рассматриваем движение жидкости. Поле скоростей должно быть задано в узлах данной сетки. Поскольку область течения может быть многосвязной, то каждому узлу присваивается индекс, который определяет, где лежит узел: внутри жидкости или внутри тела. Для определения попадания узла в заданную область можно воспользоваться известными алгоритмами вычислительной геометрии [3]. Соответствующий специальный индекс, который содержит данную информацию, назовем индексом принадлежности.

Входными данными является файл, в котором сохранено поле скоростей. По умолчанию полагается, что в файле содержатся скорости только для точек, которые принадлежат области, заполненной жидкостью (это позволяет уменьшить объем файла). Файл данных имеет следующую структуру: в первой строке задано максимальное количество узлов по оси  $x$  ( $i_{\max}$ ), максимальное количество узлов по  $y$  ( $j_{\max}$ ), расстояние между узлами по  $x$  ( $\delta x$ ), расстояние между узлами по  $y$  ( $\delta y$ ). Далее в каждой последующей строке первая цифра означает номер узла по оси  $x$ , вторая – номер узла по оси  $y$ , третья – компоненту скорости  $u$ , четвертая –  $v$ . Если точка находится в области с жидкостью, то индекс принадлежности равен единице, иначе – нулю.

Далее все ячейки сортируются на заполненные и незаполненные жидкостью. Для такой классификации возможно несколько вариантов:

- 1) незаполненными полагаются ячейки, в которых хотя бы один узел не находится внутри жидкости.
- 2) незаполненными полагаются ячейки, в которых два и более узлов не находятся внутри жидкости.

Таким образом, для расчета линий тока требуется сформировать три массива: два для вещественных данных размера  $i_{\max} \times j_{\max}$  для компонент скорости и один массив целых чисел для индексов принадлежности (в который вначале вписываются индексы узлов).

На следующем этапе необходимо расставить маркеры. Если характер течения заранее неизвестен, то начальное распределение маркеров можно выбрать произвольным образом. Например, вдоль отрезка, который делит область пополам по вертикали (или горизонтали). Начальное количество маркеров не должно быть слишком большим (не больше двух сотен). Далее для каждого маркера производится численное решение задачи Коши

$$\frac{dx_k}{dt} = u_k, \frac{dy_k}{dt} = v_k, \quad (1)$$

$$x_k(0) = x_{k,0}, y_k(0) = y_{k,0}, t \in [0, T],$$

где  $k$  – номер маркера,  $t$  является параметром (который для удобства будем называть временем). Следует отметить, что  $T$  для каждого маркера является разным и заранее не задано, а определяется по результатам визуализации. Для решения задачи Коши можно воспользоваться каким-либо методом численного решения системы дифференциальных уравнений (1). Например, простейшей схемой Эйлера (которая имеет наибольшее быстроедействие):

$$x_{k,l+1} = x_{k,l} + u_{k,l}\delta t_{k,l}, \quad y_{k,l+1} = y_{k,l} + v_{k,l}\delta t_{k,l}$$

где  $l$  – номер шага по времени. Шаг по времени для каждого маркера можно выбрать следующим образом:

1. одинаковым для всех маркеров, для этого можно определить максимальную скорость поля скоростей и рассчитать шаг таким образом, чтобы частица с этой скоростью сместилась на заданное количество пикселей (например,  $\delta t = d / v_{\max}$ ,  $d$  – размер пикселя)

2. разным для каждого маркера, чтобы любая частица сместилась на заданное количество пикселей (например,  $\delta t_l = d / v_l$ ).

Для более точного расчета можно также использовать явный двухшаговый метод Адамса

$$x_{k,l+1} = x_{k,l} + \left( u_{k,l} + \frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{2\delta t_{k,l-1}} \delta t_{k,l} \right) \delta t_{k,l},$$

$$y_{k,l+1} = y_{k,l} + \left( v_{k,l} + \frac{v_{k,l} - v_{k,l-1}}{2\delta t_{k,l-1}} \delta t_{k,l} \right) \delta t_{k,l}$$

Недостатком является необходимость удерживать в памяти дополнительные массивы для скорости и шага по времени из предыдущего временного слоя.

На разнесенной сетке компоненты скорости маркера вычисляются путем линейной интерполяции по формулам [2]

$$u = \frac{A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4}{\delta x \delta y}, \quad v = \frac{A_5 v_1 + A_6 v_2 + A_7 v_3 + A_8 v_4}{\delta x \delta y}$$

$A_i$  – площади прямоугольников, показанных на рис. 1.

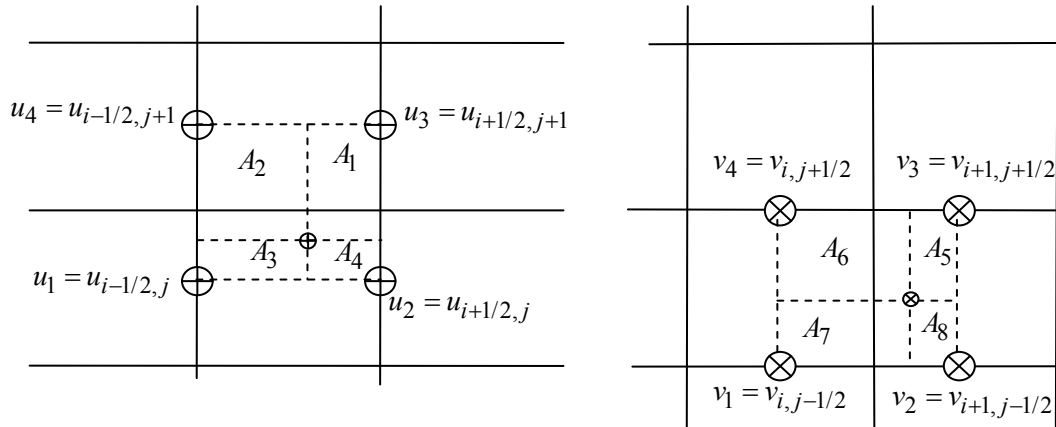


Рис.1 Расчет скорости маркера на разнесенной сетке

В случае, если поле скоростей рассчитано на обычной сетке, то скорость маркера вычисляется по формуле

$$\bar{v} = \frac{A_1 \bar{v}_1 + A_2 \bar{v}_2 + A_3 \bar{v}_3 + A_4 \bar{v}_4}{\delta x \delta y}$$

$A_i$  – площади прямоугольников показанных на рис.2.

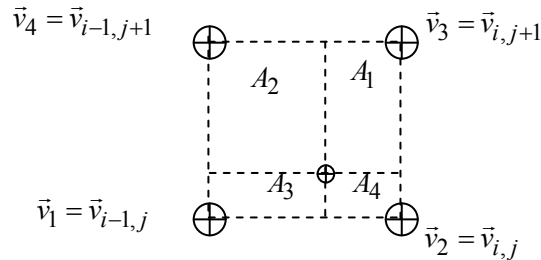


Рис.2 Расчет скорости маркера в ячейке

При попадании маркера в ячейку, незаполненную жидкостью, или при его выходе за пределы расчетной области, он удаляется.

Задание начальных координат маркеров удобно осуществлять с помощью графического манипулятора (например, компьютерной мышки), путем рисования какой либо кривой, вдоль которой будут расположены маркеры. В простейшем случае это можно сделать, задавая начало и конец отрезка. Информация о координатах начала и конца отрезков и количестве маркеров на них может быть сохранена в файл и считана из файла.

Результатом численного решения задачи Коши для каждой  $k$ -й частицы является множество точек  $(x_{k,l}, y_{k,l})$ . Соединяя эти точки отрезками, получим траекторию движения маркеров – линию тока. Если бы интегрирование происходило абсолютно точно, то в замкнутых областях траектории движения были бы замкнутыми кривыми. Однако вследствие численных погрешностей (связанных с численным решением задачи Коши и дискретностью поля скоростей) каждый следующий виток траектории немного отклоняется от предыдущего и траектории постепенно начинают полностью заполнять собой определенные области. При этом, начиная с определенного момента, картина траекторий становится почти стационарной. Если определенные области оказываются незаполненными, то выбираются начальные положения маркеров в другом месте и т.д.

### 3. Результаты тестирования программы

Постоянный шаг интегрирования, как показали исследования, в тех областях, где течение медленное, ведет к более длительным расчетам. Однако при постоянном шаге можно отслеживать величину скорости течения (при больших

скоростях область заполняется линиями тока быстрее). Поскольку построение линий тока (в случае адаптивного шага) и их динамическое отображение осуществляется достаточно быстро (считанные секунды), то удачно подобрать положение начальных точек можно эмпирическим путем с помощью графического манипулятора. При таком подходе визуализации поддается вся область движения жидкости, что позволяет выявлять самые мелкие области циркуляционного движения жидкости.

Таким образом, разработанная методика визуализации линий тока позволяет достаточно быстро и эффективно визуализировать любые двумерные течения. Ее преимуществом является динамическая визуализация линий тока. При условии определенной модификации методика может быть использована для исследования трехмерных течений. При этом очевидно, что для лучшей визуализации начальные точки необходимо ставить таким образом, чтобы кривые линий тока формировали замкнутые линии.

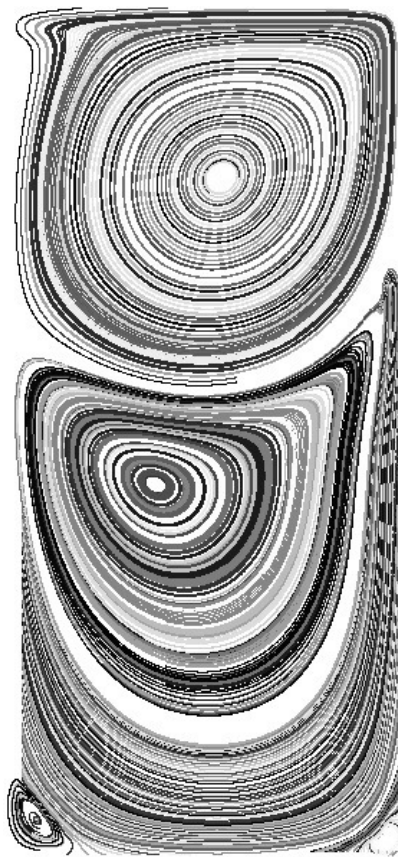


Рис. 3 Линии тока в каверне с шириной  $L=1$  м, высотой  $H=2$  м, кинематическая вязкость  $\nu=0.001$  м<sup>2</sup>/с, шаг сетки  $\delta x = \delta y = 0.04$  м.

На рис.3 показаны линии тока для течения в каверне (прямоугольной полости) с верхней крышкой, движущейся с постоянной скоростью  $U_0=1$  м/с.

Поле скоростей было получено в результате численного решения уравнения Навье-Стокса по схеме, изложенной в [2].

На рис.4 показано линии тока при обтекании зданий. Картина течений была рассчитана методом дискретных вихрей [4].

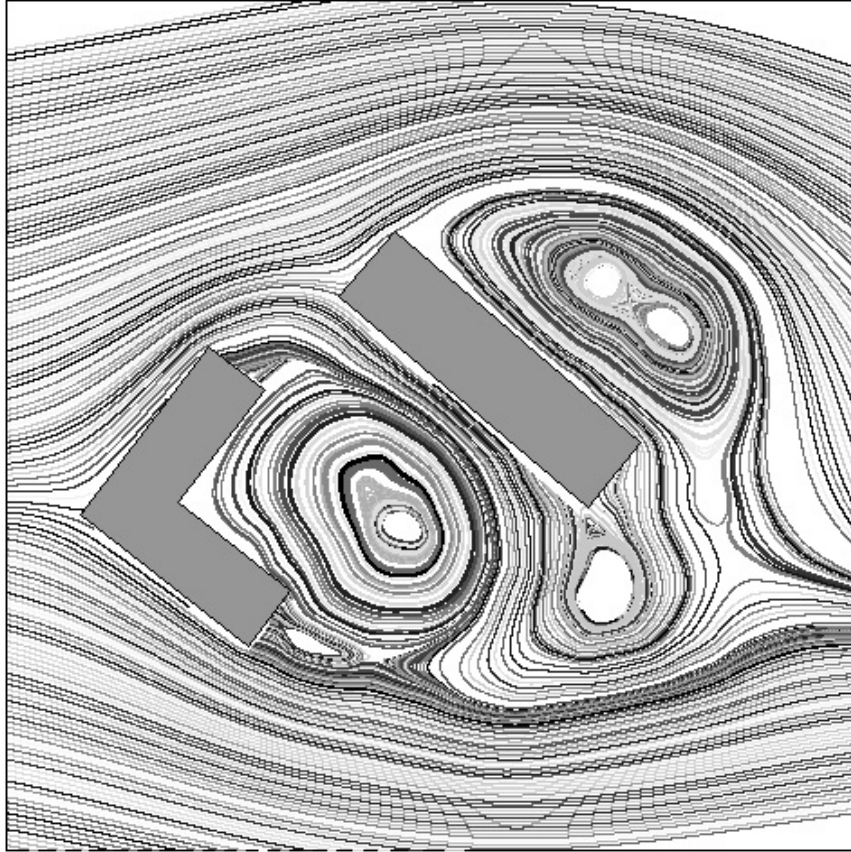


Рис. 4 Линии тока при обтекании зданий при расчете методом дискретных вихрей, шаг сетки в безразмерных координатах  $\delta x = \delta y = 0.05$ , размер сетки  $80 \times 80$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буланчук Г.Г. Чисельне моделювання процесу утворення та руху вихорової пари // Прикладна гідромеханіка. - 2003 - т.5 (77), №2 - С. 3-13.
2. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface // Phys. Fluids. - 1965. - V. 8. - P. 2182-2189.
3. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. – М.: «Издательство БИНОМ», 1997. – 304с.
4. И.К. Лифанов. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент – М., 1995.– 519 с.