

УДК 539.3

## Вплив геометричних і пружних характеристик плити на положення зон можливої пластичної деформації

О. В. Величко<sup>2</sup>, Т. О. Штефан<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Запорізький національний технічний університет,

<sup>2</sup> Таврійський державний агротехнологічний університет.

В статті отримані аналітичні формули для компонент тензора напружень плити, яка знаходиться в умовах плоскої статичної деформації. В результаті чисельних експериментів з'ясовано положення зон, в яких потенціальна енергія формозміни максимальна, у випадку, якщо на плиту тисне синусоїдальний штамп. Положення цих зон визначається відношенням геометричних розмірів плити та коефіцієнтом Пуассона. Отримана наближена залежність між цими характеристиками, при яких енергія формозміни в різних потенційно небезпечних зонах плити співпадає.

**Ключові слова.** Плита, штамп, четверта гіпотеза міцності, потенціальна енергія формоутворення, коефіцієнт Пуассона, ряд Фур'є.

In the article the analytical formulas for the components of the stress tensor plate, which is located in a plane static deformation. The result of numerical experiments clarified the position of areas in which the potential energy forming maximal if for a plate presses sinusoidal stamp. The position of these zones is determined by the ratio of the geometric dimensions of plates and Poisson's ratio. The resulting close relationship between these characteristics, in which the energy forming in various potentially hazardous areas coincide plate.

**Keywords.** Plate, stamped fourth hypothesis strength, potential energy shaping, Poisson's ratio, Fourier series.

В статье получены аналитические формулы для компонент тензора напряжений плиты, которая находится в условиях плоской статической деформации. В результате многочисленных экспериментов установлено положение зон, в которых потенциальная энергия формоизменения максимальная, в случае, если на плиту давит синусоидальный штамп. Положение этих зон определяется отношением геометрических размеров плиты и коэффициентом Пуассона. Полученная приближенная зависимость между этими характеристиками, при которых энергия формоизменения в различных потенциально опасных зонах плиты совпадает.

**Ключевые слова.** Плита, штамп, четвертая гипотеза прочности, потенциальная энергия формообразования, коэффициент Пуассона, ряд Фурье.

### Вступ

При розв'язанні задач теорії пружності визначаються компоненти тензорів напруження та деформації, а також компоненти вектора переміщень точок твердого тіла. Для прикладних питань цих даних виявляється недостатньо, оскільки вони не дають можливість безпосереднє встановити, чи буде тіло під дією прикладених навантажень залишатися цілим. На практиці використовують гіпотези міцності, в яких деякий вираз, пов'язаний з компонентами тензора напружень, порівнюють з критичним значенням, якій залежить від механічних властивостей матеріалу. Найбільш застосовною є четверта гіпотеза міцності [1], суть якої полягає в наступному: руйнування структури твердого тіла

відбувається в тих містах споруди, де потенціальна енергія формозміни перевищує деяке критичне значення.

Представлене дослідження ведеться в напрямку аналітичного пошуку найбільш небезпечних (в сенсі міцності) областей плити, що деформується штампом. Застосовується розклад функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди, який базується на роботі [2]. Питання експериментального та чисельних методів розрахунку енергії в деформованій плиті розглядалися в роботах [3-5].

### Постановка задачі

Розглянемо прямокутний паралелепіпед нескінченної довжини, вісь якого паралельна осі  $Oz$  і який знаходиться в умовах плоскої деформації. Якщо візьмемо один з перетинів  $z = const$ , то матимемо задачу про вигін смуги. Перейдемо до безрозмірних величин таким чином, щоб смуга займала область  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq h$ . Початок координат знаходиться на верхній межі області, а вісь  $Oy$  направлено вниз (Рис 1).

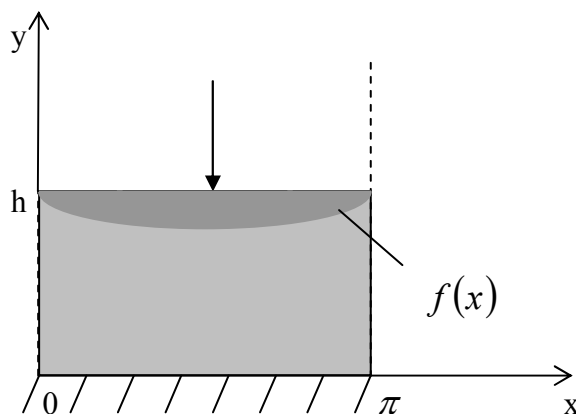


Рис. 1. Деформація плити штампом

На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально і контактує з поверхнею смуги на всьому відрізку  $x \in [0, \pi]$ . Відповідні граничні умови мають вигляд:

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = f(x), \quad (1)$$

Тут  $y = f(x)$  - рівняння лінії, яку описує нижня межа штампів в кінцевому положенні. Вважаємо, що функція  $f(x)$  допускає розклад в ряд Фур'є по синусам на проміжку  $(0, \pi)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx.$$

Нижня межа вільна від навантажень, тобто:

$$\tau_{xy}(x,h) = 0, \quad \sigma_y(x,h) = 0 \quad (2)$$

По аналогії з [6] будемо вважати, що на бокових межах виконуються наступні умови:

$$v(0, y) = v(h, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(h, y) = 0. \quad (3)$$

Таким чином нам потрібно знайти розв'язок задачі теорії пружності в області  $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, h]$  з межовими умовам (1)-(3).

### Метод розв'язання

Невідомі функції будемо шукати у вигляді наступних тригонометричних рядів:

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin(kx), \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(kx), \quad (4)$$

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(kx), \quad \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(y) \sin(kx), \quad \tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(y) \cos(kx).$$

Зауважимо, що при цьому межові умови (3) будуть тотожно виконуватися. Рівняння Ламе будуть виконуватися, якщо функції  $V_k(y)$  та  $U_k(y)$  задати виразами

$$V_k = (A_k + yB_k)ch(ky) + (C_k + yD_k)sh(ky),$$

$$U_k = \frac{1}{k}((kA_k + (3 - 4\nu)D_k + kB_k y)sh(ky) + (kC_k + (3 - 4\nu)B_k + kD_k y)ch(ky)).$$

Тут  $A_k, B_k, C_k, D_k$  - довільні константи. Функції  $S_k$ ,  $M_k$  та  $T_k$  знайдемо з формул

$$S_k = \lambda V_k' - (\lambda + 2\mu)kU_k, \quad M_k = -\lambda U_k k + (\lambda + 2\mu)V_k', \quad T_k = \mu(U_k' + kV_k)$$

які є наслідком оберненого закону Гуку. Явні вирази мають вигляд

$$T_k(y) = 2\mu(kA_k + kyB_k + 2(1 - \nu)D_k)ch(ky) + (kC_k + kyD_k + 2(1 - \nu)B_k)sh(ky);$$

$$S_k(y) = -2\mu((3 - 2\nu)B_k + kC_k + kyD_k)ch(ky) + ((3 - 2\nu)D_k + kA_k + kyB_k)sh(ky);$$

$$R_k(y) = 2(kA_k + kyB_k + (1 - 2\nu)D_k)sh(ky) + (kC_k + kyD_k + (1 - 2\nu)B_k)ch(ky). \quad (5)$$

З урахуванням формул (5) та розвинень (4), із межових умов (1) та (2) отримаємо систему для визначення довільних констант, розв'язок якої має вигляд:

$$\begin{aligned} A_k &= f_k, \quad B_k R_k = -kf_k (sh(kh)ch(kh) - kh), \\ C_k R_k &= -f_k (4\nu - 3)(sh(kh)ch(kh) - kh), \quad D_k R_k = kf_k (ch^2(kh) + 1 - 2\nu) \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $R_k = (4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1$ .

**Випадок синусоїдального штампу**

Застосуємо отриманні результати для знаходження ділянок, які є критичними в сенсі міцності розглянутої конструкції. Енергетична теорія міцності виходить із припущення, що кількість потенціальної енергії формозміни, яка накопичена до моменту настання небезпечного стану, однакова як при складному напруженні, так і при простому розтягуванні. Умова міцності згідно четвертій гіпотези міцності:

$$\sigma^{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (7)$$

Для плоскої деформації цей вираз набуває вигляду:

$$F(x, y) = \sigma^{\text{II}} = \sqrt{\left[ (1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \tau_{xy}^2)}. \quad (8)$$

Оскільки ми маємо явні вирази для всіх компонент тензору напружень, то можемо дослідити функцію (8) на екстремум в області  $[0, \pi] \times [0, h]$ . Оскільки в загальному вигляді аналітично цю задачу розв'язати важко, то проведемо чисельний аналіз.

При розрахунках вважалось, що  $f(x) = \alpha \sin x$ . В цьому випадку  $f_1 = \alpha$ ,  $f_i = 0$  при  $i \geq 2$ . На рисунках 2-7 наведено графіки функцій  $\frac{1}{\mu\alpha} F(x, y)$  для різних значень товщини  $h$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . Для кожної з цих функцій було чисельно визначено положення точки максимуму та відповідне максимальне значення.

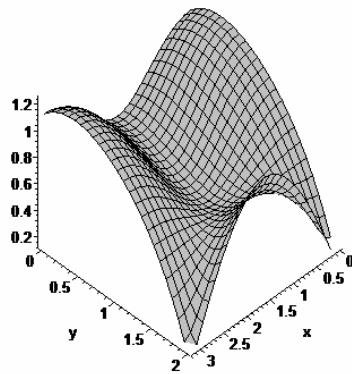


Рис. 2.  $h=2, \nu=0.25$ ,  
 $F_{\max} = F(0, 0.4) = 1.24175$

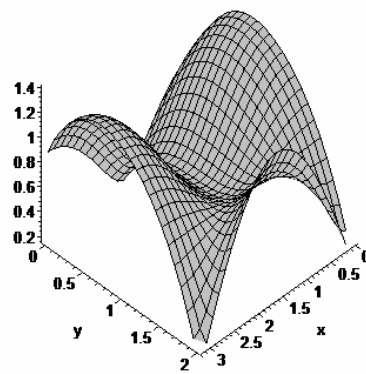


Рис. 3.  $h=2, \nu=0.45$ ,  
 $F_{\max} = F(0, 0.72) = 1.39415$

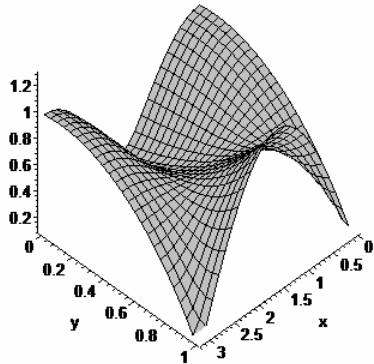


Рис. 4.  $h=1, \nu=0.25$ ,  
 $F_{\max} = F(\pi/2, 1) = 1.27778$

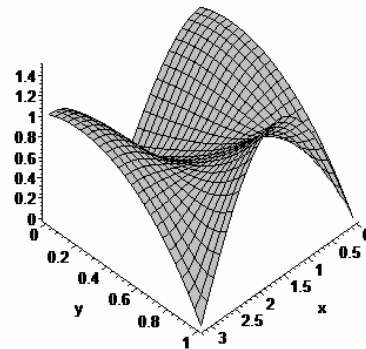


Рис. 5.  $h=1, \nu=0.45$ ,  
 $F_{\max} = F(\pi/2, 1) = 1.48994$

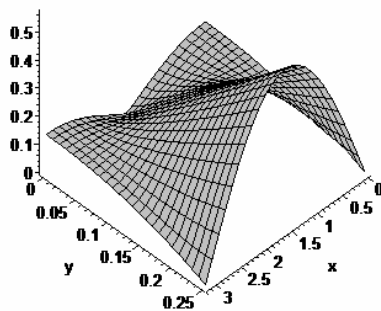


Рис. 6.  $h=0.25, \nu=0.25$ ,  
 $F_{\max} = F(\pi/2, 0.25) = 0.567637$

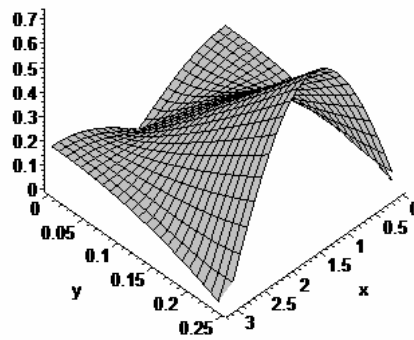


Рис. 7.  $h=0.25, \nu=0.45$ ,  
 $F_{\max} = F(\pi/2, 0.25) = 0.72818$

З аналізу приведених графіків випливає, що збільшення коефіцієнта Пуассона призводить до збільшення максимуму енергії. При малих значеннях товщини точка максимуму знаходиться на нижній межі плити, а при великих – на бокових границях. Встановимо залежність між товщиною плити та коефіцієнтом Пуассона, при якій локальні максимуми на боковій та на нижній межах плити співпадають.

Табл. 1. Критичні значення товщини плити при різних значеннях коефіцієнта Пуассона.

$\nu$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.49
$h$	1.429	1.435	1.446	1.462	1.486	1.520	1.568	1.632	1.762	1.887

За допомогою методу найменших квадратів була встановлена відповідна залежність  $h = 1.44 - 0.267v + 2.384v^2$ . Оскільки в даному випадку  $h$  - безрозмірна товщина, то для практичного використання отриманої формули потрібно вважати, що  $h = \pi b a^{-1}$ . Тут  $a$  - горизонтальний вимір плити, а  $b$  - висота. Отриманий результат можна сформулювати наступним чином: якщо

$$b < a(0.458 - 0.085v + 0.759v^2) \quad (9)$$

то максимум енергії формоутворення при дії синусоїдального штампу буде в середині нижньої межі плити. В протилежному випадку він буде на боковій стороні поблизу поверхні плити.

### Висновки

В статті розглядається плита, яка знаходиться в умовах плоскої деформації під дією штамп з синусоїдальною поверхнею. Отримано аналітичні вирази для функції, що визначає енергію формозміни, яка використовується в дослідженні міцності конструкції за четвертим критерієм. В результаті чисельних експериментів встановлено, що найбільш ймовірно зони пластичності виникають або біля середини нижньої межі плити (якщо плита має висоту, меншу за критичну), або на бокових межах плити поблизу верхньої межі (якщо плита має висоту, яка перевищує критичну). Отримано наближену залежність критичного значення висоти від коефіцієнта Пуассона.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов. — М.: Физматлит, 2008. — С. 384.
2. Величко О.В. Плоска періодична контактна задача для багатошарової основи//О.В. Величко//Вісник Дніпропетровського університету. Серія механіка. - Дніпропетровськ: видавництво ДНУ. - 2005.- №10(1).- Вип.9.,т.1.-С.118-124.
3. Клованич С. Ф., Мироненко И. Н., Шеховцов В. И. Исследование влияния штампов различной конфигурации при продавливании плоских железобетонных плит. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури Збірник наукових праць 2010 Вып. 37. С.181-187.
4. Русаков А. И. Методика опытно-теоретической оценки прогибов монолитной плиты перекрытия //Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – №. 3. – С. 28-32.
5. Шевченко А. А. Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния сталебетонных круглых плит. – 1972. Збірник наукових праць УкрДАЗТ, 2012, вип. 130 с.113-120
6. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании//В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – Москва: ГИФМЛ, 1960.-490 с.